Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной
математики и кибернетики

_______________ /И.А. Соколов /
«27» сентября 2022г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Теория вероятностей и математическая статистика

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден

на заседании Ученого совета факультета ВМК

(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 – Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 – Умеет использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3 – Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: основные понятия и наиболее важные задачи, решаемые в рамках теории вероятностей и математической статистики. Уметь: применять на практике статистический анализ к задачам физики, обработки сигналов и изображений, социологии, финансовой математики и других разделов науки и техники. Владеть: ключевыми методами решения задач теории вероятностей и математической статистики.

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

контрольная работа

3 семестр

Контрольная работа № 1	
Вариант 1	Вариант 2
1. Несколько раз бросается игральная кость. Какое событие более вероятно: {сумма выпавших очков четна} или {сумма выпавших очков нечетна}? 2. Двое условились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается	1. Сорок участников турнира разбиваются на четыре равные группы. Найти вероятность того, что четыре сильнейших участника окажутся в разных группах. 2. На отрезок наудачу бросают три точки, одну за другой. Какова вероятность того, что третья по счету точка упадет между двумя первыми?

каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится. 3. Имеются три урны с белыми и черными шарами, причем отношение числа белых шаров к числу черных равно p1,p2,p3 для 1-й, 2-й, 3-й урн соответственно. Наудачу (с вероятностью 1/3) выбирается урна и из нее шар. Какова вероятность того, что он белый? 4. Случайная величина X имеет функцию распределения F(x). Найти функцию распределения случайной величины 0.5(X+|X|).	3. Два стрелка стреляют по мишени. Один из них попадает в цель в среднем в 5 случаях, а второй — в 8 случаях из 10. Перед выстрелом они бросают правильную монету для определения очередности. Посторонний наблюдатель знает условия стрельбы, но не знает, кто в данный момент стреляет. Вот он видит, что стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что стрелял первый стрелок? 4. Пусть X и Y - независимые случайные величины с непрерывными функциями распределения F(x) и G(x) соответственно. Найти функцию распределения произведения XY.

Контрольная работа № 2	
Вариант 1	Вариант 2
1. Пусть X и Y-- независимые случайные величины, причем X+Y принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями 1/3 каждое. Доказать, что одна из величин X или Y имеет вырожденное распределение. 2. Найти распределение, которому соответствует характеристическая функция exp(-|t|). 3. Пусть X1,X2,… - Последовательность независимых случайных величин, причем Xn принимает значения -n,0 и n с вероятностями 1/(2n^2),1-1/n^2,1/(2n^2) соответственно. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел. 4. Найти приближенное значение для вероятности того, что число успехов в 100 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха 0,5 лежит в интервале (35,65).	1. Доказать,что функция f(z)=|z| не является производящей функцией вероятностного распределения. 2. Найти распределение, которому соответствует характеристическая функция 1/(1+t^2). 3. Пусть X1,X2,… - Последовательность независимых случайных величин, причем Xn принимает значения 2^(-n) и 2^(n) с вероятностями 1/2 Применим ли к этой последовательности закон больших чисел. 4. . Найти приближенное значение для вероятности того, что число успехов в 100 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха 0,5 лежит в интервале (47,53).

4 семестр

Контрольная работа № 1	
Вариант 1	Вариант 2
1. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют нормальное распределение $N(0,\theta^2)$. Доказать, что $T(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ − эффективная оценка функции	1. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют гамма-распределение $\Gamma(\frac{1}{\theta},1)$. Доказать, что $T(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ является эффективной

<table>
<tr>
<td>

$\tau(\theta) = \theta^2$.

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[a,b]$. Найти оценку методом моментов для a и b по первым двум моментам.

3. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и

$$X_i = \begin{cases} 1, \theta, \\ 2, \theta, \\ 3, 1-2\theta. \end{cases}$$

Найти одномерную достаточную статистику.

4. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и распределены с плотностью $\begin{cases} \exp\{-(x-\theta)\}, x > \theta, \\ 0, x \le \theta. \end{cases}$ Найти оценку максимального правдоподобия для θ.

</td>
<td>

оценкой θ.

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют гамма-распределение $\Gamma(\theta, \lambda)$. Найти оценку методом моментов для θ и λ по первым двум моментам.

3. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и

$$X_i = \begin{cases} 1, \theta_1, \\ 2, \theta_2, \\ 3, 1-\theta_1-\theta_2. \end{cases}$$

Найти двумерную достаточную статистику.

4. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют нормальное распределение $N(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$. Найти оценку максимального правдоподобия для θ.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Контрольная работа № 2</td>
</tr>
<tr>
<td>Вариант 1</td>
<td>Вариант 2</td>
</tr>
<tr>
<td>

1. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\theta]$. Построить кратчайший доверительный интервал для θ с коэффициентом доверия α, основанный на центральной статистике $G(X,\theta) = \dfrac{\max\limits_{1\le i\le n} X_i}{\theta}$.

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют распределение Пуассона $\Pi(\theta)$. Построить центральный доверительный интервал с коэффициентом доверия α, используя точечную оценку $T(X) = \overline{X}$.

3. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют плотность распределения

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \exp\{-(x-\theta)\}, x > \theta, \\ 0, x \le \theta. \end{cases}$$

Построить наиболее мощный критерий размера α для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta = \theta_1 < \theta_0$. Найти мощность критерия.

</td>
<td>

1. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют нормальное распределение $N(\theta, 1)$. Построить кратчайший доверительный интервал для θ с коэффициентом доверия α, основанный на центральной статистике

2. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами m и 1. Построить центральный доверительный интервал для m с коэффициентом доверия α, используя точечную оценку $T(X) = \overline{X}$.

3. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют биномиальное распределение $b(1,\theta), 0 < \theta < 1$. Построить равномерно наиболее мощный критерий размера α для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta < \theta_0$. Найти функцию мощности.

</td>
</tr>
</table>

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме зачета (3 семестр) экзамена (4 семестр)
В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:
Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету 3 семестр

1. Случайная величина.
2. Независимые одинаково распределенные случайные величины.
3. Функция распределения. Основные свойства функции распределения.
4. Математическое ожидание (в общем, дискретном и абсолютно непрерывном случаях).
5. Квантиль распределения. Медиана.
6. Отношение Ляпунова. Классическая дробь Ляпунова.
7. Вероятность.
8. Распределение Пуассона (плотность, характеристическая функция).
9. Нормальное распределение (плотность, характеристическая функция).
10. Экспоненциальное распределение (плотность, характеристическая функция).
11. Классическое неравенство Берри-Эссеена.
12. Характеристическая функция (в общем, дискретном и абсолютно непрерывном случаях).
13. Случайный процесс (две сущности).
14. Борелевская сигма-алгебра.
15. Безгранично делимое распределение (два определения).
16. Неравенство Иенсена.
17. Формула полной вероятности.
18. Аналог формулы полной вероятности для математического ожидания.
19. Плотность распределения.
20. n-кратная свертка функций распределения.
21. Пуассоновский процесс.
22. Теорема об асимптотической нормальности пуассоновского процесса.
23. Точечный процесс. Распределение точечного процесса.
24. Ординарный точечный процесс. Стационарный точечный процесс.
25. Смешанный пуассоновский процесс.
26. Теорема о безграничной делимости смешанного пуассоновского процесса.
27. Случайная мера.

Вопросы к экзамену 4 семестр

1. Вероятностное пространство. Операции над событиями. Свойства вероятности. Условная вероятность. Независимость событий. Критерий независимости. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
2. Прямое произведение вероятностных пространств. Независимые испытания Бернулли.
3. Случайная величина. Порожденное и индуцированное вероятностные пространства.
4. Функция распределения, ее свойства. Дискретные, сингулярные и абсолютно непрерывные функции распределения и случайные величины. Плотность распределения.

5. Теорема Лебега о разложении функции распределения.
6. Моменты случайных величин. Их свойства.
7. Совокупности случайных величин. Совместная функция распределения. Независимость случайных величин. Критерии независимости.
8. Виды сходимости последовательностей случайных величин.
9. Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева.
10. Лемма Бореля-Кантелли. Неравенство Колмогорова.
11. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин.
12. Характеристические функции и их свойства.
13. Закон больших чисел в форме Хинчина. Центральная предельная теорема.
14. Условное математическое ожидание.
15. Статистическая структура. Выборка. Статистика. Порядковые статистики. Вариационный ряд. Выборочные моменты и выборочная функция распределения. Их свойства.
16. Точечная оценка. Несмещенность, состоятельность, оптимальность. Теорема о единственности оптимальной оценки.
17. Функция правдоподобия. Достаточные статистики, полные статистики. Теорема факторизации.
18. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки.
19. Теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова. Оптимальность оценок являющихся функцией полной достаточной статистики.
20. Метод моментов. Свойства оценок, полученных методом моментов.
21. Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок максимального правдоподобия.
22. Доверительные интервалы. Методы центральной статистики и использования точечной оценки.
23. Проверка гипотез. Лемма Неймана-Пирсона.
24. Критерии согласия Колмогорова и χ -квадрат.

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов и задачи

1. Случайная величина. Порожденное и индуцированное вероятностные пространства. Функция распределения, ее свойства.

2. Функция правдоподобия. Достаточные статистики, полные статистики. Теорема факторизации.

3. Пусть X имеет биномиальное распределение $b(n,\frac{1}{2})$. Найти оценку максимального правдоподобия для n.

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных средств	**2 (не зачтено)**	**3 (зачтено)**	**4 (зачтено)**	**5 (зачтено)**
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач