Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной математики и кибернетики

_____________/И.А. Соколов /
«27» сентября 2022г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Интегральные уравнения

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден

на заседании Ученого совета факультета ВМК

(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 - Знает математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности ОПК-3.2 - Умеет применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	знать – основные типы линейных интегральных уравнений Фредгольма, Вольтерры, уравнения со слабой особенностью и задачи, приводящие к этим интегральным уравнениям; уметь применять на практике методы решения интегральных уравнений в ограниченных областях; понимать и применять на практике сведение задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и задач для уравнений математической физики к интегральным уравнениям и методы их решения; уметь - находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию, связанную с интегральными уравнениями и методами построения их решения; - демонстрировать способность к анализу и синтезу в области применения интегральных уравнений;

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

коллоквиум

Вопросы к коллоквиуму

1. Определения линейных интегральных уравнений 1-го, 2-го и 3-го рода.

2. Определения ядра Фредгольма, интегрального оператора Фредгольма, интегрального уравнения Фредгольма.

3. Определения ядра со слабой особенностью, интегрального оператора со слабой особенностью.

4. Определение сингулярного интегрального уравнения в смысле Коши.

5. Определения уравнений Вольтерры 1-го и 2-го рода.

6. Определение уравнения Абеля.

7. Определения разностного ядра и интегральных уравнений типа свёртки.

8. Определения нелинейных интегральных уравнений Урысона и Гаммерштейна.

9. Определения правильного и характеристического значений оператора Фредгольма, его собственной функции.

10. Определение геометрической кратности (ранга) характеристического значения.

11. Определение ядра, сопряженного к данному ядру. Определение ядра, союзного (транспонированного) с данным ядром.

12. Определение n-го итерированного ядра.

13. Определение функционального ряда Неймана.

14. Определение неподвижной точки отображения. Определение сжимающего отображения.

15. Определение резольвенты Фредгольма для линейного интегрального уравнения 2-го рода.

16. Определение вырожденного ядра.

17. Определение функции, истокообразно представимой через данное ядро.

18. Определение степенных рядов Фредгольма: определитель Фредгольма и первый минор Фредгольма.

19. Определение банахового и гильбертова пространств.

20. Определения линейного непрерывного оператора, линейного ограниченного оператора.

21. Определение нормы линейного непрерывного оператора.

22. Определение вполне непрерывного оператора.

23. Определение оператора, сопряженного к линейному непрерывному оператору в гильбертовом пространстве.

24. Определение самосопряженного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.

25. Определение регулярной сходимости функционального ряда.

26. Определения неотрицательного и положительно определённого линейного оператора.

27. Определение оператора дробного интегрирования (интеграл Римана-Лиувилля). Определение производной дробного порядка.

28. Определение корректности задачи решения интегрального уравнения.

29. Определение регуляризирующего оператора.

30. Определение ядра, непрерывного по данной переменной в целом.

31. Определение поверхности Ляпунова, кривой Ляпунова.

32. Определение поверхностного потенциала простого слоя.

33. Определение поверхностного потенциала двойного слоя.

34. Определение логарифмического потенциала простого слоя.

35. Определение логарифмического потенциала двойного слоя.

36. Теоремы Фредгольма для линейных интегральных уравнений 2-го рода.

37. Альтернатива Фредгольма для линейных интегральных уравнений 2-го рода.

38. Теорема о представлении n-го итерированного ядра.

39. Теорема о характеристическом значении и собственной функции n-го итерированного ядра.

40. Теорема о сходимости метода последовательных приближений для линейного интегрального уравнения 2-го рода с непрерывным ядром.

41. Теорема о сходимости метода последовательных приближений для линейного интегрального уравнения 2-го рода с фредгольмовым ядром.

42. Принцип сжимающих отображений.

43. Теорема о единственности резольвенты Фредгольма.

44. Теоремы Фредгольма для линейных операторных уравнений 2-го рода в конечномерном пространстве. Альтернатива Фредгольма в конечномерном пространстве.

45. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденными ядрами.

46. Теорема о представлении резольвенты Фредгольма непрерывного вырожденного ядра рациональной функцией параметра.

47. Теорема об аппроксимации непрерывного ядра вырожденным ядром.

48. Теоремы о сведении линейных интегральных уравнений 2-го рода с непрерывными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами, зависящими от параметра.

49. Доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывными ядрами.

50. Теорема о существовании резольвенты Фредгольма непрерывного ядра при всех правильных значениях параметра. Представление резольвенты Фредгольма отношением целых функций.

51. Теорема о представлении резольвенты Фредгольма непрерывного ядра, сопряженного к данному ядру.

52. Теорема о мероморфной зависимости резольвенты Фредгольма от параметра.

53. Теорема об интегральных уравнениях для резольвенты Фредгольма при правильных значениях параметра.

54. Теорема о представлении резольвенты Фредгольма рядом Тейлора в окрестности правильного значения параметра.

55. Теорема об определителе Фредгольма и первом миноре Фредгольма.

56. Теорема об интегральном операторе Вольтерры в пространстве непрерывных функций.

57. Теорема о представлении n-го итерированного ядра оператора Вольтерры.

58. Теорема о сходимости метода последовательных приближений для линейного интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода при всех значениях параметра.

59. Теорема об интегральном уравнении для резольвенты Фредгольма оператора Вольтерры.

60. Теорема о сведении задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения к интегральному уравнению Вольтерры 2-го рода.

61. Теорема о резольвенте уравнения Вольтерры с разностным ядром. Применение преобразования Лапласа для решения такого уравнения.

62. Теорема об ограниченности линейного непрерывного оператора.

63. Теорема о произведении ограниченного линейного оператора и вполне непрерывного линейного оператора.

64. Теорема об ограниченности сопряженного оператора в гильбертовом пространстве и о его норме.

65. Теорема о существовании характеристического значения вполне непрерывного самосопряженного линейного оператора в гильбертовом пространстве. Применение этой теоремы для интегрального оператора с самосопряженным ядром.

66. Необходимое и достаточное условие принадлежности некоторой функции нуль-множеству самосопряженного интегрального оператора с непрерывным ядром.

67. Теорема Гильберта-Шмидта.

68. Теорема о регулярной сходимости билинейного ряда для n-ой итерации самосопряженного непрерывного ядра при $n>1$.

69. Теорема о сходимости в среднем билинейного ряда для самосопряженного непрерывного ядра.

70. Формула Шмидта.

71. Представление резольвенты Фредгольма самосопряженного непрерывного ядра билинейным рядом.

72. Экстремальное свойство характеристического числа неотрицательного линейного оператора.

73. Свойства наименьшего по абсолютной величине характеристического числа положительного симметричного ядра.

74. Теорема Мерсера.

75. Эквивалентность задачи Штурма-Лиувилля интегральному уравнению 2-го рода с действительным симметричным ядром.

76. Теорема Стеклова.

77. Теорема Пикара.

78. Теорема единственности непрерывного решения уравнения Абеля и формула для этого решения.

79. Теорема об ограниченности интегрального оператора со слабой особенностью, действующего в пространстве квадратично интегрируемых функций. Оценка его нормы.

80. Оценка ядра произведения двух операторов со слабой особенностью. Теорема об ограниченности итераций ядра со слабой особенностью, начиная с некоторого их номера.

81. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений 2-го рода со слабой особенностью.

82. Теорема о непрерывности решения интегрального уравнения 2-го рода со слабой особенностью.

83. Теорема о скачке поверхностного потенциала двойного слоя. Теорема о скачке логарифмического потенциала двойного слоя.

84. Теорема о скачке нормальной производной поверхностного потенциала простого слоя. Теорема о скачке нормальной производной логарифмического потенциала простого слоя.

85. Теоремы о сведении внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости к интегральным уравнениям 2-го рода со слабой особенностью.

86. Теоремы о сведении внутренней и внешней задач Неймана для уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости к интегральным уравнениям 2-го рода со слабой особенностью.

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме зачет
В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:
Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету

1. Некоторые типы интегральных уравнений:
– линейные уравнения 1-го, 2-го, 3-го рода;
– примеры фредгольмовых и нефредгольмовых уравнений;
– система уравнений Фредгольма и её сведение к одному уравнению;
– уравнение Вольтерры 2-го рода;
– уравнение со слабой особенностью, фредгольмово уравнение со слабой особенностью, уравнение Абеля.
2. Некоторые типы интегральных уравнений:
– уравнения с разностными ядрами;
– задача обращения преобразования Фурье как уравнение 1-го рода;
– нагруженные интегральные уравнения;
– сингулярные уравнения в смысле Коши;
– нелинейные уравнения Урысона и Гаммерштейна.
3. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Правильные и характеристические значения интегрального оператора. Примеры задач о нахождении собственных функций и их решения. Сопряженные и союзные уравнения.
4. Формулировки теорем Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
5. Ядро произведения интегральных операторов. Итерированные ядра. Примеры нахождения итерированных ядер.
6. Свойства итерированных ядер.
7. Построение решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с непрерывным ядром методом последовательных приближений. Примеры.
8. Построение решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с фредгольмовым ядром методом последовательных приближений.
9. Резольвента Фредгольма непрерывного ядра. Единственность резольвенты Фредгольма. Примеры построения решений интегрального уравнения с помощью резольвенты Фредгольма.
10. Теоремы Фредгольма для линейного оператора, действующего в конечномерном пространстве.
11. Доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденными непрерывными ядрами. Резольвента Фредгольма вырожденного непрерывного ядра.
12. Сведение уравнений 2-го рода с произвольными непрерывными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами, зависящими от параметра.
13. Доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с произвольными непрерывными ядрами.
14. Доказательство существования резольвенты Фредгольма непрерывного ядра при всех правильных значениях параметра.
15. Свойства резольвенты Фредгольма непрерывного ядра.
16. Ряды Фредгольма. Представление резольвенты непрерывного ядра отношением первого минора Фредгольма и определителя Фредгольма.
17. Оператор Вольтерры с ядром, непрерывным в треугольнике. Непрерывность образа непрерывной функции. Свойства итераций ядра оператора Вольтерры.

18. Построение решения интегрального уравнения Вольтерры второго рода с ядром, непрерывным в треугольнике, методом последовательных приближений. Резольвента Фредгольма оператора Вольтерры. Свойство продолжаемости решения.
19. Неинтегрируемые решения уравнения Вольтерры с ядром, непрерывным в треугольнике (пример Урысона) .
20. Случай сведения интегрального уравнения Вольтерры первого рода к уравнению второго рода. Сведение интегрального уравнения Вольтерры второго рода к уравнению первого рода.
21. Уравнение Вольтерры второго рода с непрерывным в треугольнике вырожденным ядром.
22. Сведение задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка к линейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода.
23. Применение преобразования Лапласа для построения решения уравнения Вольтерры второго рода с непрерывным ядром, зависящим от разности аргументов. Примеры.
24. Линейные ограниченные операторы в бесконечномерных нормированных пространствах. Норма линейного ограниченного оператора. Примеры ограниченных и неограниченных линейных операторов.
25. Вполне непрерывные линейные операторы и их простейшие свойства. Примеры вполне непрерывных интегральных операторов.
26. Оператор, сопряженный к линейному непрерывному оператору, действующему в гильбертовом пространстве. Норма сопряженного оператора.
27. Самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, и его основные свойства.
28. Доказательство существования характеристического значения у ненулевого вполне непрерывного самосопряженного линейного оператора, действующего в гильбертовом пространстве. Контрпримеры.
29. Основные свойства интегрального оператора Фредгольма с самосопряженным ядром. Характеристические значения и собственные функции самосопряженного ядра.
30. Свойства непрерывного самосопряженного ядра. Необходимое и достаточное условие конечности множества его характеристических чисел. Собственные функции, соответствующие равному нулю собственному значению. Пример непрерывного самосопряженного ядра, имеющего равное нулю собственное значение бесконечной геометрической кратности.
31. Теорема Гильберта – Шмидта.
32. Представление итераций ненулевого непрерывного самосопряженного невырожденного ядра билинейными рядами. Билинейный ряд ненулевого непрерывного самосопряженного невырожденного ядра.
33. Построение решения неоднородного интегрального уравнения второго рода с непрерывным самосопряженным ядром по формуле Шмидта.
34. Построение резольвенты Фредгольма самосопряженного непрерывного ядра с помощью формулы Шмидта и ее билинейный ряд.
35. Необходимое и достаточное условие самосопряженности линейного оператора. Неотрицательные и положительно определённые линейные операторы. Экстремальное свойство характеристического значения и собственной функции неотрицательного самосопряженного интегрального оператора с непрерывным ядром.
36. Положительное симметричное непрерывное ядро. Свойства наименьшего по модулю характеристического числа такого ядра и отвечающей ему собственной функции.
37. Теорема Мерсера.
38. Самосопряжённые краевые задачи на собственные значения для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сведение их к интегральным уравнениям. Примеры.
39. Задача Штурма-Лиувилля. Сведение её к интегральному уравнению. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.
40. Теорема Стеклова.
41. Линейное интегральное уравнение первого рода с фредгольмовым самосопряженным ядром. Теорема Пикара.
42. Задача Абеля. Задача о таутохроне.

43. Теорема единственности непрерывного решения уравнения Абеля и формула его обращения.
44. Уравнения типа Абеля. Теорема единственности непрерывного решения и формула для этого решения.
45. Операторы дробного интегрирования и дробного дифференцирования.
46. Понятие корректности задачи решения интегрального уравнения. Пример корректной задачи: интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Пример некорректной задачи: интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с приближенно заданной правой частью. Понятие регуляризирующего оператора.
47. Интегральный оператор со слабой особенностью в случае нескольких независимых переменных. Случай фредгольмова оператора со слабой особенностью. Ограниченность оператора со слабой особенностью в пространстве квадратично интегрируемых функций, оценка его нормы.
48. Оценка ядра произведения двух операторов со слабой особенностью. Ограниченность итераций ядра со слабой особенностью, начиная с некоторого их номера.
49. Доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений со слабой особенностью.
50. Ядро, непрерывное в целом. Ограниченность и непрерывность решений интегрального уравнения со слабой особенностью.
51. Сведение внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости к интегральным уравнениям 2-го рода со слабой особенностью.

Сведение внутренней и внешней задач Неймана для уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости к интегральным уравнениям 2-го рода со слабой особенностью.

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных средств	**2 (не зачтено)**	**3 (зачтено)**	**4 (зачтено)**	**5 (зачтено)**
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач