Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной математики и кибернетики

______________/И.А. Соколов /
«27» сентября 2022г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Теория игр и исследование операций

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден
на заседании Ученого совета факультета ВМК
(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 - Знает математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности ОПК-3.2 - Умеет применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	**Знать:** 1. методологию вывода и анализа моделей исследования операций; 2. основные виды игровых постановок и задач принятия решений и методы их анализа; 3. теорию антагонистических игр и методы их решения; 4. основы теории игр многих лиц и построение равновесий по Нэшу; 5. основы теории иерархических игр двух лиц; 6. метод решения задач многокритериальной оптимизации 7. методы решения задач оптимального распределения ресурсов **Уметь:** 1. формулировать игровые модели, включающие ограничения на стратегии и задание функций выигрыша игроков; 2. находить максиминные и минимаксные стратегии, верхнее и нижнее значение игры; 3. находить равновесия с помощью построения функций наилучших ответов; 4. находить решение матричной игры сведением к задаче линейного программирования; 5. находить решение иерархических игр и равновесие по Штакельбергу;

		6. находить оптимальные распределения ресурсов в дискретных и непрерывных задачах. **Владеть:** 1. основными алгоритмами решения антагонистических и их компьютерной реализации; 2. навыками решения задач многокритериальной оптимизации с использованием эксперной информации о сравнительной важности или равноценности критериев; 3. навыками использования необходимых и достаточных условия для исследования моделей теории игр и исследования операций.

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

контрольная работа

Контрольная работа	
Вариант 1	Вариант 2
1. Найдите нижнее и верхнее значение, все максиминные и минимаксные стратегии, а также все седловые точки (если существуют) матрицы $A=\begin{pmatrix}5&2&3&8&3&1&5\\5&9&6&6&5&5&5\\9&4&4&3&0&5&0\\0&5&3&0&3&4&0\\9&5&9&8&5&5&5\end{pmatrix}$. 2. Найдите значение иг ры v и все оптимальные стратегии игроков в следующей игре с полной информацией: сначала первый игрок выбирает номер a множества строк $M_a, a=1,2,$ матрицы A, где $M_1=\{1,3\}, M_2=\{2,4\}$. Затем второй игрок, зная	1. Найдите наилучший гарантированный результат F_1 и все оптимальные стратегии иерархической игры Γ_1 для биматричной игры Γ: $A=\begin{pmatrix}5&1&6&1&3\\7&8&2&4&6\\5&2&0&3&5\\7&2&2&2&8\\3&9&4&0&9\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&8&0&2\\3&3&4&0&7\\7&0&5&8&3\\8&6&8&3&2\\6&4&8&4&4\end{pmatrix}$ 2. Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры: $A=\begin{pmatrix}7&4&5&3\\7&5&6&4\\8&3&5&3\\3&6&4&8\end{pmatrix}$

выбор a первого, выбирает номер j столбца матрицы A, а потом первый игрок, зная предыдущие выборы a и j, выбирает номер i строки в множестве M_a. Выигрыш первого игрока определяется по матрице $$A=\begin{pmatrix}6&9&5&3\\4&7&6&4\\7&1&5&3\\5&5&4&8\end{pmatrix}.$$ 3. Решите игру Γ_2 для биматричной игры Γ: $$A=\begin{pmatrix}5&1&6&1&3\\7&8&2&4&6\\5&2&0&3&5\\7&2&2&2&8\\3&9&4&0&9\end{pmatrix}.B=\begin{pmatrix}1&0&8&0&2\\3&3&4&0&7\\7&0&5&8&3\\8&6&8&3&2\\6&4&8&4&4\end{pmatrix}$$	3. Найдите минимакс и минимаксную стратегию игры на прямоугольнике: $F(x,y)=-x^2-xy+2y^2+y,\ X=[-1,1], Y=[-2,1].$

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме экзамена
В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:
Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену.

1. Определение антагонистической игры и ее решения.
2. Теорема о необходимом и достаточном условии существования седловой точки. Метод поиска седловых точек.
3. Условия существования максиминных и минимаксных стратегий.
4. Теорема существования седловой точки у вогнуто-выпуклой функции.
5. Смешанное расширение антагонистической игры.
6. Основная теорема матричных игр.
7. Основная теорема непрерывных игр.
8. Свойства решений антагонистических игр в смешанных стратегиях.
9. Теоремы о доминировании строк и столбцов в матричных играх.
10. Графический метод решения матричных игр вида 2xn и mx2.
11. Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.
12. Решение антагонистических игр с вогнутыми (выпуклыми) функциями выигрыша.
13. Исследование модели «нападение-оборона» в чистых стратегиях.
14. Исследование модели «нападение-оборона» в смешанных стратегиях.
15. Исследование модели шумной дуэли.
16. Определение многошаговой антагонистической игры с полной информацией.
17. Теорема Цермело о решении многошаговой игры с полной информацией.
18. Ситуация равновесия игры многих лиц и ее недостатки.
19. Теорема существования ситуаций равновесия для игры многих лиц.
20. Метод поиска ситуаций равновесия с использованием функций наилучших ответов.
21. Свойства ситуаций равновесия в смешанных стратегиях биматричных игр.
22. Метод решения биматричных игр в смешанных стратегиях.
23. Решение игры Γ_1. Равновесие по Штакельбергу.
24. Теорема Гермейера о решении игры Γ_2.
25. Задача многокритериальной оптимизации и условия существования оптимальных по Парето стратегий.
26. Представление множества оптимальных по Слейтеру стратегий с использованием свертки типа «минимум».
27. Алгоритм поиска на конечном множестве оптимальных по Парето стратегий.
28. Необходимые и достаточные условия для оптимальных по Слейтеру стратегий в выпуклой многокритериальной задаче.
29. Задача принятия решения при наличии бинарного отношения.
30. Метод сужения множества оптимальных по Парето стратегий на основе информации о сравнительной важности или равноценности критериев.
31. Задача сужения множества оптимальных по Парето стратегий для равноценных критериев.
32. Математическая модель операции.
33. Оценка эффективности стратегии (в том числе смешанной) в операции.
34. Вид наилучшего гарантированного результата в случае, когда во множестве стратегий существуют абсолютно-оптимальные стратегии.
35. Теорема о производной по направлению функции минимума и вытекающее из нее необходимое условие для максиминной стратегии.
36. Необходимые условия оптимальности для максиминной стратегии из отрезка и следствия.

37. Принцип уравнивания Гермейера.
38. Условия оптимальности и алгоритм для задачи дискретного максимина.
39. Лемма Гиббса. Задача поиска объекта.
40. Критерий Гросса и алгоритм для задачи выпуклого целочисленного программирования.

Типовые задачи для экзамена.

1. Выяснить, имеет ли матрица $A=\begin{pmatrix}6&2&2&3&4&5\\4&2&1&3&3&4\\5&3&2&2&3&5\end{pmatrix}$ седловую точку. Если да, то найти все седловые точки.
2. Может ли матрица размера 3x3 иметь ровно 7 седловых точек ?
3. Имеет ли функция $F(x,y)= -2x^2+xy+3y^2 +3x-y$ на единичном квадрате седловую точку? Если да, то найти все седловые точки.
4. Найти максимин и максиминные стратегии для функции. $F(x,y)=2x^2-5xy+2y^2$ на квадрате $[0,1]x[0,1]$.
5. В задаче 4 найти минимакс и минимаксные стратегии второго игрока.
6. Пусть (x^1,y^1) и (x^2,y^2) - две седловые точки функции $F(x,y)$. Будут ли пары (x^1,y^2) и (x^2,y^1) также седловыми точками этой функции ?
7. Решить матричную игру с матрицей $A=\begin{pmatrix}4&4&2&1&5&6\\5&3&2&1&0&2\\8&3&2&3&0&2\end{pmatrix}$.
8. Решить матричную игру с матрицей, транспонированной к матрице предыдущей задачи.
9. Решить матричную игру с матрицей $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$.
10. Свести матричную игру $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&4&-1\end{pmatrix}$ к паре двойственных задач линейного программирования.
11. Найти все оптимальные стратегии первого игрока в игре с матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\4&2&1\end{pmatrix}.$$

12. Найти все ситуации равновесия в чистых стратегиях биматричной игры

$$A=\begin{pmatrix}4&5&3&7&2&1\\3&2&7&5&4&3\\6&4&5&3&2&2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}3&2&1&5&4&3\\3&1&2&5&4&23\\2&1&4&3&5&8\end{pmatrix}.$$

13. В задаче 12 найти все оптимальные по Парето ситуации.
14. Найти все ситуации равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-4&-1&5\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}4&-1&3\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

15. Найти все ситуации равновесия игры двух лиц $\Gamma=\langle X,Y,F(x,y),G(x,y)\rangle$, где

$$F(x,y)=-2x^2+xy-y^2\ ,G(x,y,)=x^2+(1/2)xy - y^2\ ,\ X=Y=[0,1].$$

16. Решить биматричную игру Γ_1

$$A=\begin{pmatrix}4&5&3&7&2&1\\3&2&7&5&4&3\\6&4&5&3&2&2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}3&2&1&5&4&3\\3&1&2&5&4&23\\2&1&4&3&5&8\end{pmatrix}$$

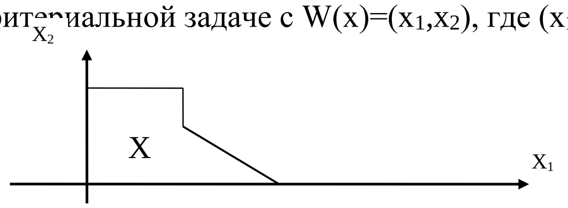
17. Найти все ситуации равновесия в игре $F(x,y)=x-(y-x)^2$, $G(x,y) = (x-y)^2$, $X=Y=[0,2]$.
18. В условиях задачи 16 решить игру Γ_2.
19. Привести пример биматричной игры Γ_2., где M>K.
20. Найти ситуацию равновесия игры Γ_1 из задачи 16.
21. Найти решение одношаговой игры с полной информацией: сначала первый игрок выбирает номер строки i матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

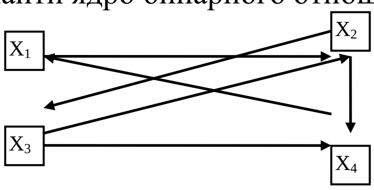
Затем второй выбирает номер столбца j , зная выбор первого игрока . Выигрыш первого игрока определяется по указанной матрице.
21. В условиях предыдущей задачи пусть сначала выбор делает второй игрок, а потом первый. Найти решение игры с полной информацией.
22. Найти решение игры с полной информацией: сначала второй игрок выбирает четность j, затем первый выбирает i, затем второй выбирает j в соответствии с выбранной четностью.Выигрыш первого игрока определяется по матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

23. Найти множества парето-оптимальных и оптимальных по Слейтеру стратегий в двукритериальной задаче с $W(x)=(x_1,x_2)$, где (x_1,x_2) принадлежит множеству X



24. Пять школьников по трем предметам имеют следующие отметки:
W_1 : 3 5 3 4 3 Найти лучших учеников в случаях
W_2 : 4 3 2 5 4 а) предметы равноценны б) первый предмет
W_3 : 3 2 5 4 5 важнее второго, который равноценен третьему.
25. Найти ядро бинарного отношения, заданного ориентированным графом



26.Найти производную в точке (1,1,-1) по направлению (2,1,-1) функции минимума $\min[f_1,f_2,f_3,f_4]$, где $f_1=x_1^2+2x_2$, $f_2=2x_1+x_2^2$, $f_3=x_1+x_2-2x_3$, $f_4=4x_1+x_3$.
27.Найти оценку эффективности стратегии i(j) =j, предполагая, что j - случайный фактор, имеющий неопределенность в законе распределения $q=(q_1,q_2,q_3)\in Q=\{q|\ q_1+q_2=1/2,\ q_3=1/2\}$ а критерий эффективности задан матрицей

$$(F(i,j)) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

28. Пусть k - случайный фактор, принимающий два значения 1 и 2 с вероятностями ½,
i - контролируемый фактор, j - неопределенный фактор.
При k=1 критерий эффективности F(i,j,1) задан матрицей из предыдущей задаче. При k=2 он задан матрицей

$$(F(i,j,2))_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найти оптимальную стратегию из M_0.

29. Пусть случайный фактор отсутствует и критерий эффективности F(i,j) задан матрицей:

$$(F(i,j)) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти наилучший гарантированный результат, все оптимальные и абсолютно- оптимальные стратегии в множестве $M_и$. В условиях предыдущей задачи пусть в начале операции ожидается информация о четности выбираемого столбца. Выполнить аналогичное задание для множества стратегий, отвечающего заданной информационной гипотезе.

30. Найти $\max_{x\in X} \min [\, 2x_1,3x_2,x_3]$, где $X=\{x\in E_+^3|\ x_1+2x_2+x_3=10\}$.
31. Найти $\min_{x\in X} \max [\, 2x_1,3x_2,x_3]$, где $X=\{x\in E_+^3|\ x_1+2x_2+x_3=5\}$.
32. Найти $\max_{x\in X} \min [\, 2x_1,3x_2,x_3]$, где $X=\{x\in E_+^3|\ x_1+x_2+x_3=20,\ x_i\in \mathbb{Z}\}$.
33. Найти $\min_{x\in X} \max [\, 2x_1,3x_2,x_3]$, где $X=\{x\in E_+^3|\ x_1+x_2+x_3=20,\ x_i\in \mathbb{Z}\}$.
34. Найти $\max_{x\in X} [2(x_1)^{1/2}+3(x_2)^{1/2}+(x_3)^{1/2}]$, где $X=\{x\in E_+^3|\ x_1+x_2+x_3=10\}$.
35. Найти $\max_{x\in X} [2\ln(x_1+1)+3\ln(x_2+1)+\ln(x_3+1)]$, где $X=\{x\in E_+^3|\ x_1+x_2+x_3=7\}$.
36. Найти $\min_{x\in X} [2(x_1)^2+3(x_2)^2+(x_3)^2]$, где $X=\{x\in E_+^3|\ x_1+x_2+x_3=10\}$.
37. Найти $\min_{x\in X} [2(x_1)^2+3(x_2)^2+(x_3)^2]$, где $X=\{x\in E_+^3|\ x_1+x_2+x_3=20,\ x_i\in \mathbb{Z}\}$.
38. Найти $\max_{x\in X} [-2/x_1-3/x_2-1/x_3]$, где $X=\{x\in E_+^3|\ x_1+x_2+x_3=10,\ x_i\in \mathbb{Z}\}$.
39. Найти $\max_{x\in X} \min_i [\, ix_i\,]$, где $X=\{x\in E_+^n|\ \sum x_i=A\}$.
40. Найти $\min_{x\in X} \max_i [\, ix_i\,]$, где $X=\{x\in E_+^n|\ \sum x_i=A\}$.
41. Найти $\min_{x\in X} \sum i(x_i)^2$, где $X=\{x\in E_+^n|\ \sum x_i=A\}$.
42. Найти $\max_{x\in X} \sum i\ln(x_i+1)$, где $X=\{x\in E_+^n|\ \sum x_i=n\}$.

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов, например

1. Основная теорема непрерывных игр.
2. Метод сужения множества оптимальных по Парето стратегий, использующий информацию о сравнительной важности или равноценности критериев.

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных средств	**2 (не зачтено)**	**3 (зачтено)**	**4 (зачтено)**	**5 (зачтено)**
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач