Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной математики и кибернетики

_______________/И.А. Соколов /
«27» сентября 2022г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Действительный и комплексный анализ

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден
на заседании Ученого совета факультета ВМК
(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 – Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 – Умеет использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3 – Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: основы теории интегралов, зависящих от параметра; основы теории рядов Фурье и интеграла Фурье; основные свойства функций Эйлера; основы теории аналитических функций комплексного переменного; основные принципы конформных отображений; основы операционного исчисления. Уметь: применять при решении задач теоретические факты комплексного анализа; применять теоретические факты об интегралах, зависящих от параметра; использовать функции Эйлера для решения задач; исследовать разложения функций в ряды Фурье и интегралы Фурье; строить и исследовать разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. Владеть: методами качественного анализа интегралов, зависящих от параметра; методами комплексного анализа для вычисления интегралов от аналитических функций, а также интегралов от функций действительного переменного; навыками построения разложений функций в ряды Фурье.

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

контрольная работа

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Исследовать на равномерную сходимость на области существования интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2}dx$.

2. Исследовать интеграл $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha^2}dx$ на непрерывность на области существования.

3. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t^{3/2}}dt, \quad a,b>0$.

4. Определить область существования интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(2+x^3)^p}dx$ и вычислить этот интеграл.

Вариант 2

1. Найти $F'(a)$, если $F(a)=\int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{x}dx$.

2. Исследовать на равномерную сходимость $\int_0^{\infty} \frac{\sin sx}{\sqrt{s^2-(x-s)^2}}dx$ в случаях: а) $s\in(1,2)$; б) $s\in(0,+\infty)$.

3. Исследовать на непрерывность $I(a)=\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+(x-a)^2}dx, \quad a\in(-\infty,+\infty)$.

.

4. Вычислить $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin\lambda x\,dx, \quad a,b>0$. Обосновать вычисление.

5. Вычислить $\int_0^{\pi.2} \sin^{3/2}x\cos^{1/2}x\,dx$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$ функцию $f(x)=sign(\sin x)$, нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $[-\pi,\pi]$.

2. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\sin a\,x,\ x\in[0,\pi]$, нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $[-\pi,\pi]$.

Вариант 2

1. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,\pi/2], \\ \pi-x, & x\in[\pi/2,\pi], \end{cases}$ по косинусам кратных дуг, нарисовать графики функции $f(x)$ и суммы ряда Фурье.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi], \\ 1, & x\in\left(\pi,2\pi\right), \end{cases}$, нарисовать графики функции $f(x)$ и суммы ряда Фурье.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в кольце D, содержащем точку $3/4$. Указать границы кольца D. $f(z)=\dfrac{1+2z^2}{1+z-z^2}$.

2. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид: $f(z)=\dfrac{1-ch(z/2)}{e^z-e^{3z}}$.

3. Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы

$$\text{а)} \int\limits_{|z-1/2|=1} \frac{z^3e^{1/z}}{1-z^2}dz; \qquad \text{б)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-x)\cos 2x}{x^2+6x+10}dx.$$

4. Отобразить конформно область $\left\{|z|>1, \max\left(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\right)>0\right\}$ на верхнюю полуплоскость.

Вариант 2

1. Найти множество точек z, в которых функция $f(z)=|z|e^z$ является дифференцируемой.

2. Разложить функцию $f(z)=ch\, z$ в ряд Тейлора с центром в точке $z=2i$ и указать область, где справедливо разложение.

3. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ в ряд Лорана в кольце $\left\{0<|z+1|<3\right\}$.

4. Определить все особые точки функции $f(z)=\dfrac{ch\, z}{\sin(z-1)}$ и классифицировать их, включая точку $z=\infty$.

5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \sin\frac{z}{z+1}dz$.

6. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx, \quad \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b>0$.

7. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость внутренность угла $\left\{\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}\right\}$ с выброшенным лучом $[i,i\infty]=\left\{it: t\geq 1\right\}$.

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме экзамена
В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:
Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

Экзамен сдается в устной форме. В экзаменационном билете – два вопроса из приведенного ниже списка (по одному из каждого раздела). И одна задача.

Действительный анализ

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (ИЗП).
2. Признаки равномерной сходимости несобственных ИЗП (Вейерштрасса, Дирихле-Абеля, Дини).
3. Непрерывность и интегрируемость несобственных ИЗП на отрезке.
4. Дифференцируемость несобственных ИЗП.
5. Интегрируемость несобственных ИЗП на полупрямой.
6. Вычисление интеграла Дирихле.
7. Свойства Г-функции Эйлера.
8. Свойства В-функции Эйлера. Связь между эйлеровыми интегралами.
9. Асимптотическая формула для функции . Формула Стирлинга.
10. Ортонормированные системы. Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства.
11. Замкнутость и полнота ортонормированных систем.
12. Теорема Фейера.
13. Замкнутость тригонометрической системы. Следствия из замкнутости.
14. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции.
15. Локальная теорема Фейера.
16. Простейшие условия равномерной сходимости и почленной дифференцируемости рядов Фурье.
17. Уточнённые условия равномерной сходимости ряда Фурье.
18. Условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Сходимость ряда Фурье кусочно-гельдеровой функции.
19. Принцип локализации Римана.
20. Свойства преобразования Фурье.
21. Условия разложимости функции в интеграл Фурье.

Комплексный анализ

1. Стереографическая проекция.
2. Функции комплексного переменного. Предел. Непрерывность.
3. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Аналитичность.
4. Теорема Коши и её обобщение.
5. Интегральная формула Коши.
6. Принцип максимума модуля аналитической функции.
7. Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума.
8. Разложение гармонических функций в ряды. Ряд Фурье для гармонической функции.
9. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Теорема Лиувилля.
10. Неопределённый интеграл. Теорема Морера.
11. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций.

12. Аналитичность суммы степенного ряда. Теорема Тейлора.
13. Теорема единственности аналитических функций. Нули аналитической функции.
14. Ряды Лорана. Теорема Лорана.
15. Классификация изолированных особых точек. Устранимая особая точка. Полюс.
16. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.
17. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Основная теорема о вычетах.
18. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
19. Логарифмический вычет. Теорема Руше. Принцип аргумента.
20. Аналитическое продолжение с вещественной оси. Элементарные функции.
21. Аналитическое продолжение с помощью рядов и через границу. Принцип непрерывности.
22. Аналитическое продолжение Гамма-функции Эйлера. Формула дополнения.
23. Основные принципы конформных отображений: принцип соответствия границ и принцип симметрии Римана-Шварца.
24. Свойство аналитической однолистной функции в области.
25. Локальное свойство однолистной функции. Отображение области на область при конформном отображении.
26. Дробно-линейная функция и её свойства.
27. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями.
28. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Случай круга и верхней полуплоскости.
29. Следствие из решения задачи Дирихле для круга. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами.
30. Функция Грина (функция источника).
31. Преобразование Лапласа и его основные свойства.
32. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с помощью преобразования Лапласа.

Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

1. Разложить функцию $f(x)=x^2$ в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(0,2\pi)$. К чему сходится полученное выражение в точке $x=2\pi$?
2. Обосновать возможность дифференцирования под знаком интеграла и вычислить интеграл: $\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$.
3. Исследовать на равномерную сходимость на множестве: $\int\limits_1^\infty \alpha e^{-\alpha^2 x^2}\, dx, \quad \alpha>0$.
4. Разложить в ряд Лорана на указанном множестве $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}, \quad 1<|z|<2$.
5. Применить методы ТФКП для вычисления интеграла, обосновать применимость метода: $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{x^2+k^2}dx, \quad \alpha,k>0$.
6. Отобразить конформно сектор $\{|z|<2,\ 0<\arg z<\pi/4\}$ на $\{\operatorname{Im} w>0\}$.

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных средств	**2 (не зачтено)**	**3 (зачтено)**	**4 (зачтено)**	**5 (зачтено)**
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач