М.В. Абакумов

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ГОДУНОВСКОГО ТИПА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ *

Введение

Разностные схемы годуновского типа широко используются в различных прикладных задачах вычислительной газовой динамики. Поскольку подобные схемы являются явными, их применение особенно эффективно в расчетах двумерных и трехмерных задач, требующих для численного решения большого количества временных шагов. К таковым, например, относятся задачи астрофизики, в которых зачастую необходимо моделирование течений газа на продолжительных временных промежутках.

Схемы годуновского типа являются консервативными [1], [2], [3], поскольку в ходе их построения разностные уравнения записываются в дивергентной форме, в которой разностные газодинамические потоки, как правило, относятся к границам ячеек вводимой пространственной сетки. Основная проблема при построении подобных схем состоит в адекватной аппроксимации потоков на границах ячеек по значениям газодинамических функций в их центрах. С.К.Годуновым [4], [5] было предложено аппроксимировать потоки на основе точного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Реализация подобного подхода требует большого объема вычислений, поскольку предполагает решение нелинейных алгебраических уравнений в каждом узле разностной сетки. По этой причине в дальнейшем были предложены схемы, в которых задача Римана решается приближенно (см., например, [6]–[10]).

Построение схем годуновского типа в криволинейных координатах обладает определенной спецификой. Это объясняется тем, что в криволинейных координатах даже исходные дифференциальные уравнения газовой динамики зачастую не удается записать в дивергентной форме, поскольку вследствие криволинейности системы координат в правой части уравнений появляются дополнительный слагаемые.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №12-01-00606 и НШ-6061.2014.2.

В настоящей работе предлагается достаточно общий метод построения консервативных разностных схем газовой динамики в ортогональных криволинейных координатах на основе произвольной схемы годуновского типа для декартовых координат. При построении схемы в криволинейных координатах алгоритмы вычисления потоков базовой декартовой схемы не модифицируются. Это позволяет реализовать схему в криволинейных координатах путем внесения небольших дополнений в имеющийся программный код декартовой схемы.

Статья является продолжением работы [11], в которой метод построения схем в криволинейных координатах описывался на примере цилиндрических координат. Для удобства читателя здесь также приводится система уравнений сжимаемого вязкого газа в произвольной ортогональной системе координат для случая произвольного симметричного тензора напряжений и дается общее описание предлагаемого метода. В обычном предположении линейной зависимости тензора напряжений второго ранга от производных скорости по пространству получаются уравнения в сферических координатах. Строится разностная схема общего вида, в которой алгоритм вычисления сеточных потоков базовой декартовой схемы считается известным. Приводится вид разностных добавок к сеточным потокам, обеспечивающих консервативную аппроксимацию вязких слагаемых в уравнениях движения и энергии.

Проводятся трехмерные тестовые расчеты течений вязкого и невязкого газа по построенной схеме второго порядка аппроксимации по пространству, в которой сеточные потоки вычисляются методом Роу [8] с модификациями Эйнфельдта [9] и Ошера [10].

Автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. РАН, профессору Попову Ю.П. за ценные замечания и интерес к работе.

1. Рассматриваемая система уравнений

Рассмотрим инвариантную форму уравнений сжимаемого вязкого идеального газа (см. [12], [13], [14]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = \operatorname{div}\mathbf{\Pi},$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\mathbf{\Pi}\mathbf{v}),$$

$$E = \varepsilon + \mathbf{v}^2/2,\ \ \mathbf{\Pi} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}, \tag{1.1}$$

с уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$. Здесь t – время, ρ – плотность газа, p – давление, ε – удельная (массовая) внутренняя энергия, E – полная удельная энергия, $\mathbf{v}$ – скорость газа, γ – показатель адиабаты, $\mathbf{\Pi}$ – тензор напряжений, $\mathbf{I}$ – единичный тензор, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор вязких напряжений.

В прямоугольной декартовой системе координат (y_1, y_2, y_3) компоненты тензора $\boldsymbol{\sigma}$ определяются следующим образом (см. [12], [13], [14]):

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} = \mu\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i}{\partial y_k} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) + \zeta\delta_{ik}\mathrm{div}\,\mathbf{v},$$

где $\mu > 0$ – коэффициент динамической вязкости, ζ – коэффициент второй вязкости, δ_{ik} – символ Кронекера.

В произвольной ортогональной системе координат (x^1, x^2, x^3) система уравнений (1.1) для симметричного тензора $\mathbf{\Pi}$ примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{g}}{H_i}\rho v_i\right) = 0,$$

$$\frac{\partial (H_k \rho v_k)}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,\frac{H_k}{H_i}(\rho v_k v_i - p_{ik})\right) = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{H_i}\left(\rho v_i^2 - p_{ii}\right)\frac{\partial H_i}{\partial x^k},$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{g}}{H_i}\left(\rho E v_i - \sum_{k=1}^{3} p_{ik} v_k\right)\right) = 0, \qquad (1.2)$$

где H_i - коэффициенты Ламе [15], $g = H_1^2 H_2^2 H_3^2$. В рассматриваемом случае $p_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma_{ik}$. Подробный вывод этих уравнений и последующих равенств можно найти, например, в работе [16].

Приведем выражения для компонент тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, который удобно представить в виде суммы двух тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B},\ \mathbf{B} = \mathbf{I}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v},\ \lambda = \zeta - \frac{2}{3}\mu,$$

компоненты которых в декартовых координатах имеют вид:

$$a_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i},\ b_{ik} = \delta_{ik}\mathrm{div}\,\mathbf{v}.$$

В ортогональных криволинейных координатах

$$a_{ik} = \frac{1}{H_i H_k}\left[H_i\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + H_k\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - v_i\frac{\partial H_i}{\partial x^k} - v_k\frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \delta_{ik}\sum_{m=1}^{3}\frac{v_m}{H_m}\frac{\partial (H_i H_k)}{\partial x^m}\right],$$

$$b_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{\sqrt{g}}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sqrt{g}\,\frac{v_m}{H_m}\right) = \delta_{ik}\mathrm{div}\,\mathbf{v}.$$

При выводе уравнений в сферических координатах также используются равенства:

$$(\mathrm{div}\mathbf{A})_{x^i} = \frac{1}{H_i\sqrt{g}}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\,\frac{H_i}{H_k}a_{ik}\right) - \frac{1}{H_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{a_{kk}}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i},$$

$$(\mathrm{div}\mathbf{B})_{x^i} = \frac{1}{H_i\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,\mathrm{div}\mathbf{v}\right) - \frac{\mathrm{div}\mathbf{v}}{H_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i},$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{3} v_i(\mathrm{div}\mathbf{A})_{x^i} + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}^2,$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{B}\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\sqrt{g}\,v_k\,\mathrm{div}\mathbf{v}}{H_k}\right).$$

Выпишем систему уравнений сжимаемого вязкого газа в сферической системе координат (r,φ,ψ). Переход от сферических координат к прямоугольным декартовым координатам (x,y,z) определяется равенствами:

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\ \ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ \ z = r\sin\psi.$$

Координата r задает расстояние от точки $M(x,y,z)$ до начала координат, φ – полярный угол, ψ – угол между радиус-вектором точки M и плоскостью (x,y).

В сферических координатах:

$$H_1 = H_r = 1,\ \ H_2 = H_\varphi = r\cos\psi,\ \ H_3 = H_\psi = r,\ \sqrt{g} = r^2\cos\psi.$$

Подставляя эти значения в систему (1.2) и используя безиндексные обозначения $\mathbf{v} = (u,v,w) = (v_r, v_\varphi, v_\psi)$, запишем уравнения в следующей форме:

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\psi} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_\sigma,$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q} = (\rho,\rho u,\rho v,\rho w,\rho E)^T,\\
&\mathbf{F} = (\rho u,\rho u^2 + p,\rho uv,\rho uw,\rho uH)^T,\\
&\mathbf{G} = (\rho v,\rho vu,\rho v^2 + p,\rho vw,\rho vH)^T,\\
&\mathbf{H} = (\rho w,\rho wu,\rho wv,\rho w^2 + p,\rho wH)^T,
\end{aligned}
\qquad
\mathbf{R} = -\frac{\rho}{r}\begin{pmatrix} 2u - w\,\mathrm{tg}\psi \\ 2u^2 - v^2 - w^2 - uw\,\mathrm{tg}\psi \\ 3uv - 2vw\,\mathrm{tg}\psi \\ 3uw - (w^2 - v^2)\,\mathrm{tg}\psi \\ (2u - w\,\mathrm{tg}\psi)H \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\sigma = (0,(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_r,(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_\varphi,(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_\psi,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}))^T,$$

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon,\ \ E = \varepsilon + \mathbf{v}^2/2,\ \ H = E + p/\rho,\ \ \mathbf{v} = (u,v,w). \qquad (1.3)$$

Здесь H – полная удельная энтальпия (обозначение не внесет путаницы, поскольку коэффициенты Ламе далее в тексте не используются).

Для компонент тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ получим следующие выражения:

$$\sigma_{rr} = (2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\lambda}{r\cos\psi}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{\lambda}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial\psi} + 2u - w\,\mathrm{tg}\,\psi\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\mu+\lambda}{r}\left(\frac{1}{\cos\psi}\frac{\partial v}{\partial\varphi} - w\,\mathrm{tg}\,\psi\right) + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} + (\mu+\lambda)\frac{2u}{r},$$

$$\sigma_{\psi\psi} = \lambda\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\lambda}{r\cos\psi}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{2\mu+\lambda}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi} + (\mu+\lambda)\frac{2u}{r} - \frac{\lambda}{r}w\,\mathrm{tg}\,\psi,$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial u}{\partial\varphi} - \frac{v}{r}\right),\ \sigma_{r\psi} = \sigma_{\psi r} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\psi} - \frac{w}{r}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\psi} = \sigma_{\psi\varphi} = \mu\left(\frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\psi} + \frac{v}{r}\mathrm{tg}\,\psi\right).$$

Компоненты вектора $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}$ примут вид:

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_r = \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\psi}}{\partial\psi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\psi\psi} - \sigma_{r\psi}\,\mathrm{tg}\,\psi}{r},$$

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_\varphi = \frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\psi}}{\partial\psi} + \frac{3\sigma_{\varphi r} - 2\sigma_{\varphi\psi}\,\mathrm{tg}\,\psi}{r},$$

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_\psi = \frac{\partial\sigma_{\psi r}}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial\sigma_{\psi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\psi\psi}}{\partial\psi} + \frac{3\sigma_{\psi r} + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\psi\psi})\,\mathrm{tg}\,\psi}{r}.$$

Приведем также развернутую форму записи радиальной компоненты вектора $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}$, которая используется в дальнейшем:

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_r = (2\mu+\lambda)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2}\right) + \frac{\mu}{r^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} +$$

$$+\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} - \mathrm{tg}\,\psi\frac{\partial u}{\partial\psi}\right) + \frac{\mu+\lambda}{r}\left(\frac{1}{\cos\psi}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\psi} - \mathrm{tg}\,\psi\frac{\partial w}{\partial r}\right) -$$

$$-\frac{3\mu+\lambda}{r^2}\left(\frac{1}{\cos\psi}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{\partial w}{\partial\psi} - w\,\mathrm{tg}\,\psi\right). \tag{1.4}$$

Вязкие слагаемые в правой части уравнения энергии имеют вид:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(u\sigma_{rr} + v\sigma_{r\varphi} + w\sigma_{r\psi}\right)\right) + \frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(u\sigma_{\varphi r} + v\sigma_{\varphi\varphi} + w\sigma_{\varphi\psi}\right) +$$

$$+\frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\left(u\sigma_{\psi r} + v\sigma_{\psi\varphi} + w\sigma_{\psi\psi}\right)\right). \tag{1.5}$$

2.Разностная схема

Остановимся на методе построения консервативной разностной схемы, аппроксимирующей уравнения системы (1.3), в которой влияние тензора вязких напряжений временно не учитывается, то есть вектор $\mathbf{R}_\sigma$ считается нулевым.

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi}=0, \qquad (2.1)$$

которая получается из инвариантных уравнений (1.1), если считать координаты (r,φ,ψ) не криволинейными сферическими, а прямоугольными декартовыми, и тензор $\boldsymbol{\sigma}$ нулевым. Предположим, что система (2.1) аппроксимируется какой-либо декартовой разностной схемой годуновского типа [4], [5]

$$\frac{\hat{\mathbf{q}}_{ijk}-\mathbf{q}_{ijk}}{\tau}+\frac{\mathbf{F}_{i+1/2\,jk}-\mathbf{F}_{i-1/2\,jk}}{h_r}+\frac{\mathbf{G}_{ij+1/2k}-\mathbf{G}_{ij-1/2k}}{h_\varphi}+\frac{\mathbf{H}_{ijk+1/2}-\mathbf{H}_{ijk-1/2}}{h_\psi}=0.$$

Здесь h_r, h_φ, h_ψ – шаги равномерной сетки по переменным r, φ и ψ соответственно, τ – шаг по времени, обозначение $\hat{y}$ используется для сеточных функций, вычисляемых на следующем временном слое. В такой схеме сеточные потоки $\mathbf{F}_{i\pm1/2\,jk}$, $\mathbf{G}_{ij\pm1/2k}$, $\mathbf{H}_{ijk\pm1/2}$ относятся к центрам соответствующих граней прямоугольной разностной ячейки, а при их построении обычно используются характеристические свойства системы (2.1) (см., например, [4]–[10]), определяемые свойствами матриц

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}},\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}},\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Важно отметить, что эти матрицы для систем (1.3) и (2.1) совпадают.

Будем исходить из того, что алгоритм вычисления разностных потоков в декартовой схеме известен. Потоки, вычисленные по этому алгоритму, далее будем относить к центрам граней сферической разностной ячейки, занумерованных индексами 1,2,…6 (см. рис.1). Тем самым, в центрах соответствующих граней ячейки считаются известными векторы:

$$\mathbf{F}_{1,3}=(\{\rho u\},\{\rho u^2+p\},\{\rho uv\},\{\rho uw\},\{\rho uH\})^T_{1,3},$$

$$\mathbf{G}_{2,4}=(\{\rho v\},\{\rho vu\},\{\rho v^2+p\},\{\rho vw\},\{\rho vH\})^T_{2,4},$$

$$\mathbf{H}_{5,6}=(\{\rho w\},\{\rho wu\},\{\rho wv\},\{\rho w^2+p\},\{\rho wH\})^T_{5,6}.$$

Наличие фигурных скобок у компонент этих векторов означает, что известными предполагаются лишь указанные в скобках потоковые комбинации сеточных функций, а не все функции по отдельности.

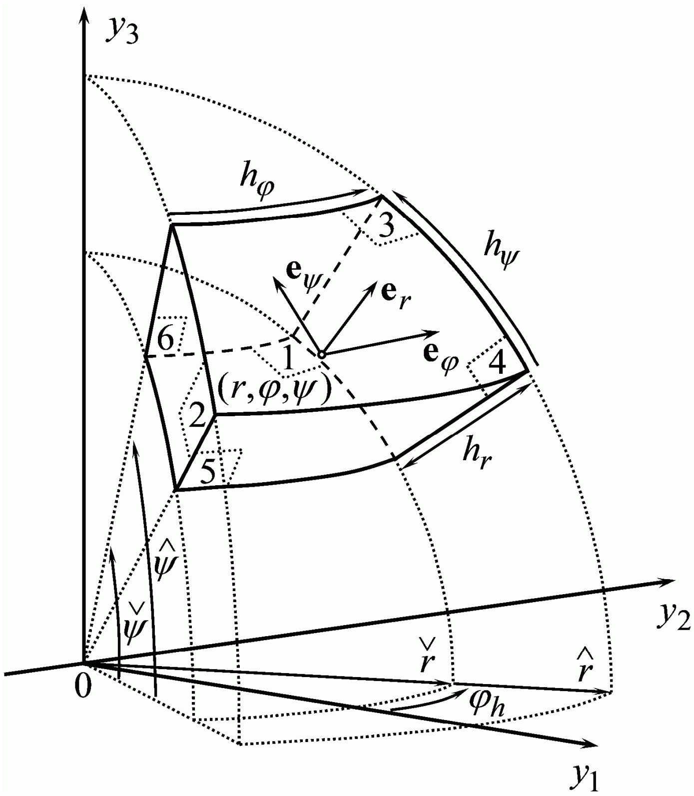


Рис.1. *Сферическая разностная ячейка*

Для учета криволинейности сферической разностной ячейки аппроксимируем интегральные соотношения баланса массы, импульса и энергии:

$$\int_V [\rho(t+\tau)-\rho(t)]dV + \int_t^{t+\tau}\int_\Sigma \rho(\mathbf{v},\mathbf{n})d\Sigma dt = 0,$$

$$\int_V [\rho(t+\tau)\mathbf{v}(t+\tau)-\rho(t)\mathbf{v}(t)]dV + \int_t^{t+\tau}\int_\Sigma [\rho(\mathbf{v},\mathbf{n})\mathbf{v}+p\mathbf{n}]d\Sigma dt = 0,$$

$$\int_V [\rho(t+\tau)E(t+\tau)-\rho(t)E(t)]dV + \int_t^{t+\tau}\int_\Sigma \rho(\mathbf{v},\mathbf{n})H\,d\Sigma dt = 0, \qquad (2.2)$$

считая, что интегрирование ведется по объему ячейки V и ее границе Σ. При этом будем предполагать, что скорость $\mathbf{v}$ имеет компоненты (u,v,w) в локальном базисе центра соответствующей грани. Это важно отметить, поскольку локальные базисы центров граней сферической ячейки с номерами 2,4,5 и 6 отличаются от локального базиса ее центра.

Пусть в какой-либо декартовой системе координат (y_1,y_2,y_3) с ортами $(\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3)$ грань $\tilde{\Sigma}$ разностной ячейки имеет параметризацию

$$y_m = y_m(\alpha,\beta);\, m=1,2,3;\, (\alpha,\beta)\in\Omega_{\alpha\beta}.$$

Будем считать постоянными на грани $\tilde{\Sigma}$ вектор скорости $\mathbf{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ и скалярные функции ρ, p, H. Получим приближенное значение интеграла

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \rho(\mathbf{v}, \mathbf{n}) d\Sigma = \int_{\tilde{\Sigma}} \rho(\mathrm{v}_1 n_1 + \mathrm{v}_2 n_2 + \mathrm{v}_3 n_3) d\Sigma \approx$$

$$\approx \sum_{m=1}^{3} \rho \,\mathrm{v}_m \int_{\tilde{\Sigma}} n_m d\Sigma = \pm \sum_{m=1}^{3} \rho \,\mathrm{v}_m \int_{\Omega_{\alpha\beta}} \tilde{n}_m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \pm \rho \sum_{m=1}^{3} \mathrm{v}_m \eta_m.$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{n}_1 = \frac{\partial(y_2, y_3)}{\partial(\alpha, \beta)}, \tilde{n}_2 = \frac{\partial(y_3, y_1)}{\partial(\alpha, \beta)}, \tilde{n}_3 = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(\alpha, \beta)},$$

$$\eta_m = \int_{\Omega_{\alpha\beta}} \tilde{n}_m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, m = 1,2,3.$$

Тогда приближенные выражения для потоков массы, импульса и энергии через грань $\tilde{\Sigma}$ примут вид:

$$F_{\tilde{\Sigma}}^{M} = \rho(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) = \pm \rho \sum_{m=1}^{3} \mathrm{v}_m \eta_m, \ \boldsymbol{F}_{\tilde{\Sigma}}^{I} = F_{\tilde{\Sigma}}^{M} \mathbf{v} + p\boldsymbol{\eta}, \ F_{\tilde{\Sigma}}^{E} = F_{\tilde{\Sigma}}^{M} H. \qquad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$, $\boldsymbol{\eta} = \pm(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ в базисе $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, знак в выражении для вектора $\boldsymbol{\eta}$ определяется выбором внешней нормали грани $\tilde{\Sigma}$.

Далее аппроксимируем интегральные уравнения баланса (2.2) разностными соотношениями:

$$\rho_t \Delta V + \sum_{l=1}^{6} F_l^M = 0, \ (\rho \mathbf{v})_t \Delta V + \sum_{l=1}^{6} \boldsymbol{F}_l^I = 0, \ (\rho E)_t \Delta V + \sum_{l=1}^{6} F_l^E = 0. \qquad (2.4)$$

Здесь ΔV – объем разностной ячейки, обозначение y_t используется для разностной производной вперед (по времени) сеточной функции, определенной в центре разностной ячейки. Важно отметить, что в разностном уравнении движения (2.4) скорость $\mathbf{v}$ считается заданной в локальном базисе центра ячейки, поэтому к этому базису должны быть приведены векторы $\boldsymbol{F}_l^I$, компоненты которых вычислялись в базисе $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$.

Описанный метод применим при построении разностной схемы, аппроксимирующей уравнения (1.2) в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. Однако для дальнейшей детализации уравнений (2.4) вернемся к сферическим координатам.

Пусть центр сферической ячейки имеет координаты (r, φ, ψ). Далее будем использовать обозначения:

$$\varphi_h = h_\varphi / 2, \ \tilde{h}_\psi = 2\sin(h_\psi / 2),$$

$$\check{r} = r - h_r / 2, \hat{r} = r + h_r / 2, \ \check{\psi} = \psi - h_\psi / 2, \ \hat{\psi} = \psi + h_\psi / 2,$$

$$\mathbf{M}_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{M}_2(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix};$$

а также значения следующих интегралов:

$$\int_{\check{r}}^{\hat{r}} \gamma d\gamma = rh_r, \ \int_{-\varphi_h}^{\varphi_h} d\gamma = h_\varphi, \ \int_{-\varphi_h}^{\varphi_h} \sin\gamma d\gamma = 0, \ \int_{-\varphi_h}^{\varphi_h} \cos\gamma d\gamma \approx h_\varphi,$$

$$\int_{\check{\psi}}^{\hat{\psi}} d\gamma = h_\psi, \ \int_{\check{\psi}}^{\hat{\psi}} \cos^2\gamma d\gamma \approx h_\psi \cos^2\psi, \ \int_{\check{\psi}}^{\hat{\psi}} \sin\gamma\cos\gamma d\gamma \approx h_\psi \sin\psi\cos\psi.$$

Здесь в приближенных выражениях отброшены слагаемые третьего порядка малости по шагам сетки h_φ и h_ψ.

Введем декартову систему координат (y_1, y_2, y_3), ось y_3 которой совпадает с осью z, а плоскость (y_1, y_3) проходит через центр (r, φ, ψ) разностной ячейки (см. рис.1). Отметим, что базис $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ не совпадает с локальным (нормированным) базисом $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\psi)$ центра ячейки.

Выпишем приближенные значения потоков для грани с номером 1, параметрическое задание которой имеет вид:

$$y_1 = \check{r}\cos\alpha\cos\beta, \ y_2 = \check{r}\sin\alpha\cos\beta, \ y_3 = \check{r}\sin\beta; \ \alpha \in [-\varphi_h, \varphi_h], \ \beta \in [\check{\psi}, \hat{\psi}].$$

Для данной грани

$$\tilde{n}_1 = \check{r}^2\cos\alpha\cos^2\beta, \ \tilde{n}_2 = \check{r}^2\sin\alpha\cos^2\beta, \ \tilde{n}_3 = \check{r}^2\sin\beta\cos\beta;$$

$$\boldsymbol{\eta} \approx -(\cos^2\psi, 0, \sin\psi\cos\psi)\check{r}^2 h_\varphi h_\psi.$$

Поскольку локальный базис в центре участка границ с номером 1 получается поворотом базиса $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ относительно вектора $\mathbf{i}_2$ на угол ψ, компоненты скорости $\mathbf{v}$ в базисе $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ имеют вид:

$$(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3) = \{(u, v, w)\}_1 \mathbf{M}_2(-\psi) = \left\{(u\cos\psi - w\sin\psi, v, u\sin\psi + w\cos\psi)\right\}_1.$$

Отсюда, учитывая, что $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) \approx -\{u\}_1 \check{r}^2 h_\varphi h_\psi \cos\psi$, получим приближенные выражения (2.3) для потоков массы и энергии:

$$F_1^M = -\{\rho u\}_1 \check{r}^2 h_\varphi h_\psi \cos\psi, \ F_1^E = -\{\rho u H\}_1 \check{r}^2 h_\varphi h_\psi \cos\psi.$$

Для нахождения приближенного потока импульса в локальном базисе центра ячейки $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\psi)$ также воспользуемся формулой преобразования компонент вектора при повороте базиса

$$\boldsymbol{F}_1^I = \left(F_1^M \{(u,v,w)\}_1 \mathbf{M}_2(-\psi) + p\boldsymbol{\eta}\right)\mathbf{M}_2(\psi) = F_1^M \{(u,v,w)\}_1 + p\boldsymbol{\eta}\mathbf{M}_2(\psi).$$

Отсюда с учетом равенства $\boldsymbol{\eta}\mathbf{M}_2(\psi) = -(\cos\psi, 0, 0)\check{r}^2 h_\varphi h_\psi$ получим

$$\boldsymbol{F}_1^I = -\left(\{\rho u^2 + p\}_1, \{\rho uv\}_1, \{\rho uw\}_1\right)\check{r}^2 h_\varphi h_\psi \cos\psi.$$

Выражения для разностных потоков через грань 3 получаются из найденных для грани 1 путем смены знака и замены $\check{r}$ на $\hat{r}$.

Далее перейдем к рассмотрению грани с номером 4, для которой:

$$y_1 = \alpha\cos\varphi_h \cos\beta,\ y_2 = \alpha\sin\varphi_h \cos\beta,\ y_3 = \alpha\sin\beta;\ \alpha \in [\check{r}, \hat{r}],\ \beta \in [\check{\psi}, \hat{\psi}];$$
$$\tilde{n}_1 = \alpha\sin\varphi_h,\ \tilde{n}_2 = -\alpha\cos\varphi_h,\ \tilde{n}_3 = 0;\ \boldsymbol{\eta} = -(\sin\varphi_h, -\cos\varphi_h, 0) r h_r h_\psi.$$

Для получения значений компонент скорости $\mathbf{v}$ в базисе $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ необходимо осуществить последовательные преобразования:

$$(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3) = \{(u,v,w)\}_4 \mathbf{M}_2(-\psi)\mathbf{M}_3(-\varphi_h),$$
$$\{(u,v,w)\}_4 \mathbf{M}_2(-\psi) = \left\{(u\cos\psi - w\sin\psi, v, u\sin\psi + w\cos\psi)\right\}_4,$$
$$\mathrm{v}_1 = \left\{(u\cos\psi - w\sin\psi)\cos\varphi_h - v\sin\varphi_h\right\}_4,$$
$$\mathrm{v}_2 = \left\{(u\cos\psi - w\sin\psi)\sin\varphi_h + v\cos\varphi_h\right\}_4,\ \mathrm{v}_3 = \left\{u\sin\psi + w\cos\psi\right\}_4.$$

Отсюда с учетом равенства $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) = \{v\}_4 r h_r h_\psi$ получим

$$F_4^M = \{\rho v\}_4 r h_r h_\psi,\ F_4^E = \{\rho v H\}_4 r h_r h_\psi.$$

Вычислим приближенный поток импульса $\boldsymbol{F}_4^I = \left(F_4^M \mathbf{v} + p\boldsymbol{\eta}\right)\mathbf{M}_2(\psi)$. Опуская слагаемые второго порядка малости по h_φ:

$$\mathbf{v}\mathbf{M}_2(\psi) \approx \left\{\left(u - 0.5h_\varphi v\cos\psi, v + 0.5h_\varphi(u\cos\psi - w\sin\psi), w + 0.5h_\varphi v\sin\psi\right)\right\}_4,$$
$$\boldsymbol{\eta}\mathbf{M}_2(\psi) \approx \left(-0.5h_\varphi\cos\psi, 1, 0.5h_\varphi\sin\psi\right) r h_r h_\psi.$$

Приходим к приближенным выражениям:

$$(\boldsymbol{F}_4^I)_r = \left(\{\rho vu\}_4 - 0.5h_\varphi\{\rho v^2 + p\}_4\cos\psi\right) r h_r h_\psi,$$
$$(\boldsymbol{F}_4^I)_\varphi = \left(\{\rho v^2 + p\}_4 + 0.5h_\varphi\{\rho vu\}_4\cos\psi - 0.5h_\varphi\{\rho vw\}_4\sin\psi\right) r h_r h_\psi,$$
$$(\boldsymbol{F}_4^I)_\psi = \left(\{\rho vw\}_4 + 0.5h_\varphi\{\rho v^2 + p\}_4\sin\psi\right) r h_r h_\psi.$$

Выражения для разностных потоков через грань 2 получаются из найденных для грани 4 путем смены знака и замены h_φ на $-h_\varphi$.

Для грани с номером 6:

$$y_1 = \alpha\cos\beta\cos\hat{\psi},\ y_2 = \alpha\sin\beta\cos\hat{\psi},\ y_3 = \alpha\sin\hat{\psi},\ \alpha\in[\check{r},\hat{r}],\ \beta\in[-\varphi_h,\varphi_h];$$

$$\tilde{n}_1 = -\alpha\cos\beta\sin\hat{\psi}\cos\hat{\psi},\ \tilde{n}_2 = -\alpha\sin\beta\sin\hat{\psi}\cos\hat{\psi},\ \tilde{n}_3 = \alpha\cos^2\hat{\psi};$$

$$\boldsymbol{\eta} \approx (-\sin\hat{\psi}\cos\hat{\psi}, 0, \cos^2\hat{\psi}) r h_r h_\varphi.$$

Компоненты скорости $\mathbf{v}$ в базисе $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$

$$(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3) = \{(u, v, w)\}_6 \mathbf{M}_2(-\hat{\psi}) = \{(u\cos\hat{\psi} - w\sin\hat{\psi}, v, u\sin\hat{\psi} + w\cos\hat{\psi})\}_6.$$

Отсюда с учетом равенства $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) \approx \{w\}_6 r h_r h_\varphi \cos\hat{\psi}$ получим

$$F_6^M = \{\rho w\}_6 r h_r h_\varphi \cos\hat{\psi},\ F_6^E = \{\rho w H\}_6 r h_r h_\varphi \cos\hat{\psi}.$$

Вычислим приближенный поток импульса $\boldsymbol{F}_6^I = \left(F_6^M \mathbf{v} + p\boldsymbol{\eta}\right)\mathbf{M}_2(\psi)$. Опуская слагаемые второго и третьего порядка малости по h_ψ:

$$\mathbf{v}\mathbf{M}_2(\psi) \approx \left\{\left(u - 0.5h_\psi w, v, w + 0.5h_\psi u\right)\right\}_6,$$

$$\boldsymbol{\eta}\mathbf{M}_2(\psi) \approx \left(-0.5h_\psi\cos\hat{\psi}, 0, \cos\hat{\psi}\right) r h_r h_\varphi.$$

Получим

$$(\boldsymbol{F}_6^I)_r = \left(\{\rho w u\}_6 - 0.5h_\psi\{\rho w^2 + p\}_6\right) r h_r h_\varphi \cos\hat{\psi},$$

$$(\boldsymbol{F}_6^I)_\varphi = \{\rho w v\}_6 r h_r h_\varphi \cos\hat{\psi},$$

$$(\boldsymbol{F}_6^I)_\psi = \left(\{\rho w^2 + p\}_6 + 0.5h_\psi\{\rho w u\}_6\right) r h_r h_\varphi \cos\hat{\psi}.$$

Выражения для разностных потоков через грань 5 получаются из найденных для грани 6 путем смены знака и замены h_ψ на $-h_\psi$, $\hat{\psi}$ на $\check{\psi}$.

Оправданным требованием к разностной схеме является ее точность на «фоновом» решении, то есть на решении с нулевой скоростью и постоянными плотностью и давлением. Поскольку для получения более компактных выражений при вычислении разностных потоков отбрасывались слагаемые второго и третьего порядка малости по шагам сетки, указанное требование выполняется лишь приближенно. Действительно, считая в выражениях для разностных потоков компоненты скорости равными нулю, а давление постоянным, просуммируем потоки по всем границам разностной ячейки. В результате получим, что суммы компонент векторов $\boldsymbol{F}_l^I$ по r и ψ отличны от нуля:

$$rh_r h_\varphi h_\psi(\cos\psi - (\cos\hat{\psi} + \cos\check{\psi})/2)p \neq 0,$$
$$rh_r h_\varphi \sin\psi(h_\psi - \tilde{h}_\psi)p \neq 0.$$

Наиболее простым способом устранения указанного дисбаланса является замена во всех выражениях для приближенных потоков значения $\cos\psi$ на $\cos\tilde{\psi} = (\cos\hat{\psi} + \cos\check{\psi})/2$ и значения h_ψ на $\tilde{h}_\psi$. При этом порядок аппроксимации схемы (см. далее) не изменится.

С учетом указанных модификаций и выражения для объема сферической ячейки

$$\Delta V = \tilde{r}^2 h_r h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\psi, \tilde{r}^2 = \left(r^2 + \frac{h_r^2}{12}\right), \tilde{h}_\psi = 2\sin\frac{h_\psi}{2}.$$

приходим к следующей разностной схеме:

$$\rho_t \tilde{r}^2 h_r h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\psi + (\{\rho u\}_3 \hat{r}^2 - \{\rho u\}_1 \check{r}^2) h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\tilde{\psi} +$$
$$+\left(\{\rho v\}_4 - \{\rho v\}_2\right) rh_r \tilde{h}_\psi + (\{\rho w\}_6 \cos\hat{\psi} - \{\rho w\}_5 \cos\check{\psi}) rh_r h_\varphi = 0,$$

$$(\rho u)_t \tilde{r}^2 h_r h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\psi + (\{\rho u^2 + p\}_3 \hat{r}^2 - \{\rho u^2 + p\}_1 \check{r}^2) h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\tilde{\psi} +$$
$$+(\{\rho vu\}_4 - 0.5h_\varphi\{\rho v^2 + p\}_4 \cos\tilde{\psi}) rh_r \tilde{h}_\psi -$$
$$-(\{\rho vu\}_2 + 0.5h_\varphi\{\rho v^2 + p\}_2 \cos\tilde{\psi}) rh_r \tilde{h}_\psi +$$
$$+(\{\rho wu\}_6 - 0.5h_\psi\{\rho w^2 + p\}_6) rh_r h_\varphi \cos\hat{\psi} -$$
$$-(\{\rho wu\}_5 + 0.5h_\psi\{\rho w^2 + p\}_5) rh_r h_\varphi \cos\check{\psi} = 0,$$

$$(\rho v)_t \tilde{r}^2 h_r h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\psi + (\{\rho uv\}_3 \hat{r}^2 - \{\rho uv\}_1 \check{r}^2) h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\tilde{\psi} +$$
$$+(\{\rho v^2 + p\}_4 + 0.5h_\varphi\{\rho vu\}_4 \cos\tilde{\psi} - 0.5h_\varphi\{\rho vw\}_4 \sin\psi) rh_r \tilde{h}_\psi -$$
$$-(\{\rho v^2 + p\}_2 - 0.5h_\varphi\{\rho vu\}_2 \cos\tilde{\psi} + 0.5h_\varphi\{\rho vw\}_2 \sin\psi) rh_r \tilde{h}_\psi +$$
$$+(\{\rho wv\}_6 \cos\hat{\psi} - \{\rho wv\}_5 \cos\check{\psi}) rh_r h_\varphi = 0,$$

$$(\rho w)_t \tilde{r}^2 h_r h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\psi + (\{\rho uw\}_3 \hat{r}^2 - \{\rho uw\}_1 \check{r}^2) h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\tilde{\psi} +$$

$$+(\{\rho vw\}_4 + 0.5h_\varphi\{\rho v^2 + p\}_4 \sin\psi) r h_r \tilde{h}_\psi -$$

$$-(\{\rho vw\}_2 - 0.5h_\varphi\{\rho v^2 + p\}_2 \sin\psi) r h_r \tilde{h}_\psi +$$

$$+(\{\rho w^2 + p\}_6 + 0.5h_\psi\{\rho wu\}_6) r h_r h_\varphi \cos\hat{\psi} -$$

$$-(\{\rho w^2 + p\}_5 - 0.5h_\psi\{\rho wu\}_5) r h_r h_\varphi \cos\check{\psi} = 0,$$

$$(\rho E)_t \tilde{r}^2 h_r h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\psi + (\{\rho uH\}_3 \hat{r}^2 - \{\rho uH\}_1 \check{r}^2) h_\varphi \tilde{h}_\psi \cos\tilde{\psi} +$$

$$+(\{\rho vH\}_4 - \{\rho vH\}_2) r h_r \tilde{h}_\psi +$$

$$+(\{\rho wH\}_6 \cos\hat{\psi} - \{\rho wH\}_5 \cos\check{\psi}) r h_r h_\varphi = 0. \qquad (2.5)$$

Напомним, что в записи схемы используются следующие обозначения:

$$\hat{r} = r + h_r/2, \check{r} = r - h_r/2, \hat{\psi} = \psi + h_\psi/2, \check{\psi} = \psi - h_\psi/2,$$

$$\tilde{r}^2 = \left(r^2 + h_r^2/12\right), \tilde{h}_\psi = 2\sin\left(h_\psi/2\right), \cos\tilde{\psi} = (\cos\hat{\psi} + \cos\check{\psi})/2.$$

Далее покажем, что уравнения разностной схемы (2.5) имеют второй порядок аппроксимации по пространству при условии, что разностные потоки в базовой декартовой схеме вычисляются с тем же или более высоким порядком точности. Сделаем это на примере уравнения для радиальной компоненты скорости. Используем приближенные равенства, верные с точностью до слагаемых второго либо третьего порядка малости по шагам разностной сетки:

$$\tilde{r} \approx r, \tilde{h}_\psi \approx h_\psi, \hat{r}^2 \approx r^2 + rh_r, \check{r}^2 \approx r^2 - rh_r, \cos\tilde{\psi} \approx \cos\psi,$$

$$\cos\hat{\psi} \approx \cos\psi - 0.5h_\psi \sin\psi, \cos\check{\psi} \approx \cos\psi + 0.5h_\psi \sin\psi.$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение (2.5), получим:

$$(\rho u)_t + \frac{\{\rho u^2 + p\}_3 - \{\rho u^2 + p\}_1}{h_r} + \frac{1}{r\cos\psi}\frac{\{\rho vu\}_4 - \{\rho vu\}_2}{h_\varphi} +$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\{\rho wu\}_6 - \{\rho wu\}_5}{h_\psi} = -\frac{1}{r}\left(\{\rho u^2 + p\}_3 + \{\rho u^2 + p\}_1 -\right.$$

$$-\frac{\{\rho v^2 + p\}_4 + \{\rho v^2 + p\}_2}{2} - \frac{\{\rho w^2 + p\}_6 + \{\rho w^2 + p\}_5}{2} -$$

$$\left.-\frac{\{\rho wu\}_6 + \{\rho wu\}_5}{2}\operatorname{tg}\psi + \frac{\{\rho w^2 + p\}_6 - \{\rho w^2 + p\}_5}{h_\psi}\frac{h_\psi^2}{4}\operatorname{tg}\psi\right).$$

Как легко видеть, в правой части системы возникает аппроксимация радиальной компоненты вектора $\mathbf{R}$ исходной системы (1.3), согласованная с вычислением потоков. Второй порядок аппроксимации по пространству вытекает из симметрии полученного разностного уравнения относительно центра разностной ячейки.

3. Аппроксимация вязких слагаемых

Напомним, что в предыдущем пункте при построении разностной схемы (2.5) не учитывалось влияние тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Поэтому далее обсудим возможные модификации схемы, позволяющие аппроксимировать вязкие слагаемые в уравнениях (1.3), задаваемые вектором $\mathbf{R}_\sigma$.

Будем использовать безиндексные обозначения:

$$\bar{y} = \frac{y_{i+1/2\,jk} + y_{i-1/2\,jk}}{2}, \quad y_{\hat{r}} = \frac{y_{i+1/2\,jk} - y_{i-1/2\,jk}}{h_r}$$

для сеточных функций, определенных в центрах граней ячеек, и

$$y_{\bar{r}r} = \frac{y_{i+1\,jk} - 2y_{ijk} + y_{i-1\,jk}}{h_r^2}, \quad y_r = \frac{y_{i+1\,jk} - y_{ijk}}{h_r}, \quad y_{\mathring{r}} = \frac{y_{i+1\,jk} - y_{i-1\,jk}}{2h_r}$$

для сеточных функций, определенных в центрах ячеек. Аналогичные обозначения используются для средних значений и разностных производных по другим переменным.

Для аппроксимации вязких слагаемых в соответствии с уравнениями (1.2) введем добавки к разностным потокам:

$$\mathbf{F}^{(2)}_{i+1/2\,jk} = \{\rho u^2 + p\}_{i+1/2\,jk} - \mathbf{f}^{(2)}_{i+1/2\,jk},$$

$$\mathbf{F}^{(3)}_{i+1/2\,jk} = \{\rho uv\}_{i+1/2\,jk} - \mathbf{f}^{(3)}_{i+1/2\,jk}, \quad \mathbf{F}^{(4)}_{i+1/2\,jk} = \{\rho uw\}_{i+1/2\,jk} - \mathbf{f}^{(4)}_{i+1/2\,jk}.$$

Аналогично вводятся добавки $\mathbf{g}^{(l)}_{ij+1/2k}$, $\mathbf{h}^{(l)}_{ijk+1/2}$ к потокам $\mathbf{G}^{(l)}_{ij+1/2k}$, $\mathbf{H}^{(l)}_{ijk+1/2}$, где $l = 2,3,4$. Добавки аппроксимируют соответствующие компоненты тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{f}^{(2)}_{i+1/2\,jk} = (2\mu + \lambda)u_{r,ijk} + \lambda\left(\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\cos\psi}v_{\mathring{\varphi}} + w_{\mathring{\psi}} + 2u - w\,\mathrm{tg}\,\psi\right]\right)_{i+1/2\,jk},$$

$$\mathbf{f}^{(3)}_{i+1/2\,jk} = \mu v_{r,ijk} + \mu\left(\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\cos\psi}u_{\mathring{\varphi}} - v\right]\right)_{i+1/2\,jk},$$

$$\mathbf{f}^{(4)}_{i+1/2\,jk} = \mu w_{r,ijk} + \mu\left(\frac{1}{r}\left[u_{\mathring{\psi}} - w\right]\right)_{i+1/2\,jk},$$

$$\mathbf{g}^{(2)}_{ij+1/2k}=\frac{\mu}{r_i}\left(\frac{1}{\cos\psi_k}u_{\varphi,ijk}-v_{ij+1/2k}\right)+\mu v_{\mathring{r},ij+1/2k},$$

$$\mathbf{g}^{(3)}_{ij+1/2k}=\frac{2\mu+\lambda}{r_i}\left(\frac{1}{\cos\psi_k}v_{\varphi,ijk}+u_{ij+1/2k}-w_{ij+1/2k}\operatorname{tg}\psi_k\right)+$$

$$+\frac{\lambda}{r_i}\left(w_{\mathring{\psi}}+u\right)_{ij+1/2k}+\lambda u_{\mathring{r},ij+1/2k},$$

$$\mathbf{g}^{(4)}_{ij+1/2k}=\frac{\mu}{r_i}\left(\frac{1}{\cos\psi_k}w_{\varphi,ijk}+v_{\mathring{\psi},ij+1/2k}+v_{ij+1/2k}\operatorname{tg}\psi_k\right),$$

$$\mathbf{h}^{(2)}_{ijk+1/2}=\frac{\mu}{r_i}\left(u_{\psi,ijk}-w_{ijk+1/2}\right)+\mu w_{\mathring{r},ijk+1/2},$$

$$\mathbf{h}^{(3)}_{ijk+1/2}=\frac{\mu}{r_i}v_{\psi,ijk}+\frac{\mu}{r_i}\left(\frac{1}{\cos\psi}w_{\mathring{\varphi}}+v\operatorname{tg}\psi\right)_{ijk+1/2},$$

$$\mathbf{h}^{(4)}_{ijk+1/2}=\frac{2\mu+\lambda}{r_i}\left(w_{\psi,ijk}+u_{ijk+1/2}\right)+$$

$$+\frac{\lambda}{r_i}\left(\frac{1}{\cos\psi}v_{\mathring{\varphi}}+u-w\operatorname{tg}\psi\right)_{ijk+1/2}+\lambda u_{\mathring{r},ijk+1/2}. \qquad (3.1)$$

Здесь сеточные функции с полуцелыми индексами в правых частях, относящиеся к центрам граней ячейки, вычисляются как полусумма значений этих функций в соответствующих смежных ячейках.

Разностное уравнение движения для радиальной компоненты скорости схемы (2.5) с точностью до слагаемых второго порядка малости по шагам сетки может быть записано в виде:

$$(\rho u)_t=-\mathbf{F}^{(2)}_{\hat{r}}-\frac{2}{r}\bar{\mathbf{F}}^{(2)}-\frac{1}{r\cos\psi}\mathbf{G}^{(2)}_{\hat{\varphi}}+\frac{1}{r}\bar{\mathbf{G}}^{(3)}-\frac{1}{r}\mathbf{H}^{(2)}_{\hat{\psi}}+\frac{\operatorname{tg}\psi}{r}\bar{\mathbf{H}}^{(2)}+\frac{1}{r}\bar{\mathbf{H}}^{(4)}.$$

После подстановки выражений для модифицированных потоков в это уравнение и приведения подобных слагаемых получим:

$$(\mathrm{div}_h\boldsymbol{\sigma})_r=\mathbf{f}^{(2)}_{\hat{r}}+\frac{2}{r}\bar{\mathbf{f}}^{(2)}+\frac{1}{r\cos\psi}\mathbf{g}^{(2)}_{\hat{\varphi}}-\frac{1}{r}\bar{\mathbf{g}}^{(3)}+\frac{1}{r}\mathbf{h}^{(2)}_{\hat{\psi}}-\frac{\operatorname{tg}\psi}{r}\bar{\mathbf{h}}^{(2)}-\frac{1}{r}\bar{\mathbf{h}}^{(4)}=$$

$$=(2\mu+\lambda)\left(u_{\bar{r}r}+\frac{2}{r}u_{\mathring{r}}-\frac{2u}{r^2}\right)+\frac{\mu}{r^2\cos^2\psi}u_{\bar{\varphi}\varphi}+\frac{\mu}{r^2}\left(u_{\bar{\psi}\psi}-u_{\mathring{\psi}}\operatorname{tg}\psi\right)+$$

$$+\frac{\mu+\lambda}{r}\left(\frac{1}{\cos\psi}v_{\mathring{r}\mathring{\varphi}}+w_{\mathring{r}\mathring{\psi}}-w_{\mathring{r}}\operatorname{tg}\psi\right)-\frac{3\mu+\lambda}{r^2}\left(\frac{1}{\cos\psi}v_{\mathring{\varphi}}+w_{\mathring{\psi}}-w\operatorname{tg}\psi\right)+\Psi_r.$$

Здесь Ψ_r – слагаемые второго порядка малости по шагам сетки. Сопоставляя полученное выражение с дифференциальным выражением (1.4), несложно показать второй порядок аппроксимации радиальной компоненты вектора $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}$. Аналогично показывается аппроксимация со вторым порядком вязких слагаемых в оставшихся уравнениях движения.

В уравнении энергии добавки к разностным потокам вводятся следующим образом (см. последнее уравнение системы(1.2)):

$$\mathbf{F}^{(5)}_{i+1/2\,jk} = \{\rho u H\}_{i+1/2\,jk} - \mathbf{f}^{(5)}_{i+1/2\,jk},\ \mathbf{f}^{(5)}_{i+1/2\,jk} = (u\mathbf{f}^{(2)} + v\mathbf{f}^{(3)} + w\mathbf{f}^{(4)})_{i+1/2\,jk},$$

добавки $\mathbf{g}^{(5)}_{ij+1/2k}$, $\mathbf{h}^{(5)}_{ijk+1/2}$ к потокам $\mathbf{G}^{(5)}_{ij+1/2k}$, $\mathbf{H}^{(5)}_{ijk+1/2}$ вводятся аналогично. Подставляя эти выражения в разностное уравнение энергии схемы (2.5), записанное с точностью до слагаемых второго порядка малости в виде

$$(\rho E)_t = -\mathbf{F}^{(5)}_{\hat{r}} - \frac{2}{r}\overline{\mathbf{F}}^{(5)} - \frac{1}{r\cos\psi}\mathbf{G}^{(5)}_{\hat{\varphi}} - \frac{1}{r}\mathbf{H}^{(5)}_{\hat{\psi}} + \frac{\mathrm{tg}\,\psi}{r}\overline{\mathbf{H}}^{(5)},$$

получим

$$\mathrm{div}_h(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}) = \mathbf{f}^{(5)}_{\hat{r}} + \frac{2}{r}\overline{\mathbf{f}}^{(5)} + \frac{1}{r\cos\psi}\mathbf{g}^{(5)}_{\hat{\varphi}} + \frac{1}{r}\mathbf{h}^{(5)}_{\hat{\psi}} - \frac{\mathrm{tg}\,\psi}{r}\overline{\mathbf{h}}^{(5)} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(r^2\left(u\mathbf{f}^{(2)} + v\mathbf{f}^{(3)} + w\mathbf{f}^{(4)}\right)\right)_{\hat{r}} + \frac{1}{r\cos\psi}\left(u\mathbf{g}^{(2)} + v\mathbf{g}^{(3)} + w\mathbf{g}^{(4)}\right)_{\hat{\varphi}} +$$

$$+ \frac{1}{r\cos\psi}\left(\cos\psi\left(u\mathbf{h}^{(2)} + v\mathbf{h}^{(3)} + w\mathbf{h}^{(4)}\right)\right)_{\hat{\psi}} + \Psi_E\,.$$

Здесь Ψ_E – слагаемые второго порядка малости по шагам сетки. Поскольку добавки к разностным потокам со вторым порядком аппроксимируют соответствующие компоненты тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ на гранях разностной ячейки, сопоставляя полученное выражение с дифференциальным выражением (1.5), несложно показать второй порядок аппроксимации вязких слагаемых в разностном уравнении энергии.

4. Результаты тестовых расчетов

В тестовых расчетах, описываемых в данном пункте, в качестве базовой использовалась декартова разностная схема годуновского типа третьего порядка аппроксимации. Потоки первого порядка в этой схеме вычислялись методом Роу [8] с модификациями Эйнфельдта [9]. Повышение порядка аппроксимации схемы до третьего осуществлялось путем коррекции потоков методом Ошера [10]. Схема для сферических координат строилась в соответствии с разностными уравнениями (2.5). Влияние тензора вязких напряжений учитывалось путем введения добавок к сеточным потокам (3.1).

В качестве первого теста была выбрана задача о распаде разрыва внутри непротекаемой сферы радиуса $r = 9$. В шаре с центром в точке $r = 5$, $\varphi = \pi$, $\psi = 0$ радиуса 2 значения плотности и давления покоящегося невязкого газа выбирались равными $\rho \approx 1.7$ и $p \approx 2.5$, в остальных точках расчетной области – $\rho = 1$ и $p = 1$. При таких значениях параметров разрыва на периферию расчетной области распространяется ударная волна, которая впоследствии отражается от непротекаемой границы области (см. рис.2).

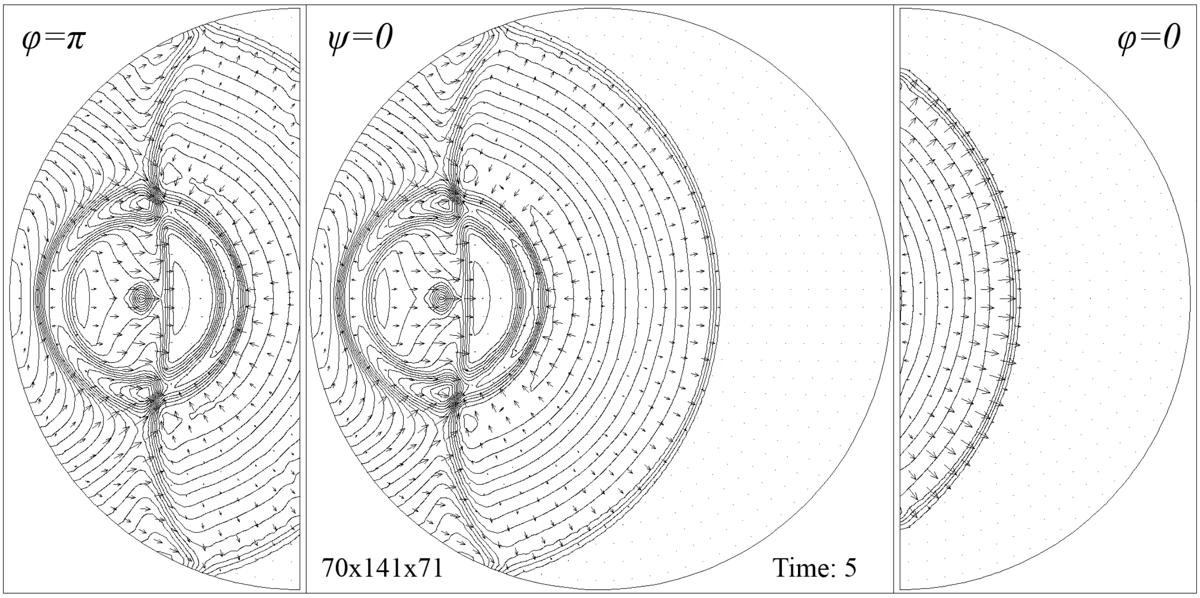


Рис.2. *Расчет распада разрыва при* $T = 5$ *(плотность и скорость)*

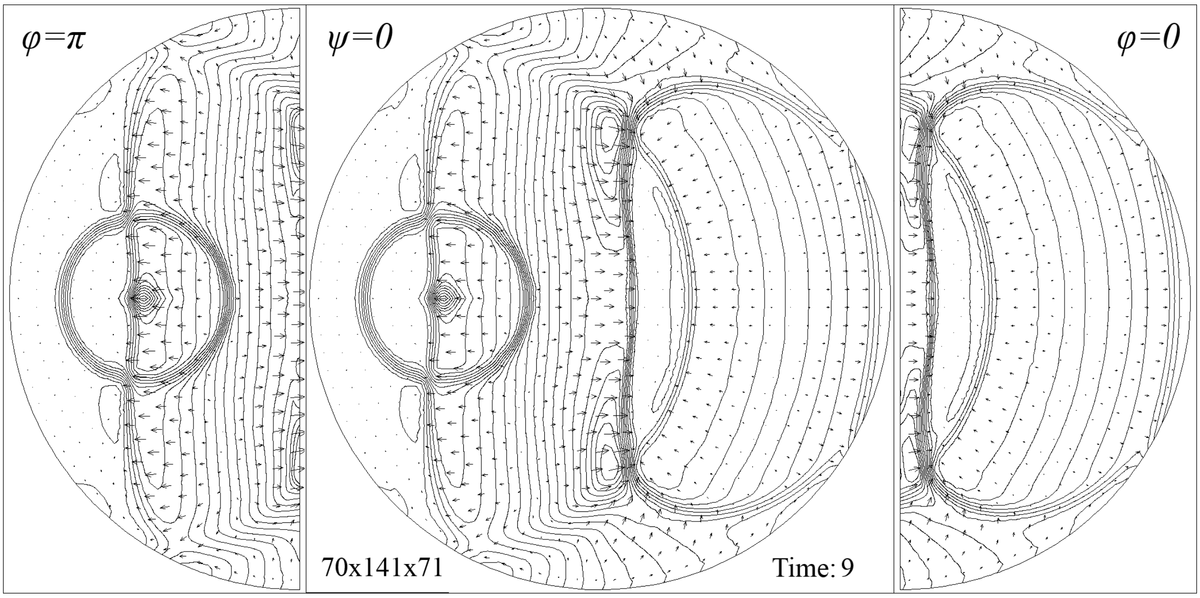


Рис.3. *Расчет распада разрыва при* $T = 9$

Важно отметить, что расчетная область содержит отрезок прямой $\psi = \pm\pi/2$ и, в частности, точку $r = 0$. Указанные точки являются особыми для исходной системы дифференциальных уравнений (1.3). В разностной схеме эта особенность проявляется в том, что соответствующие границы ячеек сетки, примыкающих к оси $\psi = \pm\pi/2$, вырождаются в отрезки или в точки. Однако форма разностных уравнений (2.5) при этом не изменяется, что позволяет вести однородные вычисления во всех узлах сетки.

На рис.2 и рис.3 представлены результаты расчета распада разрыва на равномерной сетке 70x141x71 разностных ячеек по переменным r, φ и ψ соответственно. На рисунках представлены линии уровня плотности и поле скоростей газа в различные моменты времени T в трех сечениях расчетной области: $\varphi = \pi$, $\psi = 0$ и $\varphi = 0$. Здесь следует отметить, что, поскольку сеточные функции относятся к центрам разностных ячеек, значения для сечения $\varphi = 0$ берутся из ближайших ячеек, где $\varphi = h_r/2$.

Как видно на рисунках, фронты ударных волн проходят через ось $\psi = \pm\pi/2$ без каких-либо искажений их формы. При этом важно отметить обусловленную выбором начальных данных симметрию течения в соответствующих сечениях, которая присутствует, несмотря на то, что исходная система дифференциальных уравнений (1.3) и аппроксимирующая ее разностная схема (2.5) не имеет симметрии по переменным φ и ψ.

В качестве второго теста была выбрана задача об обтекании шара плоскопараллельным потоком газа. Рассчитывались течения при дозвуковом и сверхзвуковом обтекании как для случая невязкого, так и для случая вязкого газа. Расчетная область $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ представляла собой пространство между двумя сферами с общим центром. На внутренней границе области задавались условия непротекания, на внешней границе при $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$ – параметры набегающего плоскопараллельного потока: $\rho = \gamma = 1.4$, $u = M\cos\varphi\cos\psi$, $v = -M\sin\varphi$, $w = -M\cos\varphi\sin\psi$, $p = 1$, где M – число Маха. Эти же параметры газа задавались в качестве начальных данных во всех узлах разностной сетки. На внешней границе области при $0 \leqslant \varphi < \pi/2$ и $3\pi/2 < \varphi \leqslant 2\pi$ задавались свободные граничные условия. Расчеты проводились на квазиравномерной разностной сетке [11], узлы которой по углам φ и ψ сгущались за обтекаемым шаром.

На рис.4 представлено сравнение результатов эксперимента по обтеканию шара сверхзвуковым потоком невязкого газа при $M = 1.53$ и расчета с тем же числом Маха. Расчеты проводились на сетке 100x201x81 разностных ячеек при $r_1 = 0.2$, $r_2 = 6$. Фотография картины течения, наблюдаемого в ходе эксперимента, взята из альбома гидродинамических течений [17]. В этом издании, к сожалению, не приводятся все параметры, необходимые для проведения расчетов, в точности соответствующих экспериментам. Однако можно говорить о качественном сходстве. В частности, форма фронта и положение отошедшей ударной волны в расчетном течении совпадают с экспериментальными.

На рис.4 и последующих рисунках приведены линии уровня плотности и поле скоростей газа в сечении расчетной области $\psi = 0$. В других сечениях расчетной области, параллельных набегающему потоку и проходящих через начало координат, картина течения отличается от представленной на рисунках лишь в области неустойчивости за обтекаемым шаром.

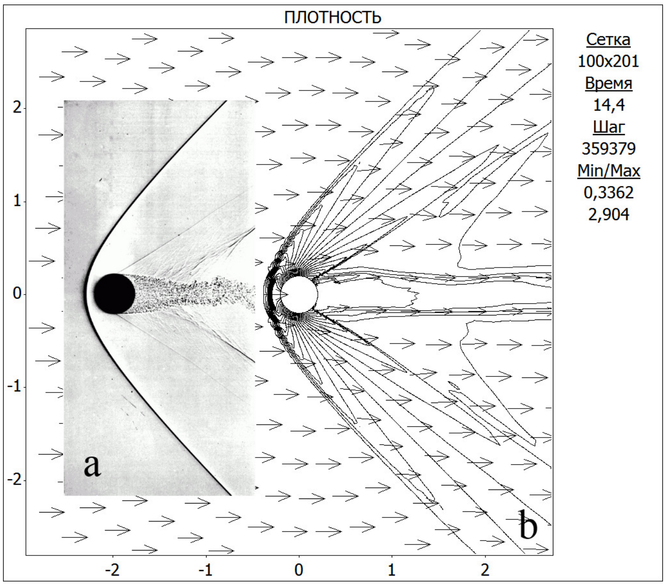
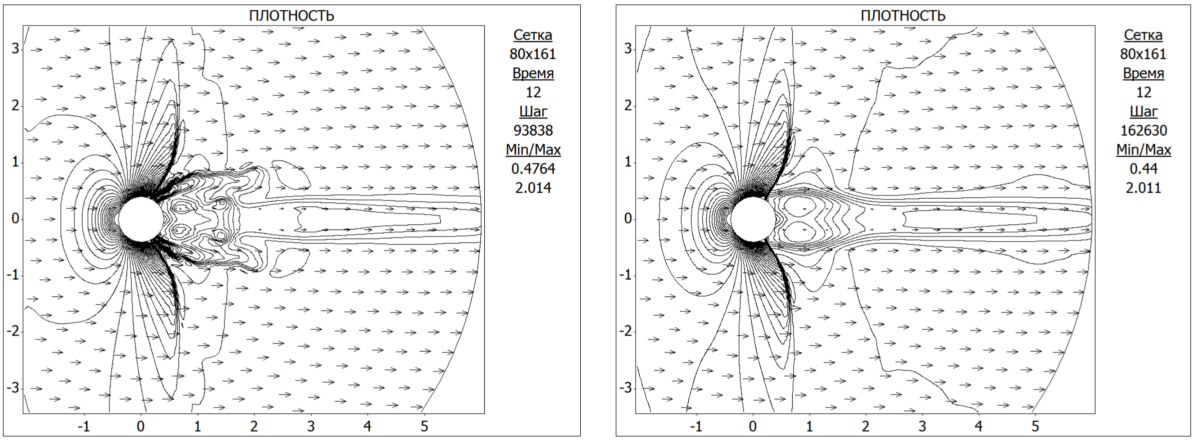


Рис.4. *Обтекание шара при* $M = 1.53$*: а) эксперимент (Charters A.C.), б) расчет на сетке* 100x201x81 *ячеек*

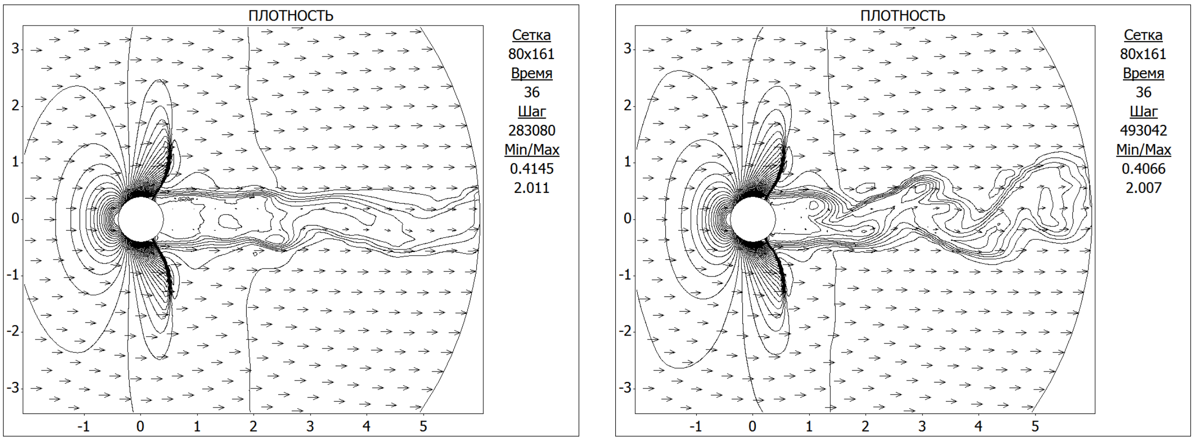
Далее приведем результаты расчетов дозвукового обтекания шара при $M = 0.9$. Расчеты проводились на сетке 80x161x81 разностных ячеек при $r_1 = 0.4$, $r_2 = 6$. В случае вязкого газа коэффициенты вязкости выбирались равными $\mu = 10^{-3}$ и $\lambda = -2\mu/3$. При этом число Рейнольдса, рассчитанное по диаметру обтекаемого шара, скорости и плотности набегающего потока, приблизительно равняется $\mathrm{Re} \approx 1000$. На рис.5 и рис.6 представлено сравнение результатов расчетов для случаев невязкого и вязкого газа на различные моменты времени. Характерным элементом течения здесь является возникновение присоединенных к поверхности обтекаемого шара ударных волн, которые разделяют устойчивую и турбулентную зоны течения. Подобная картина наблюдается [17] и в ходе экспериментов по дозвуковому обтеканию тел при числах Маха близких к единице.

Как видно на рис.5, неустойчивое течение за обтекаемым шаром начинает развиваться раньше в случае невязкого газа. Однако в более поздние моменты времени турбулентность возникает и в случае вязкого газа, причем ее проявления более ярко выражены по сравнению с невязким случаем (см. рис.6). Тем не менее, следует отметить, что различия в характере течения в случаях невязкого и вязкого газа при обтекании шара не являются столь существенными, как при обтекании цилиндра с тем же числом Маха [11].



а б

Рис.5. *Обтекание шара при* $M = 0.9$, $T = 12$*: а) без вязкости, б)* $\mathrm{Re} \approx 1000$



а б

Рис.6. *Обтекание шара при* $M = 0.9$, $T = 36$*: а) без вязкости, б)* $\mathrm{Re} \approx 1000$

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов. – Доклады АН СССР, т.124, с.529, 1959.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989.
3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.:Наука, 1980.
4. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. – Математический сборник, 47(89), с.271, 1959.
5. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обте-

кания с отошедшей ударной волной. – Журн. вычисл. математики и мат. физики, т.1, с.1020, 1961.
6. Osher S., Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. – Math. Comput., v.38, p.339, 1982.
7. Harten A., Lax P.D., Van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation lows. – SIAM Rev., v.25, p.35, 1983.
8. Roe P.L. Characteristic-based schemes for the Euler equations. – Ann. Rev. Fluid Mech., v.18, p.337, 1986.
9. Einfeldt B. On Godunov-type methods for gas dynamics. – SIAM J. Numer. Anal., v.25, p.294, 1988.
10. Chakravarthy S.R., Osher S. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. – AIAA Pap., №85-0363, 1985.
11. Абакумов М.В. Метод построения разностных схем годуновского типа в криволинейных координатах и его применение для цилиндрических координат. – Прикладная математика и информатика, №43, сс. 25-44, М.: МАКС Пресс, 2013.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Серия Теор. физ.,Т.4. – М:.Наука, 1986.
13. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для ВУЗов. – 7-е изд., испр. – М.:Дрофа, 2003.
14. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. – М.: Наука, 1970.
15. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М:.Наука, 1965.
16. Абакумов М.В., Фаворский А.П., Хруленко А.Б. Представление уравнений Навье-Стокса в криволинейных координатах. – М.: Препринт МАКС Пресс, 2011.
17. Van Dyke M. An Album of Fluid Motion. – Stanford: Parabolic Press., 1982