

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной
математики и кибернетики

И.А. Соколов
«27» сентября 2023г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Численные методы линейной алгебры

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

02.03.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден

на заседании Ученого совета факультета ВМК

(протокол №7, от 27 сентября 2023 года)

Москва 2023

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	Индикатор (показатель) достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций
ОПК-2. Способен применять компьютерные/суперкомпьютерные методы, современное программное обеспечение, в том числе отечественного происхождения, для решения задач профессиональной деятельности	ОПК-2.1. Выбирает компьютерные/суперкомпьютерные методы для решения задач профессиональной деятельности; ОПК-2.2. Использует современное программное обеспечение, в том числе отечественного происхождения, для решения задач профессиональной деятельности	Знать: 1. основные прямые методы решения совместных систем линейных алгебраических уравнений; 2. основные итерационные методы, используемые для специальных классов линейных алгебраических уравнений; 3. основные методы компьютерного решения задач на собственные значения матриц; наиболее широко используемые методы решения нелинейных уравнений и систем. Уметь: 1. применять на практике подходящие прямые методы решения совместных систем линейных уравнений; 2. находить среди известных и применять для решения соответствующих классов линейных систем наиболее подходящие

		итерационные методы; 3. решать задачи на собственные значения и нелинейные уравнения и системы.
--	--	--

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

решение индивидуальных заданий

Примеры заданий

1. Доказать, что произведение нижних треугольных матриц есть нижняя треугольная матрица.
2. Доказать, что обратная к невырожденной нижней треугольной матрице есть нижняя треугольная матрица.
3. Доказать, что произведение верхних треугольных матриц есть верхняя треугольная матрица.
4. Доказать, что для построения разложения Холецкого требуется

$$Q = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

операций умножения, деления и извлечения корня.

5. Вывести формулы для вычисления элементов матриц из LDL^T -разложения матрицы $A = A^T$ при условии, что $l_{jj} = 1, j = 1, \dots, n$, а $D = \text{diag}(d_j)$.
6. Пусть A – невырожденная трехдиагональная матрица. Какова трудоемкость вычисления A^{-1} ?
7. Вывести формулы для вычисления элементов матрицы, получающейся из матрицы A после обращения в нуль всех элементов первого столбца, за исключением первого, методом вращений.
8. Доказать, что для построения QR -факторизации матрицы A при помощи метода вращений требуется $\approx \frac{4}{3}n^3$ действий умножения.
9. Доказать, что для построения LU -факторизации матрицы с полушириной ленты p требуется

$$Q = \frac{p(p+1)}{3}(3n - 2p - 1)$$

операций умножения и деления.

10. Доказать, что матрица перестановок является ортогональной.
11. Вывести формулы для элементов матриц L и U из треугольного разложения $A = LU$ если
 - а) $\text{diag } L = 1$,
 - б) $\text{diag } U = 1$.
12. Вывести формулы прямой и обратной подстановок.
13. Вывести формулы для элементов множителя Холецкого, если $A = A^T = LL^T > 0$. Выписать формулы прямой и обратной подстановок.

14. Найти треугольное разложение матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Найти множители Холецкого следующих матриц

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 10 \\ 3 & 10 & 16 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 10 & -2 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

16. Построить матрицу отражений, переводящую вектор $y = [3 \ 4]^T$ в вектор, коллинеарный вектору $x = [1 \ 0]^T$.

17. Построить матрицу отражений, переводящую вектор $y = [\sin \varphi \ \cos \varphi]^T$ (при $\varphi \in (\pi, 2\pi)$) в вектор, коллинеарный вектору $x = [1 \ 0]^T$.

18. Построить матрицу отражений, переводящую вектор y в вектор, коллинеарный x ,
 $y = [0 \ 0 \ 1]^T$, $x = [1 \ 0 \ 0]^T$.

19. Построить такую матрицу вращений T , что $T A = R$, где R - верхняя треугольная матрица,
а $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

20. Доказать, что

а) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$,

б) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$,

в) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$,

Привести примеры векторов x , на которых достигаются соответствующие равенства.

21. Доказать, что если $A = A^T > 0$, то $\sqrt{(Ax, x)}$ можно принять за норму вектора x . Найти постоянные эквивалентности в соотношениях, связывающих эту норму с $\|\cdot\|_2$.

22. Найти квадратный корень из матрицы A , если $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

23. Пусть $a_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$. Методом простых итераций решить систему

$$a_1 x_1 = b_1,$$

$$a_2 x_2 = b_2.$$

При каких ограничениях на τ метод сходится? При каком τ сходимость наилучшая? Существенно ли предположение $a_i > 0$?

24. Найти оптимальное значение итерационного параметра в методе простых итераций при решении системы с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

25. При каких α и β сходится метод простых итераций, если

$$B = (I - \tau A) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} ?$$

26. Степенным методом найти k -е приближение к максимальному по модулю собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

27. Степенным методом найти k -е приближение к максимальному по модулю собственному значению и соответствующему нормированному собственному вектору матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме экзамена

В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:

Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

Вопросы экзамену

1. Метод исключения Гаусса.
2. Треугольное разложение матрицы.
3. LU -разложение матрицы.
4. Метод Холецкого.
5. Метод вращений Гивенса.
6. Метод отражений Хаусхолдера.
7. Ленточный вариант треугольного разложения.
8. Метод блочного исключения.
9. Метод Гаусса с выбором главного элемента.
10. Метод простых итераций для линейных систем.
11. Чебышевский итерационный метод.
12. Метод наискорейшего спуска.
13. Метод сопряженных градиентов.
14. Метод сопряженных градиентов с предобуславливателем.
15. Степенной метод.
16. Метод обратных итераций.
17. Итерации с отношением Рэлея.
18. QR -алгоритм.
19. Метод одновременных (ортогональных) итераций.
20. QR -алгоритм со сдвигом.
21. Метод деления отрезка пополам.
22. Метод простых итераций для нелинейных уравнений.
23. Метод Ньютона.
24. Метод секущих.

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка	2 (не зачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
виды оценочных средств				
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности не принципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач