Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной математики и кибернетики
_______________ /И.А. Соколов /
«27» сентября 2023г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине
Методы оптимизации

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Направление подготовки / специальность:
02.03.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:
Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:
очная

Рассмотрен и утвержден
на заседании Ученого совета факультета ВМК
(протокол №7, от 27 сентября 2023 года)

Москва 2023

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-3. Способен к разработке алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования, математических, информационных и имитационных моделей, созданию информационных ресурсов глобальных сетей, образовательного контента, прикладных баз данных, тестов и средств тестирования систем и средств на соответствие стандартам и исходным требованиям	ОПК-3.1 – Разрабатывает алгоритмические и программные решения в области системного и прикладного программирования, математических, информационных и имитационных моделей ОПК-3.2 – Создает информационные ресурсы глобальных сетей, образовательный контент, прикладные базы данных ОПК-3.3. Применяет тесты и средства тестирования систем и средств на соответствие стандартам и исходным требованиям	Знать: формулировки теорем существования оптимальных решений задач минимизации в гильбертовых пространствах; определение дифференцируемости отображений, действующих в нормированных пространствах и основные свойства производной; определения свойств выпуклости, сильной выпуклости, способы их проверки и роль этих свойств в задачах минимизации; формулировки условий оптимальности в форме Ферма, форме вариационного неравенства и в проекционной форме; конструкцию основных итерационных оптимизационных процессов: метода градиентного спуска, сопряжённых направлений, Ньютона, покоординатного спуска, симплекс-метода и условия сходимости этих методов; правило множителей Лагранжа для задач условной минимизации, определение двойственной задачи на максимум, а также связь между исходной и двойственной задачами; принцип максимума Понтрягина для задачи

		оптимального управления без фазовых ограничений; 8метод регуляризации Тихонова для задач минимизации с неточными данными. Уметь: исследовать поставленные оптимизационные задачи на разрешимость с помощью соответствующих теорем Вейерштрасса, проверять свойства (слабой) компактности, (слабой) полунепрерывности и (сильной) выпуклости; вычислять производные, в том числе производные квадратичных функционалов, определённых на решениях линейных дифференциальных и разностных уравнений; выписывать необходимые условия оптимальности в форме Ферма, вариационного неравенства и в проекционной форме, использовать эти условия для анализа поставленной задачи и определять, являются ли эти условия достаточными для оптимальности; выбирать для численного решения поставленной задачи минимизации подходящие итерационные методы; выписывать для задач условной минимизации необходимые условия оптимальности в форме Лагранжа или Куна-Таккера и применять их для аналитического или численного решения; ставить и анализировать двойственную задачу по отношению к исходной задаче минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств;

		применять принцип максимума Понтрягина для исследования и решения простейших задач оптимального управления; применять метод регуляризации Тихонова, согласовывая выбор значения параметра регуляризации с известными уровнями погрешностей. Владеть: арсеналом базовых итерационных вычислительных алгоритмов решения задач оптимизации и навыками выбора метода, подходящего для решения конкретной задачи, а также навыками адаптации имеющихся алгоритмов к особенностям заданной постановки. навыками оценивания оптимизационных задач на предмет корректности их постановки и навыками внесения необходимых изменений в саму постановку задачи с целью её регуляризации: изменение пространства переменных, допустимого множества и функционала.

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

контрольная работа

Образец заданий контрольной работы **№ 1** по теме **Математический аппарат**

1. Покажите, что билинейная форма

$$B(f,g)=\int_0^T\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)dt$$

является скалярным произведением в пространстве $L^2(0,T)$. Будет ли пространство $L^2(0,T)$ полным относительно метрики, порождаемым этим скалярным произведением?

2. Докажите, что множество $U = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} x_n^2 \le 1\}$ является выпуклым и замкнутым в пространстве l^2. Будет ли это множество ограниченным? компактным? слабо компактным?

3. Найдите первую и вторую производные в пространстве $L^2(0,T)$ интегрального функционала
$$J(u) = \int_0^T \left(\int_0^t u(s)ds \right)^4 dt\,.$$
Опишите действие сопряженного оператора $(J''(u))^*$. Является ли функционал $J(u)$ выпуклым? сильно выпуклым? слабо полунепрерывным снизу? слабо непрерывным?

4. В пространстве $L^2(0,1)$ поставлена задача минимизации с ограничениями:
$$J(u) = \int_0^1 \big(x^2(t) - u^2(t)\big)dt \to inf,\ \ x'(t) = u(t),\ \ 0 < t < 1,\ \ x(0) = 0,$$
$$u \in U = \{u(t) \in L^2(0,1) \mid |u(t)| \le 1 \text{ п. в. на } (0,1)\}\,.$$
Найдите нижнюю грань функционала J_* и выясните, достигается ли она на множестве U.

5. В пространстве l^2 найдите проекции двух точек A =(-6,2,-2,0,0,…,0,…) и B =(6,3,6,0,0,…,0,…) на множество
$$U = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l^2 \mid ||x||_{l^2} \le 3,\ x_1 + x_2 \ge 0\}\,.$$

6. В пространстве $L^2(0,T)$ укажите правило вычисления проекций на множество
$$U = \left\{ \left| \int_0^T u(t)dt \right| \le 1 \right\}.$$

Образец заданий контрольной работы **№ 2** по теме **Методы оптимизации**

1. Задача минимизации в бесконечномерном гильбертовом пространстве H
$$J(u) = \langle f,u\rangle^2 + 2\,\langle g,u\rangle^2 + \|u - \langle f,u\rangle f - \langle g,u\rangle g\|^2 \to inf, \qquad \langle g,u\rangle \ge 1,$$
где $f, g \in H$, $\|f\| = \|g\| = 1$, $\langle f,u\rangle = 0$, решается **методом проекции градиента** с постоянным шагом $\alpha = \frac{1}{2}$. Процесс начинается в точке $u_0 = -2f + g$. Найдите следующие приближения. Остановите итерации при первом попадании во множество оптимальных решений.

2. Задача минимизации без ограничений
$$J(u) = x^2 + y^2 + z^2 + xz - 2y + 3z \to inf,\ \ u = (x,y,z) \in R^3,$$
решается **методом сопряженных направлений (градиентов)**. В качестве начального приближения выбрано $u_0 = (0,1,0)$. Постройте следующие приближения. На каждой итерации выпишите очередные приближения u_k, направления p_k и коэффициенты α_k, β_k, $k = 0,1,\dots$ При каком k процесс остановится в точке минимума u_*? Предъявите найденное $u_k = u_*$ и соответствующее оптимальное значение функции $J_* = J(u_*)$.

3. С помощью симплекс-метода решите каноническую задачу линейного программирования в R^4 :
$$J(u) = \langle c,u\rangle \to inf,\ \ Au = b,\ \ u \ge 0,\ \ u = (u_1, u_2, u_3, u_4),$$

$$c = (-2,-1,-3,-1),\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве начального приближения возьмите точку $v_0 = (0,0,1,1)$.

4. С помощью правила множителей Лагранжа решите задачу минимизации линейного функционала на пересечении сферы и гиперплоскости в гильбертовом пространстве H :

$$J(u) = \langle c, u\rangle \to inf, \quad u \in U = \{u \in H \mid \|u\|^2 = 1, \langle a, u\rangle = 0\}$$

при условии линейной независимости векторов c и a. Укажите найденную нижнюю грань J_*, оптимальные элементы $u_* \in U_*$ и множители Лагранжа λ_0^*, λ_1^* и λ_2^*.

5. В бесконечномерном гильбертовом пространстве H поставлена задача минимизации с ограничением:

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \to inf, \quad u \in U = \{u \in H \mid 2\ \langle a, u\rangle + \langle b, u\rangle \ge 5\}$$

где $a, b \in H$, $\|a\| = \|b\| = 1$, $\langle a, b\rangle = 0$. Постройте двойственную задачу, найдите ее оптимальное решение λ^* и соответствующее максимальное значение $\psi = \psi(\lambda^*)$.

6. Пусть u_* - нормальное решение следующей задачи минимизации в гильбертовом пространстве H :

$$J(u) = (\langle c, u\rangle + 2)^2 \to inf, \quad u \in H,$$

где $c \in H$, $\|c\| = 1$. Эта задача решается методом регуляризации Тихонова в условиях, когда вместо точного вектора c известно некоторое его приближение $\tilde{c} \in H$, $\|\tilde{c}\| = 1$, $\|\tilde{c} - c\| \le \delta$. Найдите u_*, экстремаль (точку глобального минимума) $\tilde{u}$ функционала Тихонова $T_\alpha(u) = \tilde{J}(u) + \alpha\|u\|^2$ и оцените через δ относительную погрешность $\frac{\|\tilde{u} - u_*\|}{\|u_*\|}$ метода регуляризации в случае, когда параметр $\alpha = \delta$.

7.2. Типовые **письменные** контрольные задания **повышенной сложности**, проводимые лектором и предназначенные для проверки состоятельности претензий студентов на итоговую оценку **«отлично»**. Подобное задание может быть выдано также и после окончания устного экзамена студентам, желающим повысить уже достигнутый ими результат.

Вариант 1. Пусть $y = y(t, x; u)$ - решение следующей начально-краевой задачи для параболического уравнения, отвечающее граничному управлению $u = u(t) \in L^2(0, T)$:

$$y_t = y_{xx}, \quad 0 < t < T,\ \ 0 < x < l,$$
$$y\,|_{x=0} = u(t), \quad 0 < t < \frac{T}{2}, \quad -\,y_x\,|_{x=0} = u(t), \quad \frac{T}{2} < t < T,$$
$$y_x\,|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T,$$
$$y\,|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l.$$

Найдите первую производную $J'(u)$ квадратичного функционала

$$J(u) = \int_0^l |y(T, x; u) - f(x)|^2\, dx$$

где $f(x) \in L^2(0, l)$- заданная функция. Для этого приведите функционал к стандартному виду $J(u) = \|Au - f\|^2$, воспользуйтесь известным результатом $J'(u) = 2A^*(Au - f)$ и определите правила действия взаимно сопряженных операторов A и A^*.

Вариант 2. Оператор A преобразует функции $u(x) \in L^2(0, l)$ в функции

$$(Au)(x, y) = u(x - y) \in L^2(Q)$$

двух переменных (x, y), определенные в параллелограмме

$$Q = \{0 \le y \le l,\ \ y \le x \le y + l\}.$$

В пространстве $L^2(Q)$ найдите проекцию функции $f(x, y) = 6xy$ на область значений $\operatorname{Im} A$ оператора A.

Вариант 3. В бесконечномерном гильбертовом пространстве H поставлена задача минимизации с одним ограничением типа равенства:

$$J(u) = 3(\langle a, u\rangle - 5)^2 + 2(\langle b, u\rangle + 2)^2 \ \to inf, \qquad \|u - \langle b, u\rangle b\|^2 = 1,$$

где $a, b \in H,\ \|a\| = \|b\| = 1,\ \langle a, b\rangle = 0$. Решите задачу с помощью правила множителей Лагранжа, т.е. найдите нижнюю грань J_* и множество оптимальных решений U_*. Представьте объяснения по поводу регулярности задачи ($\lambda_0 = 1$) и оптимальности найденных вами решений.

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме зачета
В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:
Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету

1. Метрический вариант теоремы Вейерштрасса для полунепрерывных снизу функционалов. Недостаточность условий ограниченности и замкнутости множества в бесконечномерном пространстве.
2. Вариант теоремы Вейерштрасса для слабо полунепрерывных снизу функционалов. Достаточные условия слабой полунепрерывности снизу и слабой компактности. Соотношения между свойствами компактности и слабой компактности, полунепрерывности и слабой полунепрерывности.
3. Слабая полунепрерывность снизу квадратичного функционала. Слабая компактность невырожденного эллипсоида в гильбертовом пространстве и «параллелепипеда» в пространстве $L^2(a,b)$.
4. Существование оптимального управления в линейной динамической системе с терминальным и интегральным квадратичными функционалами.
5. Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах. Первая и вторая производные квадратичного функционала. Теорема о производной сложной функции. Формула конечных приращений.
6. Первые производные терминального и интегрального квадратичных функционалов на решениях линейной динамической системы.
7. Первые производные квадратичных функционалов на решениях линейной дискретной системы.
8. Первые производные терминального и интегрального квадратичных функционалов на решениях уравнения теплопроводности.
9. Выпуклые функции. Теорема о локальном минимуме. Критерии выпуклости для функций, имеющих первые и вторые производные.
10. Сильно выпуклые функции. Критерии сильной выпуклости для функций, имеющих первые и вторые производные. Условия сильной выпуклости квадратичного функционала.
11. Вариант теоремы Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов. Условие оптимальности для дифференцируемого функционала в форме вариационного неравенства.
12. Проекция точки на множество. Существование и единственность проекции на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Характеризация проекции вариационным неравенством. Свойство нестрогой сжимаемости оператора проектирования. Проекционная форма критерия оптимальности.
13. Метод скорейшего спуска. Оценка скорости сходимости для сильно выпуклых функций.
14. Явные расчетные формулы для шага метода скорейшего спуска в случае квадратичных функционалов. Непрерывный аналог метода и оценка скорости его сходимости для сильно выпуклых функций.
15. Метод проекции градиента. Оценка скорости сходимости метода проекции градиента с постоянным шагом для сильно выпуклых функций. Непрерывный аналог метода.
16. Метод условного градиента. Оценка скорости сходимости для сильно выпуклых функций.
17. Классический метод Ньютона с шагом $\alpha_k = 1$. Оценка скорости локальной сходимости для сильно выпуклых функций. Глобально сходящийся вариант метода с регулировкой шага α_k.

18. Метод сопряженных направлений в R^n для квадратичных сильно выпуклых функционалов; сходимость за конечное число шагов. Реализация метода в случае функционалов общего вида.
19. Метод покоординатного спуска в R^n. Сходимость для выпуклых дифференцируемых функций. Существенность условия дифференцируемости.
20. Каноническая задача линейного программирования; её эквивалентность общей задаче линейного программирования. Критерий угловой точки для канонической задачи.
21. Симплекс-метод для канонической задачи линейного программирования.
22. Метод штрафных функций для задач минимизации с ограничениями вида
$$u \in U_0 \subset H,\ g_1(u) \le 0, \dots, g_m(u) \le 0, g_{m+1}(u) = 0, \dots, g_{m+s}(u) = 0.$$
Сходимость для слабо полунепрерывных снизу функционалов.
23. Правило множителей Лагранжа для выпуклых задач минимизации с ограничениями вида
$$u \in U_0, \qquad g_1(u) \le 0, \dots, g_m(u) \le 0.$$
Достаточное условие регулярности Слейтера.
24. Теорема Куна-Таккера о седловой точке функции Лагранжа для выпуклых задач минимизации с ограничениями вида
$$u \in U_0, \qquad g_1(u) \le 0, \dots, g_m(u) \le 0.$$
Пример нерегулярной задачи.
25. Правило множителей Лагранжа для гладких задач минимизации с ограничениями вида
$$g_1(u) \le 0, \dots, g_m(u) \le 0, \quad G(u)=(\ g_{m+1}(u) = 0, \dots, g_{m+s}(u)) = 0.$$
Достаточные условия регулярности.
26. Условия, при которых необходимые для оптимальности соотношения в форме правила множителей Лагранжа в гладких задачах минимизации с ограничениями вида
$$g_1(u) \le 0, \dots, g_m(u) \le 0, \quad G(u)=(\ g_{m+1}(u) = 0, \dots, g_{m+s}(u)) = 0,$$
оказываются достаточными для оптимальности. Теорема Люстерника.
27. Двойственные экстремальные задачи. Теорема о свойствах решений двойственных задач и примеры к этой теореме.
28. Простейшая нелинейная задача оптимального управления со свободным правым концом. Формула приращения функционала с оценкой остаточных членов в $L^1(t_0, T)$. Принцип максимума Понтрягина.
29. Простейшая нелинейная задача оптимального управления со свободным правым концом. Формула приращения функционала с оценкой остаточных членов в $L^2(t_0, T)$. Градиент функционала. Линеаризованный принцип максимума.
30. Некорректно поставленные задачи минимизации. Метод регуляризации Тихонова.

Задачи к зачету

) В конечномерном пространстве R^n поставлена задача минимизации без ограничений
$$J(u) \to \inf, \qquad u \in R^n. \tag{1}$$

Найдите первую производную $J'(u)$ и вторую производную $J''(u)$. Исследуйте функцию $J(u)$ на выпуклость и сильную выпуклость. Найдите нижнюю грань функции J_*, множество оптимальных решений U_* и оптимальное решение $u_* \in U_*$ с минимальной нормой.

2) Примените к задаче минимизации функции (1) метод скорейшего спуска из заданной начальной точки u_0. Найдите градиент $J'(u_0)$, шаг спуска
$$\alpha_0 = arg \min_{\alpha \ge 0} J(u_0 - \propto J'(u_0)),$$
следующее приближение $u_1 = u_0 - \propto_0 J'(u_0)$ и соответствующее ему значение функции $J(u_1)$. Определите, будет ли u_1 оптимальным решением задачи (1).

3) В пространстве R^n задано множество

$$U = \{u \in R^n \mid g(u) \leq 0\}. \qquad (3)$$

Исследуйте множество U на выпуклость, замкнутость, ограниченность и компактность. Покажите, что задача минимизации функции $J(u)$ с ограничением (3) регулярна и решите ее с помощью правила множителей Лагранжа, взяв (в силу регулярности) $\lambda_0 = 1$. Найдите нижнюю грань функции J_*, множество оптимальных решений U_* и значение множителя Лагранжа λ^*, отвечающего за ограничение (3).

4) Поставьте двойственную к (1), (3) задачу максимизации

$$\psi(\lambda) \to \sup, \qquad \lambda \in \Lambda. \qquad (4)$$

Приведите явные выражения для функции $\psi(\lambda)$ и множества Λ. Найдите верхнюю грань $\psi^* = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \psi(\lambda)$ и множество оптимальных решений Λ^* двойственной задачи (4).

Пример билета:

1. Слабая полунепрерывность снизу квадратичного функционала. Слабая компактность невырожденного эллипсоида в гильбертовом пространстве и «параллелепипеда» в пространстве $L^2(a,b)$.
2. Примените к задаче минимизации функции (1) метод скорейшего спуска из заданной начальной точки u_0. Найдите градиент $J'(u_0)$, шаг спуска

$$\alpha_0 = arg \min_{\alpha \geq 0} J(u_0 - \alpha J'(u_0)),$$

следующее приближение $u_1 = u_0 - \alpha_0 J'(u_0)$ и соответствующее ему значение функции $J(u_1)$. Определите, будет ли u_1 оптимальным решением задачи (1).

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных средств	**2 (не зачтено)**	**3 (зачтено)**	**4 (зачтено)**	**5 (зачтено)**
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач