

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**  
декан факультета вычислительной  
математики и кибернетики

  
/И.А. Соколов /  
«27» сентября 2022г.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по дисциплине  
**Вариационное исчисление**

---

**Уровень высшего образования:**  
бакалавриат

**Направление подготовки / специальность:**  
01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

**Направленность (профиль) ОПОП:**  
Искусственный интеллект и анализ данных

**Форма обучения:**  
очная

Рассмотрен и утвержден  
на заседании Ученого совета факультета ВМК  
(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

## 1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	Индикатор (показатель) достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 – Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 – Умеет использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3 – Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<b>Знать:</b> 1. примерные границы возможностей математических методов исследования и решения вариационных задач, 2. понимать общность и различия в постановках таких задач; <b>Уметь:</b> 1. выбирать адекватную форму постановки вариационной задачи и подходящий метод ее решения в соответствии с имеющейся информацией о различных свойствах исходных данных; <b>Владеть:</b> 1. арсеналом базовых методов решения вариационных задач и быть готовым как к адаптации этих методов к конкретным особенностям поставленной задачи, так и к внесению необходимых коррекций в саму постановку задачи.

### 1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

контрольная работа

### Образец заданий контрольной работы № 1

1. Найти первую вариацию функционала в простейшей задаче вариационного исчисления:

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^1 (tx + \dot{x}^2) dt \\ x(0) = x_0, x(1) = x_1 \end{cases}$$

2. Исследовать на экстремум изопериметрическую задачу вариационного исчисления:

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow extr \\ x(0) = 0, x(1) = 1 \\ \int_0^1 tx dt = 0 \end{cases}$$

3. Исследовать на экстремум задачу вариационного исчисления с подвижными границами:

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^T (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow extr \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

### Образец заданий контрольной работы № 2

1. С помощью необходимых и достаточных условий найти экстремумы в простейшей задаче вариационного исчисления:

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^1 e^t (2x^2 + \dot{x}^2) dt \rightarrow extr \\ x(0) = 1, x(1) = e \end{cases}$$

2. С помощью необходимых и достаточных условий найти экстремумы в простейшей задаче вариационного исчисления:

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (x^2 - \dot{x}^2) dt \rightarrow extr \\ x(0) = 1, x\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 \end{cases}$$

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

### Образец заданий итоговой контрольной работы

1. Заданы последовательность функций  $x_n(t) = \frac{\sin n^2 t}{n}$  и функция  $x_0(t) \equiv 0$  при  $t \in [0, \pi]$ . Проверить сходимость:

$$\|x_n - x_0\|_{C^0[0, \pi]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \|x_n - x_0\|_{C^1[0, \pi]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2. С помощью необходимых и достаточных условий найти экстремумы в простейшей задаче вариационного исчисления:

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^1 e^x \dot{x}^2 dt \rightarrow extr \\ x(0) = 0, x(1) = \ln 4 \end{cases}$$

3. Исследовать на экстремум задачу Лагранжа:

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 1) dt \rightarrow extr \\ x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0, x_1(1) = 2 \\ \varphi_1(t, x) = x_1 + x_2 - 2t^2 = 0 \end{cases}$$

## 1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме экзамена

В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:

Билеты

## 1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену

1. Постановки задач вариационного исчисления. Сильный и слабый минимум. Лемма о скруглении углов. Связь между сильным и слабым минимумами.
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Примеры Гильберта, Больца и Вейерштрасса.
3. Изопериметрическая задача вариационного исчисления. Задача Дидоны. Цепная линия.
4. Задача Лагранжа с голономными связями. Задача о движении материальной точки по поверхности.
5. Задача Лагранжа с неголономными связями и ее обобщение.
6. Негладкие экстремали. Задача о кривой, имеющей при своем вращении поверхность возможно меньшей площади. Теорема Гильберта. Условия Вейерштрасса-Эрдмана.
7. Условия трансверсальности в задаче с подвижными концами.
8. Преобразование Лежандра. Канонические уравнения Гамильтона. Механический смысл преобразования Лежандра.
9. Принцип максимума Понтрягина для линейно-квадратичной задачи оптимального управления.
10. Простейшая задача вариационного исчисления на сильный минимум. Функция Вейерштрасса. Квадратичная задача вариационного исчисления. Принцип максимума Понтрягина для задачи о простом движении.
11. Поле экстремалей. Дифференциал функции действия. Уравнение Гамильтона-Якоби.
12. Инвариантный интеграл Гильберта и его свойства. Решение уравнения Гамильтона-Якоби для квадратичной задачи вариационного исчисления.
13. Достаточные условия сильного минимума, использующее уравнение Гамильтона-Якоби и функцию Вейерштрасса.
14. Вторая вариация. Условия Лежандра. Необходимое условие слабого минимума, использующее условие Лежандра.
15. Достаточные условия слабого и сильного минимумов, использующие условия Лежандра.
16. Сопряженные точки. Условие Якоби. Необходимое условие слабого минимума, использующее условие Якоби.
17. Достаточное условие слабого минимума, использующее условие Якоби.
18. Достаточное условие сильного минимума, использующее условие Якоби.
19. Существование решений в простейшей задаче вариационного исчисления. Теорема Тонелли. Существование решений при наличии ограничений на производные допустимых функций.
20. Пример Лаврентьева.
21. Задача о геодезических на полуплоскости Пуанкаре. Аэродинамическая задача Ньютона.
22. Задача о стрельбе. Задача оптимального управления для финансово-кредитной модели непрерывного типа.

### Пример экзаменационного билета

1. Изопериметрическая задача вариационного исчисления. Задача Дидоны. Цепная линия.
2. Достаточные условия слабого и сильного минимумов, использующие условия Лежандра.

## 2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка	2 (не зачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
виды оценочных средств				
<b>Знания</b> (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
<b>Умения</b> (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности не принципиального характера)	Успешное и систематическое умение
<b>Навыки</b> (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач