

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной
математики и кибернетики


/И.А. Соколов /
«27» сентября 2022г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Избранные вопросы теории графов

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден

на заседании Ученого совета факультета ВМК

(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	Индикатор (показатель) достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 – Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 – Умеет использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3 – Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: 1. общие свойства графов, основные свойства деревьев и остовных деревьев в графах; 2. основные свойства связных, двусвязных и k -связных графов; 3. свойства вершинных и реберных раскрасок графов, их верхние и нижние оценки; 4. некоторые наследственные свойства графов и экстремальные графы для этих свойств; 5. основы теории Рамсея, верхние и нижние оценки чисел Рамсея; 6. основные свойства потоков в сетях, алгоритмы построения максимальных потоков в сетях; 7. некоторые графовые алгоритмы и труднорешаемые графовые задачи, 8. основные свойства матриц, связанных с графами, 9. свойства алгебр смежности мультиграфов и характеристических многочленов мультиграфов, 10. некоторые свойства матриц мультиграфов, связанные с их симметриями, 11. основы теории перечисления помеченных графов, 12. основы теории перечисления непомеченных графов. Уметь:

		<ol style="list-style-type: none"> 1. находить или оценивать число неизоморфных графов с заданными свойствами; 2. находить компоненты связности и двусвязности в графах, строить bc-дерево связного графа; 3. находить или оценивать хроматическое число или хроматический индекс графа; 4. описывать графы с заданным наследственным свойством, оценивать числа Рамсея; 5. находить максимальный поток в сети и его величину, 6. строить матрицы смежности, инцидентности, степеней мультиграфов и мультиорграфов и устанавливать взаимосвязи между ними,. 7. определять по матрицам, связанным с графом, некоторые метрические характеристики графа, в том числе число его компонент связности и древесную сложность графа, 8. находить характеристический многочлен мультиграфа, 9. получать оценки размерности алгебры смежности мультиграфа, 10. выражать через характеристический многочлен регулярного мультиграфа характеристический многочлен его реберного мультиграфа, 11. выражать через характеристический многочлен простого регулярного графа характеристический многочлен его дополнения, 12. вычислять спектры графов из специальных
--	--	--

		<p>классов (циркулянтные графы, полные графы, циклы, гипероктаэдральные и триангулированные графы),</p> <p>13. распознавать с помощью матриц, является ли подстановка автоморфизмом графа,</p> <p>14. распознавать некоторые свойства графов, связанные с вершинной и реберной группами автоморфизмов графа,</p> <p>15. находить количества попарно неизоморфных помеченных и непомеченных графов из некоторых специальных классов.</p> <p>Владеть:</p> <p>1. навыками понимания и применения графовых понятий и их свойств при решении прикладных задач в профессиональной деятельности.</p>
--	--	---

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

коллоквиум

Коллоквиум № 1. Пример задания коллоквиума № 1.

1. Что такое остовное дерево в графе? Как найти остовное дерево связного графа? Сформулировать теорему об оценке числа висячих вершин в остовном дереве графа. Как доказывается эта теорема?
2. Что такое хроматический индекс графа? Привести простейшие оценки хроматического индекса графа. Сформулировать и доказать теорему Кенига о хроматическом индексе двудольного графа.
3. Что такое поток в сети и его величина? Привести и доказать верхнюю оценку величины потока в сети. Что такое максимальный поток в сети? Сформулировать теорему о величине максимального потока в сети. Как можно найти максимальный поток в заданной сети?

Коллоквиум № 2. Пример задания коллоквиума № 2.

1. Что такое алгебра смежности мультиграфа? Сформулировать теоремы о размерности алгебры смежности при заданном диаметре мультиграфа и при заданном числе его собственных значений. Как доказываются эти теоремы?
2. Что такое вершинно-транзитивные и реберно-транзитивные графы. Сформулировать теорему о двудольности реберно-транзитивных графов. Как доказывается эта теорема?

Коллоквиум № 3. Пример задания коллоквиума № 3.

1. Какова рекуррентная формула для числа помеченных связных графов? Выведите эту формулу. Сформулируйте теорему об асимптотике отношения числа помеченных связных n -графов к числу всех помеченных n -графов. Как доказываются эти теоремы?
2. Выведите формулу для суммы цикловых индексов симметрических групп всех степеней. Установите связь циклового индекса знакопеременной группы с цикловым индексом симметрической группы.

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме экзамена

В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:

Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену.

В билете три вопроса (по одному из каждой части курса).

Часть 1. Структурные свойства графов.

1. Точки сочленения и мосты в графе. Теорема о равносильных определениях точки сочленения. Связность, k -связность. Двусвязные графы. Теорема о равносильных определениях двусвязного графа.
2. Компоненты двусвязности (блоки) в графе. Критерий принадлежности двух вершин графа одной компоненте двусвязности. Свойства компонент двусвязности графа. Теорема о дереве блоков и точек сочленения графа.
3. Остовные деревья в графе. Теорема о достижимости промежуточного числа висячих вершин в остовном дереве графа. Теорема об оценке числа висячих вершин в остовном дереве графа.
4. Хроматическое число графа. Критерий Кенига двуцветности графа. Верхние оценки хроматического числа графа. Теорема Брукса о верхней оценке хроматического числа графа.
5. Хроматическое число графа. Теорема Зыкова о существовании графов без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.
6. Хроматический индекс графа. Теорема Кенига о хроматическом индексе двудольного графа. Теорема Визинга о верхней оценке хроматического индекса графа.
7. Наследственные свойства графов. Теорема об оценке наибольшего числа ребер в графе с наследственным свойством. Планарные графы, теорема о наибольшем числе ребер в планарном графе.
8. Наследственные свойства графов. Теорема о наибольшем числе ребер в графе без треугольников. Теорема Турана о наибольшем числе ребер в графе без полного подграфа с n вершинами.
9. Числа Рамсея. Теорема о верхней оценке числа Рамсея. Теорема Эрдеша о нижней оценке числа Рамсея.
10. Потоки в сетях. Теорема Форда и Фалкерсона о величине максимального потока в сети. Алгоритм расстановки пометок для построения максимального потока в сети.
11. Труднорешаемые графовые задачи. NP-полнота задачи k -раскраски графа при каждом заданном числе $k \geq 3$.

Часть 2. Методы линейной алгебры в теории графов

12. Помеченные графы, изоморфизм помеченных графов. Связь между числом помечиваний вершин простого графа и порядком его группы автоморфизмов.
13. Матрицы смежности, инцидентности, степеней вершин, полустепеней исхода и захода, расстояний.
14. Интерпретация элементов степеней матрицы смежности.
15. Теоремы о связи матриц инцидентности для мультиграфов и мультиорграфов с их матрицами смежности.
16. Теоремы о тотальной унимодулярности и ранге матрицы инцидентности мультиорграфа.
17. Теорема Г. Кирхгофа о деревьях. Следствия из нее (о числе остовных деревьев в полном графе и формуле для древесной сложности мультиграфа).
18. Алгебра смежности мультиграфа. Теоремы о размерности алгебры смежности при заданном диаметре мультиграфа и при заданном числе его собственных значений.

19. Утверждение о величине некоторых коэффициентов характеристического многочлена графа.
20. Теорема о верхней границе для собственных значений графа.
21. Теорема о собственных значениях регулярного мультиграфа.
22. Критерий принадлежности матрицы J_n алгебре смежности мультиграфа. Следствие о виде матрицы J_n .
23. Нижняя оценка для собственных значений реберного мультиграфа.
24. Теорема о связи характеристических многочленов регулярного мультиграфа и его реберного мультиграфа.
25. Выражение сложности регулярного мультиграфа через его характеристический многочлен.
26. Теорема о сложности реберного мультиграфа, построенного для регулярного связного мультиграфа.
27. Верхняя оценка для сложности регулярного связного мультиграфа.
28. Циркулянтные графы и их спектры. Спектры полных графов, циклов, гипероктаэдральных и триангулированных графов.
29. Теорема о спектрах дополнительных графов.
30. Матрицы подстановок. Теорема о перестановочности матрицы подстановки, соответствующей автоморфизму графа, с матрицей смежности графа.
31. Теорема о связи матриц подстановок с простыми собственными значениями графа.
32. Теорема об автоморфизме, порядок которого больше 2.
33. Вершинно-транзитивные и реберно-транзитивные графы. Теорема о двудольности реберно-транзитивных графов.
34. Теорема о простом собственном значении вершинно-транзитивного графа.
35. Реберно-симметрические графы. Теорема о простых собственных значениях реберно-симметрических графов.

Часть 3. Перечисление графов

36. Число помеченных графов и орграфов. Рекуррентная формула для помеченных связных графов.
37. Теорема об асимптотике отношения числа помеченных связных n -графов к числу всех помеченных n -графов.
38. Лемма о перечислении помеченных графов.
39. Интерпретации операций над формальными рядами (умножение и деление на переменную, дифференцирование ряда).
40. Формула, связывающая производящие функции для помеченных графов некоторого семейства и помеченных связных графов из этого же семейства. Частные случаи этой формулы (для всех графов и для всех четных графов).
41. Асимптотика числа помеченных блоков.
42. Теорема А. Кэли о числе помеченных деревьев (доказательство Д. Пойа).
43. Формулировки леммы Бернсайда, ограниченной формы леммы Бернсайда и теоремы Д. Пойа (для случая одной переменной и случая многих переменных).
44. Вывод формулы для циклового индекса симметрической группы. Рекуррентная формула, связывающая цикловые индексы симметрических групп. Вывод формулы для суммы цикловых индексов симметрических групп всех степеней.
45. Связь циклового индекса знакопеременной группы с цикловым индексом симметрической группы.
46. Теорема о перечислении взаимно однозначных функций.
47. Перечисление корневых непомеченных деревьев. Рекуррентная формула для числа корневых деревьев.
48. Теорема о характеристике неподобия для графов.
49. Теорема о центре дерева.
50. Теорема Р. Оттера о характеристике неподобия для деревьев.
51. Теорема Р. Оттера о производящей функции для непомеченных деревьев.
52. Перечисляющий многочлен для n -графов.

53. Асимптотика числа n -графов.
54. Связь производящей функции для непомеченных графов с производящей функцией для непомеченных связных графов.
55. Рекуррентная формула для числа непомеченных связных графов.
56. Константная форма теоремы перечисления степенной группы.
57. Перечисление самодополнительных графов.
58. Теорема перечисления степенной группы в форме степенного ряда.

Экзаменационный билет состоит из трёх вопросов, например

1. Хроматическое число графа. Критерий Кенига двуцветности графа. Верхние оценки хроматического числа графа. Теорема Брукса о верхней оценке хроматического числа графа.
2. Теоремы о связи матриц инцидентности для мультиграфов и мультиорграфов с их матрицами смежности.
3. Константная форма теоремы перечисления степенной группы.

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка	2 (не зачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
виды оценочных средств				
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности не принципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач