Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной
математики и кибернетики

_______________ /И.А. Соколов /
«27» сентября 2022г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Функциональный анализ

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден
на заседании Ученого совета факультета ВМК
(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 – Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 – Умеет использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3 – Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: Теорию меры и интеграл Лебега, метрические пространства, линейные операторы и функционалы, теорию Фредгольма, Спектральную теорию Уметь: Применять методы функционального анализа в современных теоретических и прикладных задачах Владеть: Методами современного функционального анализа

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

решение индивидуальных заданий

Примеры задач

1. Какова мощность всех непрерывных функций на $[a, b]$?
2. Доказать, что подмножество $M \subset C[0,1]$ такое, что $M = \{ f(x) \mid A \le f(x) \le B \}$ - замкнутое в $C[0,1]$.
3. Является ли множество M - непрерывных функций, удовлетворяющих условию $A < f(x) < B$ открытым в $C[0,1]$?
4. Доказать, что пространство m - ограниченных последовательностей с метрикой $p(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$ является полным пространством.

5. Пусть A - отображение n-мерного пространства в себя, задаваемое с системой линейных уравнений $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + b_j$ или $A\,x = Y$. В пространстве введена метрика двумя способами: а) $p\left(x, y\right) = \max_{i} \left|x_i - y_i\right|$, и б) $p\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{m} \left|x_i - y_i\right|$, где $x = \left(x_1, x_{2,\ldots,}\, x_n\right)$, $y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$.

Доказать, что условие $\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \le \alpha < 1, i = 1, \ldots, n$ является необходимым и достаточным, чтобы отображение являлось сжатием.

6. Доказать, что любое измеримое множество E на прямой с мерой $\left|E\right| = p > 0$ содержит измеримое подмножество меры $q, 0 < q < p$.
7. Пусть E - измеримое на сегменте $\left[0, 1\right]$ для любого интервала Δ имеет место неравенство $\left| E \cap \Delta \right| \le \alpha \left| \Delta \right|, \alpha < 1$. Доказать, что $\left|E\right| = 0$.
8. Пусть A_1 и A_2 - измеримые подмножества сегмента $\left[0, 1\right]$ и $\left| A_1 \right| + \left| A_2 \right| > 1$. Доказать, что $\left|A_1 \cap A_2\right| > 0$.
9. Может ли открытое неограниченное множество иметь конечную меру?
10. Пусть замкнутое множество имеет конечную меру. Может ли оно быть неограниченным?
11. Доказать, что непрерывные функции на $\left[0, 1\right]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они равны.
12. Доказать, что непрерывные на измеримом множестве E функции являются измеримыми.
13. Доказать, что если $f\left(x\right)$ имеет производную на сегменте $\left[a, b\right]$, то производная $f'\left(x\right)$ измерима.
14. Привести пример ограниченной, измеримой функции, не эквивалентной никакой функции, интегрируемой по Риману.
15. Привести пример неизмеримой функции. Доказать, что множество и его характеристическая функция измеримы или не измеримы одновременно.
16. Будет ли измерима функция $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x\left(x-1\right)}$ на $\left[0, 1\right]$?
17. Будет ли измерима функция $f\left(x\right) = \begin{cases} \mathrm{n},\ \mathrm{x} = {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{n}} - \textit{рац.} \\ 1,\ \mathrm{x}\ \text{- иррац.} \end{cases}$
18. Пусть E - неизмеримое множество на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Будет ли функция $f\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \in C\,E \\ \sin x, & x \in E \end{cases}$ измеримой?
19. Привести пример ограниченной функции, разрывной в каждой точке отрезка $\left[a, b\right]$ и интегрируемой по Лебегу. Будет ли эта функция интегрируема по Риману?
20. Привести пример функции, интегрируемой по Лебегу на $\left[0, 1\right]$, но не являющейся ограниченной ни на каком отрезке $\left[a, \beta\right] \subset \left[0, 1\right]$.
21. При каких α и β функция $f\left(x\right) = x^{\alpha} \sin\left(x^{\beta}\right)$ интегрируема по Лебегу на $\left[0, 1\right]$.
22. Доказать, что если $f\left(x\right) \ge 0$ на множестве E и $C > 0$, то функция удовлетворяет неравенству Чебышева $\left| E\left[f\left(x\right) \ge C\right] \right| \le \dfrac{1}{C} \int_E f\left(x\right) d\,x$.
23. Существует ли интеграл Лебега от $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\ \sqrt{1-x}}$ на $\left[0, 1\right]$?
24. Будет ли функция $f\left(x\right)$ интегрируемы по Лебегу на $\left[0, \infty\right]$, если $f\left(x\right) = \begin{cases} {}^{1}\!/_{x^{\alpha}},\ x - \textit{иррац. число} \\ 0,\ \ \mathrm{x}\ \text{- рац. числ.} \end{cases}$

25. При каких α и β существует интеграл Лебега на $(1,+\infty]$, от функции $f(x)=x^{\alpha}\ln^{\beta}x$.
26. Существует ли интеграл Лебега на $[2,+\infty)$ от функции $f(x)=1/x\ln^2 x$.
27. Привести пример последовательности функций, сходящейся по мере на измеримом E, но не сходящейся ни в одной точке множества E.
28. Показать, что из сходимости почти всюду не следует сходимости в среднем. Рассмотреть пример:
$$f_n(x)=\begin{cases} n,\ если\ 0<1/n \\ 0,\ \text{для остальных x.}\end{cases}$$
29. Показать, что из сходимости в среднем не следует сходимости почти всюду. Пример: для любого $n=2^k+m,\ где\ 0\le m<2^k$ определим $f_n(x)=\begin{cases} 1,\ если\ \frac{m}{2^k}\le x\le\frac{m+1}{2^k} \\ 0,\ для\ остальных\ x\in R.\end{cases}$
30. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости почти всюду. Рассмотрите пример задачи 29.
31. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости в среднем. Пример: при $n=2^k+m$
$$f_n(x)=\begin{cases} 2^k,\ если\ \frac{m}{2^k}\le x\le\frac{m+1}{2^k} \\ 0,\ если\ x\notin\left[\frac{m}{2^k},\frac{m+1}{2^k}\right].\end{cases}$$
32. Показать, что если мера множества E бесконечна, то из сходимости почти всюду не следует сходимость по мере. Пример: $f_n(x)=\begin{cases} 1,\ n\le x\le n+1 \\ 0\ для\ остальных\ x\in R.\end{cases}$
33. Показать, что из сходимости в $L_1[0,1]$ не следует сходимости в $L_2[0,1]$. Пример:
$$f(x)=\begin{cases} n^{\frac{3}{2}},\ x\in\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right], \\ 0,\quad x\notin\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right].\end{cases}$$
34. Доказать полноту пространства $C[0,1]$.
35. Будет ли полным пространство многочленов на сегменте $[0,1]$, если метрика вводится по формуле: $p(x,y)=\max\limits_{0\le/\le|}|x(t)-y(t)|$
36. Доказать, что пространство l_2 - сепарабельно.
37. Пусть A - компактное множество в банаховом пространстве X. Доказать, что для любого $x\in X$ найдется точка $y\in A$ такая, что $p(x,A)=\|x-y\|$.
38. Если на метрическом компакте $p(Ax,Ay)<p(x,y)$ для любых x,y, принадлежащих компакту, то оператор A имеет единственную неподвижную точку. Существенно ли условие компактности?
39. Доказать множество непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$ таких, что $|x(0)|\le K_1$; $\int_0^1|x'(t)|^2\,dt\le K_2$, где $K_1,K_2>0$ - постоянные, компактно в пространстве $C[0,1]$.
40. Будет ли компактом множество всех степеней $x^n,\ n=1,2,\dots$ в пространстве $C[0,1]$.
41. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве компактно.
42. Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество компактно.
43. Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными и непрерывными и найти их нормы:

а) $f(x)=\frac{1}{3}[x(-1)+x(1)]$ *б*) $f(x)=\int_{-1}^{0}x(t)\,dt-\int_{0}^{1}x(t)\,dt$ *в*) $f(x)=\int_{-1}^{1}t\,x(t)\,dt$.

44. Пусть X - множество функций $f(x)$, определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\|=\max\limits_{x}|f(x)|$. Будет ли пространство банаховым?

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме зачета
В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:
Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачеты

1. Определение кольца, минимального кольца, алгебры, полукольца, структура минимального кольца.
2. Определение и свойства внешней меры, измеримость по Лебегу.Критерий измеримости по Лебегу.
3. Канторово множество, пример неизмеримого множества.Мера Лебега-Стильтьерса
4. Измеримые функции, измеримость непрерывной функции, предела измеримых функций, производной.
5. Измеримость суммы, разности, произведения, частного измеримых функций. Теорема Егорова.
6. Сходимость по мере, единственность предела. Связь со сходимостью почти всюду.
7. Интеграл Лебега от простых функций, от ограниченных и неограниченных функций.
8. Интегрируемые функции и их свойства.
9. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега, теорема Лебега о предельном переходе.
10. Теоремы Леви и Фату.
11. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Пример функции неинтегрируемой по Риману даже при изменении на множестве меры нуль.
12. Пространство Lp, его полнота, плотность множества непрерывных функций в Lp.
13. Неравенство Гельдера, Минковского, полнота пространстваLp, непрерывность в среднем функций изLp.
14. Теорема Фубини о перестановке интегрирования.
15. Метрические пространства, пересечение открытых и замкнутых множеств, полные метрические пространства, непрерывные отображения.
16. Принцип сжимающих отображений, локальная форма принципа, примеры применения к решению интегральных уравнений.
17. Плотные, нигде не плотные множества, принцип вложенных шаров, понятие категории, теорема Бэра-Хаусдорфа. Пример вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.
18. Критерии предкомпактности в C, Lp, lp.
19. Банаховы пространства, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора, полнота пространства линейных ограниченных операторов.
20. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема о расходимости тригонометрического ряда.
21. Обратные операторы, правый, левый обратные операторы. Обратимые операторы, признак обратимости.
22. Обратимость оператора E-A. Открытость множества обратимых операторов, сходимость обратных операторов.
23. Теорема Банаха об обратном операторе.
24. Теорема Хана-Банаха и следствия из нее Слабая сходимость.
25. Гильбертовы пространства. Теорема Леви. Теорема Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовыхпространстах.
26. Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности ограниченной последовательности в гильбертовом пространстве.
27. Сопряженный оператор.
28. Вполне непрерывный и компактный операторы.
29. Три теоремы Фредгольма.
30. Спектр оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

1. Привести пример последовательности функций, сходящейся по мере на измеримом множестве, но не сходящейся ни в одной точке этого множества.
2. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости почти всюду.

3. Пусть A – компактное множество в банаховом пространстве X. Доказать, что для любого $x \in X$ найдется точка $y \in A$ такая, что $p(x, A) = \|x - y\|$.
4. Будет ли компактом множество всех степеней x^n, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве $C[0,1]$?
5. Доказать, что функционал $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt$, действующий в пространстве $C[-1,1]$, является линейным и непрерывным, и найти его норму.
6. Определить спектр оператора A, действующего в пространстве l_2 по правилу: $A(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right)$.

Пример билета:

1. Три теоремы Фредгольма.
2. Задача: Пусть X - множество функций $f(x)$, определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\| = \max_x |f(x)|$. Будет ли пространство банаховым?

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных средств	**2 (не зачтено)**	**3 (зачтено)**	**4 (зачтено)**	**5 (зачтено)**
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач