

*М.В. Абакумов*

## **МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ГОДУНОВСКОГО ТИПА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ\***

### **Введение**

Явные консервативные [1], [2], [3] разностные схемы годуновского типа, часто называемые также потоковыми, активно используются при численном решении широкого класса прикладных задач, для которых необходимо математическое моделирование газодинамических течений. Это относится, например, к задачам современной астрофизики, где зачастую возникает необходимость осуществлять расчеты нестационарных течений на длительных промежутках времени, что требует большого количества временных шагов.

В схемах годуновского типа разностные потоки, которые, как правило, относятся к границам разностных ячеек, вычисляются различными способами. Изначально С.К.Годуновым [4], [5] было предложено вычислять потоки на границах ячеек путем точного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Нахождение потоков таким способом предполагает решение нелинейных алгебраических уравнений в каждой ячейке разностной сетки, что требует значительного количества арифметических операций. Поэтому дальнейшее развития подхода, предложенного С.К.Годуновым, привело к появлению разностных схем, в которых задача Римана решается приближенно (см., например, [6]–[10]).

Во многих прикладных задачах уравнения, описывающие течения газа, удобно записывать в криволинейных, в частности, цилиндрических или сферических координатах. В потоковой форме записи эти уравнения в отличие от декартовых не являются однородными, что порождает определенную специфику построения консервативных разностных схем годуновского типа.

В работе предлагается достаточно общий метод построения консервативных разностных схем в ортогональных криволинейных координатах на основе произвольной потоковой декартовой схемы. Метод технологичен в том смысле, что для реализации схемы в криволинейных координатах

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №12-01-00606 и НШ-1434.2012.2.

тах достаточно внести минимальные дополнения в программный код базовой декартовой схемы.

В рамках данной работы метод демонстрируется на примере цилиндрических координат. Выписывается система уравнений сжимаемого вязкого газа в произвольной ортогональной системе координат для случая произвольного симметричного тензора напряжений. Уравнения в цилиндрических координатах получаются исходя из обычного предположения линейной зависимости тензора напряжений второго ранга от производных скорости по пространству. Строится потоковая схема общего вида, аппроксимирующая полученные уравнения, в предположении, что алгоритм вычисления сеточных потоков базовой декартовой схемы известен. Приводится вид разностных добавок к сеточным потокам, обеспечивающих аппроксимацию вязких слагаемых в уравнениях движения и энергии.

Проводятся тестовые расчеты течений вязкого и невязкого газа по построенной схеме второго порядка аппроксимации по пространству, в которой сеточные потоки вычисляются методом Роу [8] с модификациями Эйнфельдта [9] и Ошера [10]. Результаты расчетов задач обтекания цилиндра сравниваются с данными экспериментов.

Автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. РАН, профессору Попову Ю.П. за ценные замечания и доброжелательный интерес к работе.

## 1. Уравнения сжимаемого вязкого газа в криволинейных ортогональных координатах

Выпишем инвариантную (не зависящую от выбора системы координат) форму уравнений сжимаемого вязкого идеального газа (см. [11], [12], [13]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= \operatorname{div} \mathbf{\Pi}, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \mathbf{v}) &= \operatorname{div}(\mathbf{\Pi} \mathbf{v}), \\ E &= \varepsilon + \mathbf{v}^2/2, \quad \mathbf{\Pi} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

с уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon.$$

Здесь  $t$  – время,  $\rho$  – плотность газа,  $p$  – давление,  $\varepsilon$  – удельная (массовая) внутренняя энергия,  $E$  – полная удельная энергия,  $\mathbf{v}$  – скорость газа,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\mathbf{\Pi}$  – тензор напряжений,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор вязких напряжений.

В прямоугольной декартовой системе координат  $(y^1, y^2, y^3)$ , орты которой будем обозначать  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ , компоненты тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  определяются следующим образом (см. [11], [12], [13]):

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} = \mu \left( \frac{\partial v_k}{\partial y^i} + \frac{\partial v_i}{\partial y^k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v},$$

где  $\mu > 0$  – коэффициент динамической вязкости,  $\zeta$  обычно называют коэффициентом второй вязкости,  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера.

Далее рассмотрим криволинейную систему координат

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3), (y^1, y^2, y^3) \in E_3, i = 1, 2, 3.$$

Здесь  $E_3$  – трехмерное евклидово пространство,  $(x^1, x^2, x^3) \in D_3$ ,  $D_3$  – некоторая открытая область арифметического пространства трех измерений. Ортогональная криволинейная система координат характеризуется компонентами метрического тензора

$$g_{ii} = 1 / g^{ii} = H_i^2, g_{ik} = g^{ik} = 0 (i \neq k),$$

где  $H_i$  – коэффициенты Ламе [14],  $g = H_1^2 H_2^2 H_3^2$ .

Выпишем систему уравнений сжимаемого вязкого газа (1.1) в произвольной ортогональной системе координат для случая произвольного симметричного тензора напряжений  $\Pi$  (подробный вывод последующих равенств можно найти, например, в работах [15], [16]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\sqrt{g}}{H_i} \rho v_i \right) &= 0, \\ \frac{\partial (H_k \rho v_k)}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} \frac{H_k}{H_i} (\rho v_k v_i - p_{ik}) \right) &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i} (\rho v_i^2 - p_{ii}) \frac{\partial H_i}{\partial x^k}, \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\sqrt{g}}{H_i} \left( \rho E v_i - \sum_{k=1}^3 p_{ik} v_k \right) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В рассматриваемом случае  $p_{ik} = -p \delta_{ik} + \sigma_{ik}$ .

Приведем выражения для компонент тензора вязких напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ . Для удобства записи последующих формул представим этот тензор в виде суммы двух тензоров  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}, \mathbf{B} = \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{v}, \lambda = \zeta - \frac{2}{3} \mu,$$

компоненты которых в декартовых координатах имеют вид:

$$a_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i}, b_{ik} = \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

В ортогональных криволинейных координатах

$$a_{ik} = \frac{1}{H_i H_k} \left[ H_i \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + H_k \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - v_i \frac{\partial H_i}{\partial x^k} - v_k \frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \delta_{ik} \sum_{m=1}^3 \frac{v_m}{H_m} \frac{\partial(H_i H_k)}{\partial x^m} \right],$$

$$b_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left( \sqrt{g} \frac{v_m}{H_m} \right) = \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

В дальнейшем также используются равенства:

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_{x^i} = \frac{1}{H_i \sqrt{g}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sqrt{g} \frac{H_i}{H_k} a_{ik} \right) - \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \frac{a_{kk}}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i},$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{B})_{x^i} = \frac{1}{H_i \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) - \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{H_i} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i},$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^3 v_i (\operatorname{div} \mathbf{A})_{x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}^2,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B} \mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\sqrt{g} v_k \operatorname{div} \mathbf{v}}{H_k} \right).$$

## 2. Уравнения в цилиндрических координатах

Выпишем систему уравнений сжимаемого вязкого газа в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ . Переход от цилиндрических координат к прямоугольным декартовым  $(x, y, z)$  определяется равенствами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

то есть координата  $z$  не изменяется, радиус  $r$  определяет расстояние от точки  $M(x, y, z)$  до оси  $z$ ,  $\varphi$  – полярный угол. В цилиндрических координатах:

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\varphi = r, \quad H_3 = H_z = 1, \quad \sqrt{g} = r.$$

Подставляя эти значения в систему (1.2) и используя для сокращения записи обозначения  $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z) = (u, v, w)$ , получим уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_\sigma,$$

$$\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T,$$

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, \rho uH)^T,$$

$$\mathbf{G} = (\rho v, \rho vu, \rho v^2 + p, \rho vw, \rho vH)^T,$$

$$\mathbf{H} = (\rho w, \rho wu, \rho wv, \rho w^2 + p, \rho wH)^T,$$

$$\mathbf{R} = -\frac{\rho}{r} (u, u^2 - v^2, 2uv, uw, uH)^T,$$

$$\mathbf{R}_\sigma = (0, (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})_r, (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})_\varphi, (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})_z, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}))^T,$$

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad E = \varepsilon + \mathbf{v}^2/2, \quad H = E + p/\rho, \quad \mathbf{v} = (u, v, w). \quad (2.1)$$

Здесь  $H$  – полная удельная энтальпия (обозначение не внесет путаницы, поскольку коэффициенты Ламе далее в тексте не используются).

Для компонент тензора вязких напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  получим следующие выражения:

$$\sigma_{rr} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \mu \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu + \lambda}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) + \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

$$\sigma_{zz} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial r}.$$

Компоненты вектора  $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}$  примут вид:

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})_r = \mu \left( \Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial r} (\operatorname{div}\mathbf{v}),$$

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})_\varphi = \mu \left( \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} \right) + (\mu + \lambda) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{div}\mathbf{v}),$$

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})_z = \mu \Delta w + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div}\mathbf{v}),$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Приведем также развернутую запись для радиальной компоненты вектора  $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}$ , которая используется в дальнейшем:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})_r &= (2\mu + \lambda) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \\ &\quad - \frac{3\mu + \lambda}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + (\mu + \lambda) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Выражение для  $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v})$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r(u\sigma_{rr} + v\sigma_{\varphi r} + w\sigma_{zr}) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u\sigma_{r\varphi} + v\sigma_{\varphi\varphi} + w\sigma_{z\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (u\sigma_{rz} + v\sigma_{\varphi z} + w\sigma_{zz}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

### 3. Разностная схема

В данном пункте рассмотрим разностную аппроксимацию системы (2.1) без учета вязких слагаемых, то есть временно будем считать вектор  $\mathbf{R}_\sigma$  нулевым. При этом все уравнения системы (2.1) остаются неоднородными, и при построении разностной схемы возникает задача аппроксимации правой части  $\mathbf{R}$ , обеспечивающей консервативность [1], [2], [3].

При построении потоковых разностных схем для гиперболических систем уравнений подобных (2.1) активно используются характеристические свойства таких систем (см., например, [4]–[10]). Эти свойства определяются спектральными свойствами матриц

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Заметим, что эти матрицы с точностью до обозначений совпадают с матрицами системы (1.1), записанной в декартовых координатах. Это позволяет рассмотреть вспомогательную систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

для аппроксимации которой можно использовать какую-либо декартову схему Годуновского типа [4], [5]

$$\frac{\hat{\mathbf{q}}_{ijk} - \mathbf{q}_{ijk}}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2,jk} - \mathbf{F}_{i-1/2,jk}}{h_r} + \frac{\mathbf{G}_{ij+1/2,k} - \mathbf{G}_{ij-1/2,k}}{h_\varphi} + \frac{\mathbf{H}_{ijk+1/2} - \mathbf{H}_{ijk-1/2}}{h_z} = 0.$$

Здесь  $h_r$ ,  $h_\varphi$ ,  $h_z$  – шаги равномерной сетки по переменным  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$  соответственно,  $\tau$  – шаг по времени, обозначение  $\hat{\mathbf{y}}$  используется для сеточных функций, вычисляемых на следующем временном слое.

Отметим, что вспомогательная система (3.1) получается, если считать координаты  $(r, \varphi, z)$  не криволинейными цилиндрическими, а прямоугольными декартовыми. Таким образом, сеточные потоки  $\mathbf{F}_{i\pm 1/2,jk}$ ,  $\mathbf{G}_{ij\pm 1/2,k}$ ,  $\mathbf{H}_{ijk\pm 1/2}$  формально относятся к центрам соответствующих граней прямоугольной разностной ячейки. Конкретный метод вычисления сеточных потоков в приведенной декартовой схеме для построения на ее основе цилиндрической схемы не является существенным. Однако следует отметить специфику потоковых схем, которая состоит в том, что на гранях ячеек зачастую вычисляются не функции по отдельности, а лишь их потоковые комбинации.

Таким образом, будем предполагать, что в результате вычисления потоков  $\mathbf{F}_{i\pm 1/2,jk}$ ,  $\mathbf{G}_{ij\pm 1/2,k}$ ,  $\mathbf{H}_{ijk\pm 1/2}$  в центрах граней разностной ячейки, пронумерованных индексами  $1, 2, \dots, 6$ , определяются векторы:

$$\mathbf{F}_{1,3} = (\{\rho u\}, \{\rho u^2 + p\}, \{\rho uv\}, \{\rho uw\}, \{\rho uH\})_{1,3}^T,$$

$$\mathbf{G}_{2,4} = (\{\rho v\}, \{\rho v u\}, \{\rho v^2 + p\}, \{\rho v w\}, \{\rho v H\})_{2,4}^T,$$

$$\mathbf{H}_{5,6} = (\{\rho w\}, \{\rho w u\}, \{\rho w v\}, \{\rho w^2 + p\}, \{\rho w H\})_{5,6}^T.$$

Наличие фигурных скобок у компонент этих векторов означает, что известными предполагаются лишь указанные в скобках потоковые комбинации сеточных функций.

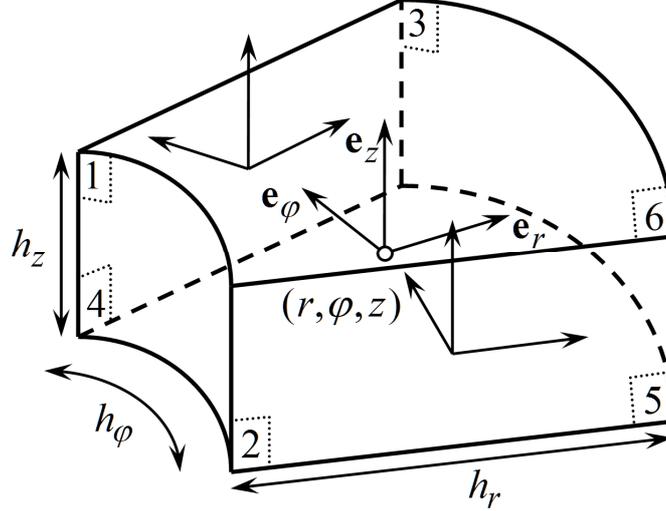


Рис.1. Цилиндрическая разностная ячейка

Далее учтем, что разностная ячейка, локальная нумерация граней которой приведена на рис.1, в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  на самом деле является не прямоугольной, а криволинейной. Для этого аппроксимируем интегральные соотношения баланса массы, импульса и энергии:

$$\begin{aligned} \int_V [\rho(t+\tau) - \rho(t)] dV + \int_t^{t+\tau} \int_{\Sigma} \rho(\mathbf{v}, \mathbf{n}) d\Sigma dt &= 0, \\ \int_V [\rho(t+\tau)\mathbf{v}(t+\tau) - \rho(t)\mathbf{v}(t)] dV + \int_t^{t+\tau} \int_{\Sigma} [\rho(\mathbf{v}, \mathbf{n})\mathbf{v} + p\mathbf{n}] d\Sigma dt &= 0, \\ \int_V [\rho(t+\tau)E(t+\tau) - \rho(t)E(t)] dV + \int_t^{t+\tau} \int_{\Sigma} \rho(\mathbf{v}, \mathbf{n})H d\Sigma dt &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

считая, что интегрирование ведется по объему криволинейной разностной ячейки  $V$  и ее границе  $\Sigma$ . Векторы  $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$  по-прежнему будем считать известными в центрах соответствующих граней ячейки. При этом будем предполагать, что скорость  $\mathbf{v}$  имеет компоненты  $(u, v, w)$  в локальном базисе центра соответствующей грани. Это важно отметить, поскольку для граней 2 и 4 цилиндрической ячейки указанные базисы отличаются от локального базиса ее центра.

Далее предположим, что в какой-либо декартовой системе координат  $(y_1, y_2, y_3)$  с ортами  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  грань  $\tilde{\Sigma}$  разностной ячейки имеет параметризацию

$$y_m = y_m(\alpha, \beta); m = 1, 2, 3; (\alpha, \beta) \in \Omega_{\alpha\beta}.$$

При аппроксимации поверхностных интегралов будем считать постоянными на грани  $\tilde{\Sigma}$  вектор скорости  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  и скалярные функции  $\rho, p, H$ . Эти значения по-прежнему не предполагаются известными по отдельности.

Получим приближенное значение интеграла

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Sigma}} \rho(\mathbf{v}, \mathbf{n}) d\Sigma &= \int_{\tilde{\Sigma}} \rho(v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3) d\Sigma \approx \\ &\approx \sum_{m=1}^3 \rho v_m \int_{\tilde{\Sigma}} n_m d\Sigma = \pm \sum_{m=1}^3 \rho v_m \int_{\Omega_{\alpha\beta}} \tilde{n}_m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \pm \rho \sum_{m=1}^3 v_m \eta_m. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{n}_1 &= \frac{\partial(y_2, y_3)}{\partial(\alpha, \beta)}, \tilde{n}_2 = \frac{\partial(y_3, y_1)}{\partial(\alpha, \beta)}, \tilde{n}_3 = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(\alpha, \beta)}, \\ \eta_m &= \int_{\Omega_{\alpha\beta}} \tilde{n}_m(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Тогда приближенные выражения для потоков массы, импульса и энергии через грань  $\tilde{\Sigma}$  примут вид:

$$F_{\tilde{\Sigma}}^M = \rho(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) = \pm \rho \sum_{m=1}^3 v_m \eta_m, \quad \mathbf{F}_{\tilde{\Sigma}}^I = F_{\tilde{\Sigma}}^M \mathbf{v} + p \boldsymbol{\eta}, \quad F_{\tilde{\Sigma}}^E = F_{\tilde{\Sigma}}^M H. \quad (3.3)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \pm(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  в базисе  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ , знак в выражении для вектора  $\boldsymbol{\eta}$  определяется выбором внешней нормали грани  $\tilde{\Sigma}$ .

Далее аппроксимируем интегральные уравнения баланса (3.2) разностными соотношениями:

$$\rho_t \Delta V + \sum_{k=1}^6 F_k^M = 0, \quad (\rho \mathbf{v})_t \Delta V + \sum_{k=1}^6 F_k^I = 0, \quad (\rho E)_t \Delta V + \sum_{k=1}^6 F_k^E = 0. \quad (3.4)$$

Здесь  $\Delta V$  – объем разностной ячейки, обозначение  $y_t$  используется для разностной производной вперед (по времени) сеточной функции, определенной в центре разностной ячейки. Важно отметить, что в разностном уравнении движения (3.4) скорость  $\mathbf{v}$  считается заданной в локальном базисе центра разностной ячейки, поэтому к этому базису должны быть приведены векторы  $F_k^I$ , компоненты которых вычислялись в базисе  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ .

Описанный метод может быть использован при построении разностной схемы, аппроксимирующей уравнения (1.2), в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. Однако для дальнейшей детализации формул (3.4) вернемся к случаю цилиндрических координат.

Введем декартову систему координат  $(y_1, y_2, y_3)$ , ось  $y_3$  которой совпадает с осью  $z$ , а ось  $y_1$  проходит через центр  $(r, \varphi, z)$  разностной ячейки. Тогда орты выбранной декартовой системы  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  совпадают с векторами локального (нормированного) базиса  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  центра ячейки.

Выпишем приближенные значения потоков для грани 1, параметрическое задание которой имеет вид:

$$y_1 = \check{r} \cos \alpha, y_2 = \check{r} \sin \alpha, y_3 = \beta, \alpha \in [-\varphi_h, \varphi_h], \beta \in [-z_h, z_h].$$

Для данного участка границы

$$\tilde{n}_1 = \check{r} \cos \alpha, \tilde{n}_2 = \check{r} \sin \alpha, \tilde{n}_3 = 0, \boldsymbol{\eta} = -(1, 0, 0) \check{r} \tilde{h}_\varphi h_z.$$

Здесь и далее будем использовать обозначения:

$$r_h = h_r/2, \varphi_h = h_\varphi/2, z_h = h_z/2, \check{r} = r - r_h, \hat{r} = r + r_h, \tilde{h}_\varphi = 2 \sin(\varphi_h).$$

Вектор скорости на рассматриваемой грани имеет вид  $\mathbf{v} = \{(u, v, w)\}_1$ , где индекс “1” означает, что соответствующие значения относятся к центру грани. Исходя из равенств (3.3), получим приближенные выражения для потоков:

$$F_1^M = -\{\rho u\}_1 \check{r} \tilde{h}_\varphi h_z, F_1^E = -\{\rho u H\}_1 \check{r} \tilde{h}_\varphi h_z,$$

$$F_1^I = -\left(\{\rho u^2 + p\}_1, \{\rho uv\}_1, \{\rho uw\}_1\right) \check{r} \tilde{h}_\varphi h_z.$$

Важно отметить, что полученные значения выражаются через потоковые комбинации (компоненты вектора  $\mathbf{F}_1$ ), которые считаются известными в центре грани, а компоненты вектора  $\mathbf{F}_1^I$  записаны в базисе  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ , совпадающем с локальным базисом  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  в центре разностной ячейки.

Для грани с номером 5:

$$y_1 = \beta \cos \alpha, y_2 = \beta \sin \alpha, y_3 = -z_h, \alpha \in [-\varphi_h, \varphi_h], \beta \in [\check{r}, \hat{r}];$$

$$\tilde{n}_1 = \tilde{n}_2 = 0, \tilde{n}_3 = -\beta; \boldsymbol{\eta} = -(0, 0, 1) r h_r h_\varphi; \mathbf{v} = \{(u, v, w)\}_5.$$

Отсюда получим следующие выражения для потоков:

$$F_5^M = -\{\rho w\}_5 r h_r h_\varphi, F_5^E = -\{\rho w H\}_5 r h_r h_\varphi,$$

$$F_5^I = -\left(\{\rho w u\}_5, \{\rho w v\}_5, \{\rho w^2 + p\}_5\right) r h_r h_\varphi.$$

Перейдем к рассмотрению грани с номером 2. Следует учесть, что вектор скорости  $\mathbf{v}$  на данном участке границы имеет компоненты  $\{(u, v, w)\}_2$  в локальном базисе  $(\tilde{\mathbf{e}}_r, \tilde{\mathbf{e}}_\varphi, \tilde{\mathbf{e}}_z)$  центра грани 2. Нам же необходимо найти компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$  в локальном базисе  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  центра ячейки. При этом базис  $(\tilde{\mathbf{e}}_r, \tilde{\mathbf{e}}_\varphi, \tilde{\mathbf{e}}_z)$  получается из базиса  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  поворотом последнего на угол  $-\varphi_h$  относительно оси  $y_3$ .

Учтем правило преобразования компонент произвольного вектора  $\mathbf{a}$ , заданного в ортонормированном базисе  $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ , при переходе к другому ортонормированному базису  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , если первый базис получается поворотом второго относительно одного из векторов  $\mathbf{e}_k$  на угол  $\varphi$  против часовой стрелки. Пусть  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$  – коэффициенты разложения вектора  $\mathbf{a}$  по первому базису,  $a_1, a_2, a_3$  – по второму базису. Тогда

$$(a_1, a_2, a_3) = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) \mathbf{M}_k(-\varphi),$$

где  $\mathbf{M}_k(\varphi)$  – матрица поворота относительно  $\mathbf{e}_k$  на угол  $\varphi$ . Для  $k = 3$  эта матрица имеет вид:

$$\mathbf{M}_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для грани с номером 2:

$$y_1 = \beta \cos \varphi_h, y_2 = -\beta \sin \varphi_h, y_3 = \alpha, \alpha \in [-z_h, z_h], \beta \in [\hat{r}, \check{r}];$$

$$\tilde{n}_1 = \sin \varphi_h, \tilde{n}_2 = \cos \varphi_h, \tilde{n}_3 = 0; \boldsymbol{\eta} = -(\sin \varphi_h, \cos \varphi_h, 0) h_r h_z.$$

Компоненты скорости  $\mathbf{v}$  в базисе  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  примут вид

$$(v_1, v_2, v_3) = \{(u, v, w)\}_2 \mathbf{M}_3(\varphi_h) =$$

$$= \{(u \cos \varphi_h + v \sin \varphi_h, -u \sin \varphi_h + v \cos \varphi_h, w)\}_2.$$

Отсюда, с учетом равенства  $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) = -\{v\}_2 h_r h_z$ , получим:

$$F_2^M = -\{\rho v\}_2 h_r h_z, F_2^E = -\{\rho v H\}_2 h_r h_z,$$

$$(F_2^I)_r = -(\{\rho v u\}_2 \cos \varphi_h + \{\rho v^2 + p\}_2 \sin \varphi_h) h_r h_z,$$

$$(F_2^I)_\varphi = -(\{\rho v^2 + p\}_2 \cos \varphi_h - \{\rho v u\}_2 \sin \varphi_h) h_r h_z,$$

$$(F_2^I)_z = -\{\rho v w\}_2 h_r h_z.$$

Подставляя в уравнения (3.4), где  $\Delta V = r h_r h_\varphi h_z$ , найденные значения сеточных потоков и аналогичные выражения для оставшихся граней, получим консервативную разностную схему:

$$\rho_i r h_r h_\varphi h_z + (\{\rho u\}_3 \hat{r} - \{\rho u\}_1 \check{r}) \tilde{h}_\varphi h_z + (\{\rho v\}_4 - \{\rho v\}_2) h_r h_z +$$

$$\begin{aligned}
& +(\{\rho w\}_6 - \{\rho w\}_5)rh_r h_\varphi = 0, \\
& (\rho u)_t rh_r h_\varphi h_z + (\{\rho u^2 + p\}_3 \hat{r} - \{\rho u^2 + p\}_1 \check{r})\tilde{h}_\varphi h_z + \\
& +(\{\rho v u\}_4 - \{\rho v u\}_2)\cos\varphi_h h_r h_z - (\{\rho v^2 + p\}_4 + \{\rho v^2 + p\}_2)\sin\varphi_h h_r h_z + \\
& +(\{\rho w u\}_6 - \{\rho w u\}_5)rh_r h_\varphi = 0, \\
& (\rho v)_t rh_r h_\varphi h_z + (\{\rho u v\}_3 \hat{r} - \{\rho u v\}_1 \check{r})\tilde{h}_\varphi h_z + \\
& +(\{\rho v^2 + p\}_4 - \{\rho v^2 + p\}_2)\cos\varphi_h h_r h_z + (\{\rho v u\}_4 + \{\rho v u\}_2)\sin\varphi_h h_r h_z + \\
& +(\{\rho w v\}_6 - \{\rho w v\}_5)rh_r h_\varphi = 0, \\
& (\rho w)_t rh_r h_\varphi h_z + (\{\rho u w\}_3 \hat{r} - \{\rho u w\}_1 \check{r})\tilde{h}_\varphi h_z + \\
& +(\{\rho v w\}_4 - \{\rho v w\}_2)h_r h_z + (\{\rho w^2 + p\}_6 - \{\rho w^2 + p\}_5)rh_r h_\varphi = 0, \\
& (\rho E)_t rh_r h_\varphi h_z + (\{\rho u H\}_3 \hat{r} - \{\rho u H\}_1 \check{r})\tilde{h}_\varphi h_z + \\
& +(\{\rho v H\}_4 - \{\rho v H\}_2)h_r h_z + (\{\rho w H\}_6 - \{\rho w H\}_5)rh_r h_\varphi = 0. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $\cos\varphi_h = 1 + O(h_\varphi^2)$ ,  $\sin\varphi_h = 0.5h_\varphi + O(h_\varphi^3)$ , уравнения (3.5) с точностью до слагаемых второго порядка малости по  $h_\varphi$  могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\rho_t + \frac{\{\rho u\}_3 - \{\rho u\}_1}{h_r} + \frac{1}{r} \frac{\{\rho v\}_4 - \{\rho v\}_2}{h_\varphi} + \frac{\{\rho w\}_6 - \{\rho w\}_5}{h_z} &= -\frac{1}{r} \frac{\{\rho u\}_1 + \{\rho u\}_3}{2}, \\
(\rho u)_t + \frac{\{\rho u^2 + p\}_3 - \{\rho u^2 + p\}_1}{h_r} + \frac{1}{r} \frac{\{\rho v u\}_4 - \{\rho v u\}_2}{h_\varphi} + \frac{\{\rho w u\}_6 - \{\rho w u\}_5}{h_z} &= \\
= -\frac{1}{r} \left( \frac{\{\rho u^2 + p\}_1 + \{\rho u^2 + p\}_3}{2} - \frac{\{\rho v^2 + p\}_2 + \{\rho v^2 + p\}_4}{2} \right), \\
(\rho v)_t + \frac{\{\rho u v\}_3 - \{\rho u v\}_1}{h_r} + \frac{1}{r} \frac{\{\rho v^2 + p\}_4 - \{\rho v^2 + p\}_2}{h_\varphi} + \frac{\{\rho w v\}_6 - \{\rho w v\}_5}{h_z} &= \\
= -\frac{1}{r} \frac{\{\rho u v\}_1 + \{\rho u v\}_3 + \{\rho v u\}_2 + \{\rho v u\}_4}{2}, \\
(\rho w)_t + \frac{\{\rho u w\}_3 - \{\rho u w\}_1}{h_r} + \frac{1}{r} \frac{\{\rho v w\}_4 - \{\rho v w\}_2}{h_\varphi} + \frac{\{\rho w^2 + p\}_6 - \{\rho w^2 + p\}_5}{h_z} &= \\
= -\frac{1}{r} \frac{\{\rho u w\}_1 + \{\rho u w\}_3}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\rho E)_t + \frac{\{\rho u H\}_3 - \{\rho u H\}_1}{h_r} + \frac{1}{r} \frac{\{\rho v H\}_4 - \{\rho v H\}_2}{h_\varphi} + \frac{\{\rho w H\}_6 - \{\rho w H\}_5}{h_z} = \\
= -\frac{1}{r} \frac{\{\rho u H\}_1 + \{\rho u H\}_3}{2}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Из такой формы записи легко видеть, что уравнения (3.5) аппроксимируют исходную систему дифференциальных уравнений (2.1), и в правой части получается аппроксимация вектора  $\mathbf{R}$ , согласованная с вычислением потоков. При этом, в силу симметрии разностных уравнений (3.6) относительно центра разностной ячейки, несложно показать, что порядок аппроксимации схемы (3.5) по пространству будет вторым, при условии, что со вторым (или более высоким) порядком аппроксимации вычисляются соответствующие сеточные потоки  $\mathbf{F}_{i\pm 1/2, jk}$ ,  $\mathbf{G}_{ij\pm 1/2, k}$ ,  $\mathbf{H}_{ijk\pm 1/2}$  взятой за основу декартовой схемы.

#### 4. Аппроксимация вязких слагаемых

В данном пункте рассмотрим модификации построенной схемы (3.5), позволяющие аппроксимировать со вторым порядком вязкие слагаемые в уравнениях (2.1), задаваемые вектором  $\mathbf{R}_\sigma$ . Для упрощения последующего изложения будем использовать безиндексные обозначения:

$$\bar{y} = \frac{y_{i+1/2, jk} + y_{i-1/2, jk}}{2}, \quad y_{\bar{r}} = \frac{y_{i+1/2, jk} - y_{i-1/2, jk}}{h_r}$$

для сеточных функций, определенных в центрах граней ячеек, и

$$y_{\bar{r}\bar{r}} = \frac{y_{i+1, jk} - 2y_{ijk} + y_{i-1, jk}}{h_r^2}, \quad y_r = \frac{y_{i+1, jk} - y_{ijk}}{h_r}, \quad y_r^\circ = \frac{y_{i+1, jk} - y_{i-1, jk}}{2h_r}$$

для сеточных функций, определенных в центрах ячеек. Аналогичные обозначения используются для средних значений и разностных производных по другим переменным.

Введем добавки к разностным потокам:

$$\mathbf{F}_{i+1/2, jk}^{(2)} = \{\rho u^2 + p\}_{i+1/2, jk} - \mathbf{f}_{i+1/2, jk}^{(2)},$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2, jk}^{(3)} = \{\rho uv\}_{i+1/2, jk} - \mathbf{f}_{i+1/2, jk}^{(3)}, \quad \mathbf{F}_{i+1/2, jk}^{(4)} = \{\rho uw\}_{i+1/2, jk} - \mathbf{f}_{i+1/2, jk}^{(4)}.$$

Аналогично вводятся добавки  $\mathbf{g}_{ij+1/2, k}^{(k)}$ ,  $\mathbf{h}_{ijk+1/2}^{(k)}$  к потокам  $\mathbf{G}_{ij+1/2, k}^{(k)}$ ,  $\mathbf{H}_{ijk+1/2}^{(k)}$ , где  $k = 2, 3, 4$ . Добавки выбираются исходя из аппроксимации соответствующих компонент тензора вязких напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  следующим образом:

$$\mathbf{f}_{i+1/2, jk}^{(2)} = (2\mu + \lambda)u_{r,ijk} + \lambda \left( \frac{v_\varphi^\circ + u}{r} \right)_{i+1/2, jk} + \lambda w_{z, i+1/2, jk}^\circ,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{i+1/2,jk}^{(3)} &= \mu v_{r,ijk} + \mu \left( \frac{u_{\varphi}^{\circ} - v}{r} \right)_{i+1/2,jk}, \quad \mathbf{f}_{i+1/2,jk}^{(4)} = \mu w_{r,ijk} + \mu u_{z,i+1/2,jk}^{\circ}, \\
\mathbf{g}_{ij+1/2k}^{(2)} &= \frac{\mu}{r_i} (u_{\varphi,ijk} - v_{ij+1/2k}) + \mu v_{r,ij+1/2k}^{\circ}, \\
\mathbf{g}_{ij+1/2k}^{(3)} &= \frac{2\mu + \lambda}{r_i} (v_{\varphi,ijk} + u_{ij+1/2k}) + \lambda u_{r,ij+1/2k}^{\circ} + \lambda w_{z,ij+1/2k}^{\circ}, \\
\mathbf{g}_{ij+1/2k}^{(4)} &= \frac{\mu}{r_i} w_{\varphi,ijk} + \mu v_{z,ij+1/2k}^{\circ}, \\
\mathbf{h}_{ijk+1/2}^{(2)} &= \mu u_{z,ijk} + \mu w_{r,ijk+1/2}^{\circ}, \quad \mathbf{h}_{ijk+1/2}^{(3)} = \mu v_{z,ijk} + \frac{\mu}{r_i} w_{\varphi,ijk+1/2}^{\circ}, \\
\mathbf{h}_{ijk+1/2}^{(4)} &= (2\mu + \lambda) w_{z,ijk} + \lambda u_{r,ijk+1/2}^{\circ} + \frac{\lambda}{r_i} (v_{\varphi}^{\circ} + u)_{ijk+1/2}. \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Здесь сеточные функции с полуцелыми индексами в правых частях, относящиеся к центрам граней ячейки, вычисляются как полусумма значений этих функций в соответствующих смежных ячейках.

Разностное уравнение движения для радиальной компоненты скорости схемы (3.5) может быть записано в виде:

$$(\rho u)_t = -\mathbf{F}_{\bar{r}}^{(2)} - \frac{1}{r} \bar{\mathbf{F}}^{(2)} - \frac{1}{r} \mathbf{G}_{\bar{\varphi}}^{(2)} + \frac{1}{r} \bar{\mathbf{G}}^{(3)} - \mathbf{H}_{\bar{z}}^{(2)} + \underline{O}(h_{\varphi}^2).$$

Подставляя в это уравнение соответствующие выражения для модифицированных потоков, получим:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}_h \boldsymbol{\sigma})_r &= \mathbf{f}_{\bar{r}}^{(2)} + \frac{1}{r} \bar{\mathbf{f}}^{(2)} + \frac{1}{r} \mathbf{g}_{\bar{\varphi}}^{(2)} - \frac{1}{r} \bar{\mathbf{g}}^{(3)} + \mathbf{h}_{\bar{z}}^{(2)} = (2\mu + \lambda) \left( u_{\bar{r}\bar{r}} + \frac{1}{r} u_{\bar{r}}^{\circ} - \frac{u}{r^2} \right) + \\
&+ \frac{\mu}{r^2} u_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}} + \mu u_{\bar{z}\bar{z}} - \frac{3\mu + \lambda}{r^2} v_{\bar{\varphi}}^{\circ} + (\mu + \lambda) \left( \frac{1}{r} v_{\bar{r}\bar{\varphi}}^{\circ} + w_{\bar{r}\bar{z}}^{\circ} \right) + \Psi_r.
\end{aligned}$$

Здесь  $\Psi_r$  – слагаемые второго порядка малости по шагам сетки. Сопоставляя полученное выражение с дифференциальным выражением (2.2), приходим к выводу, что при указанном выборе добавок к разностным потокам вязкие слагаемые в уравнении движения аппроксимируются со вторым порядком. Аналогично показывается аппроксимации со вторым порядком вязких слагаемых в оставшихся уравнениях движения.

В уравнении энергии добавки к разностным потокам вводятся следующим образом:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,jk}^{(5)} = \{\rho u H\}_{i+1/2,jk} - \mathbf{f}_{i+1/2,jk}^{(5)}, \quad \mathbf{f}_{i+1/2,jk}^{(5)} = (u\mathbf{f}^{(2)} + v\mathbf{f}^{(3)} + w\mathbf{f}^{(4)})_{i+1/2,jk},$$

добавки  $\mathbf{g}_{ij+1/2k}^{(5)}$ ,  $\mathbf{h}_{ijk+1/2}^{(5)}$  к потокам  $\mathbf{G}_{ij+1/2k}^{(5)}$ ,  $\mathbf{H}_{ijk+1/2}^{(5)}$  вводятся аналогично.

Подставляя эти выражения в разностное уравнение энергии схемы (3.5), записанное в виде

$$(\rho E)_t = -\mathbf{F}_{\hat{r}}^{(5)} - \frac{1}{r}\bar{\mathbf{F}}^{(5)} - \frac{1}{r}\mathbf{G}_{\hat{\varphi}}^{(5)} - \mathbf{H}_{\hat{z}}^{(5)} + \underline{Q}(h_\varphi^2),$$

получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}) &= \mathbf{f}_{\hat{r}}^{(5)} + \frac{1}{r}\bar{\mathbf{f}}^{(5)} + \frac{1}{r}\mathbf{g}_{\hat{\varphi}}^{(5)} + \mathbf{h}_{\hat{z}}^{(5)} = \frac{1}{r}\left(r\left(u\mathbf{f}^{(2)} + v\mathbf{f}^{(3)} + w\mathbf{f}^{(4)}\right)\right)_{\hat{r}} + \\ &+ \frac{1}{r}\left(ug^{(2)} + vg^{(3)} + wg^{(4)}\right)_{\hat{\varphi}} + \left(u\mathbf{h}^{(2)} + v\mathbf{h}^{(3)} + w\mathbf{h}^{(4)}\right)_{\hat{z}} + \underline{Q}(h_r^2). \end{aligned}$$

Учитывая, что добавки к разностным потокам со вторым порядком аппроксимируют соответствующие компоненты тензора вязких напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  на гранях разностной ячейки, и сравнивая полученное выражение с дифференциальным выражением (2.3), получим, что вязкие слагаемые в уравнении энергии аппроксимируются с тем же порядком.

## 5. Результаты тестовых расчетов

В ходе расчетов, описанных в этом и последующих пунктах, использовался двумерный вариант схемы (3.5) для случая полярной системы координат  $(r, \varphi)$ . Соответствующие разностные уравнения получаются из уравнений (3.5) отбрасыванием третьего уравнения движения, слагаемых, связанных с потоками через верхнюю и нижнюю грани разностной ячейкой, и заменой  $h_z$  на единицу. В формулах для добавок к разностным потокам (4.1), аппроксимирующим компоненты вязкого тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ , достаточно отбросить последний индекс и считать сеточную функцию  $w_{ij}$  равной нулю.

Декартовы сеточные потоки  $\mathbf{F}_{i\pm 1/2j}$ ,  $\mathbf{G}_{ij\pm 1/2}$  в полученной таким образом двумерной полярной схеме рассчитывались с первым порядком аппроксимации методом Роу [8] с модификациями Эйнфельдта [9], позволяющими избежать появления нефизических разрывов в численных решениях. Далее осуществлялась коррекция потоков методом Ошера [10], в результате которой порядок аппроксимации сеточных потоков повышался до третьего. Эта разностная схема показала свою эффективность в ходе проведения автором расчетов течений вязкого газа в пространстве между двумя вращающимися цилиндрами (течение Тейлора-Куэтта) в полярной и цилиндрической геометрии [15]. Здесь же приведем результаты расчетов тестовых задач.

Поскольку, как уже отмечалось, вычисление сеточных потоков в полярной схеме фактически производится по базовой декартовой схеме, приведем результаты тестовых расчетов по двумерной декартовой схеме Роу-Эйнфельдта-Ошера. В качестве тестовой была выбрана задача о тече-

нии сверхзвукового потока с числом Маха  $M = 3$  в канале со ступенькой [17]. Ширина канала выбиралась равной 1, длина канала – 3, высота ступеньки – 0.2. Ступенька располагалась на расстоянии 0.6 от левой границы канала и продолжалась до его правой границы. Газ считался идеальным с показателем адиабаты  $\gamma = 7/5$ . На левой границе задавались значения  $\rho = \gamma$ ,  $u = M$ ,  $v = 0$ ,  $p = 1$ . Эти же параметры задавались в качестве начальных данных. На правой границе задавались свободные граничные условия (условия равенства нулю нормальных к границе производных газодинамических функций). На верхней и нижней границах канала, а также на границах ступеньки задавались условия непротекания (условия равенства нулю нормальной к границе компоненты скорости). В работе [17] проведено моделирование течения в канале с использованием различных разностных схем и показано, что после касания отошедшей ударной волны с верхней стенкой канала образуется так называемая “ножка Маха” и контактный разрыв, в котором развивается неустойчивость Кельвина-Гельмгольца.

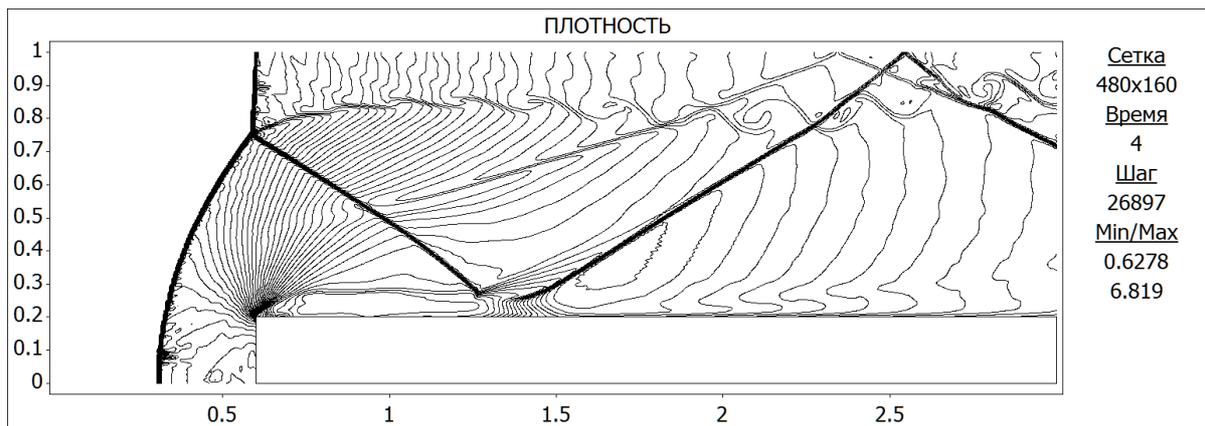


Рис.2. Расчет течения в канале со ступенькой при  $M = 3$

На рис.2 представлены результаты расчета течения в канале по схеме Роу-Эйнфельдта-Ошера на момент времени  $T = 4$ . Расчеты проводились на сетке  $480 \times 160$  разностных ячеек. Как легко видеть на рисунке, в численном решении хорошо воспроизводятся элементы течения, в том числе неустойчивость контактного разрыва.

Построенная на базе схемы Роу-Эйнфельдта-Ошера полярная схема тестировалась на основе расчетов задачи обтекания потоком газа цилиндра в двумерной постановке. Расчетная область  $\Omega = (0.2 \leq r \leq 6) \times (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$  представляла собой кольцо с центром в начале координат. На внутренней границе области задавались условия непротекания, на внешней границе при  $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$  – параметры набегающего плоскопараллельного потока:  $\rho = \gamma$ ,  $u = M \cos \varphi$ ,  $v = -M \sin \varphi$ ,  $p = 1$ , где  $M$  – число Маха. Эти же параметры газа задавались в качестве начальных данных во всех узлах

разностной сетки. На внешней границе области при  $0 \leq \varphi < \pi/2$  и  $3\pi/2 < \varphi \leq 2\pi$  задавались свободные граничные условия. Расчеты проводились на разностной сетке неравномерной по полярному углу.

Опишем используемый способ построения неравномерной разностной сетки на примере разбиения  $a = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_N = b$  отрезка  $[a, b]$ . Задавалась непрерывная и положительная на  $[a, b]$  функция  $g(x)$ , определяющая плотность распределения точек  $\tilde{x}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Точки  $\tilde{x}_i$  находились из соотношения

$$\int_a^{\tilde{x}_i} g(x) dx = \frac{i}{N} \int_a^b g(x) dx.$$

Интегралы вычислялись численно методом Гаусса (то есть фактически точно, поскольку использовались кусочно-линейные функции распределения). Точки  $\tilde{x}_i$  для каждого  $i = 1, 2, \dots, N$  находились приближенно методом половинного деления отрезка  $[\tilde{x}_{i-1}, b]$ . Учитывая, что точки  $\tilde{x}_i$  определяют границы разностных ячеек неравномерной сетки, узлы сетки задавались равными  $x_i = (\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i-1})/2$ , а шаги сетки  $h_i = \tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Характеристикой неравномерности сетки является величина  $\delta = \max_{i=2,3,\dots,N} (h_i / h_{i-1}, h_{i-1} / h_i)$ . Если эта величина близка к единице, то сетка является квазиравномерной и порядок аппроксимации схемы существенно не понижается.

В описанных далее расчетах обтекания цилиндра, которые проводились на сетке  $200 \times 600$  ячеек, выбиралась следующая функция распределения узлов сетки по полярному углу:

$$g(\varphi) = \begin{cases} 6, & \varphi \in [0, \pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi]; \\ 6 - 5(\varphi - \pi/3) / (\pi - \pi/3), & \varphi \in [\pi/3, \pi]; \\ 1 + 5(\varphi - \pi) / (5\pi/3 - \pi), & \varphi \in [\pi, 5\pi/3]. \end{cases}$$

При таком выборе функции распределения сетка по полярному углу в области  $-\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3$  за обтекаемым телом является в шесть раз более подробной, чем вблизи оси  $\varphi = \pi$ . Однако при этом величина  $\delta = 1.09$ , то есть сетка является квазиравномерной.

На рис.3а представлены результаты расчета дозвукового обтекания цилиндра при  $M = 0.9$ . Эти результаты сопоставлялись с данными экспериментов, представленными в альбоме гидродинамических течений [18]. В этом издании, к сожалению, не приводятся все параметры, необходимые для проведения расчетов в точности соответствующих экспериментам. Тем не менее, возможно осуществить качественное сравнение результатов. Так на рис.3б приведена фотография картины течения, устано-

вившегося в ходе обтекания цилиндра дозвуковым потоком при  $M = 0.98$ . Сопоставление рисунков позволяет сделать вывод, что схема хорошо передает характерные особенности дозвукового течения при числах Маха близких к единице. Форма и положение скачков уплотнения в численном решении близки к экспериментальным, а также воспроизводится неустойчивость течения за обтекаемым телом.

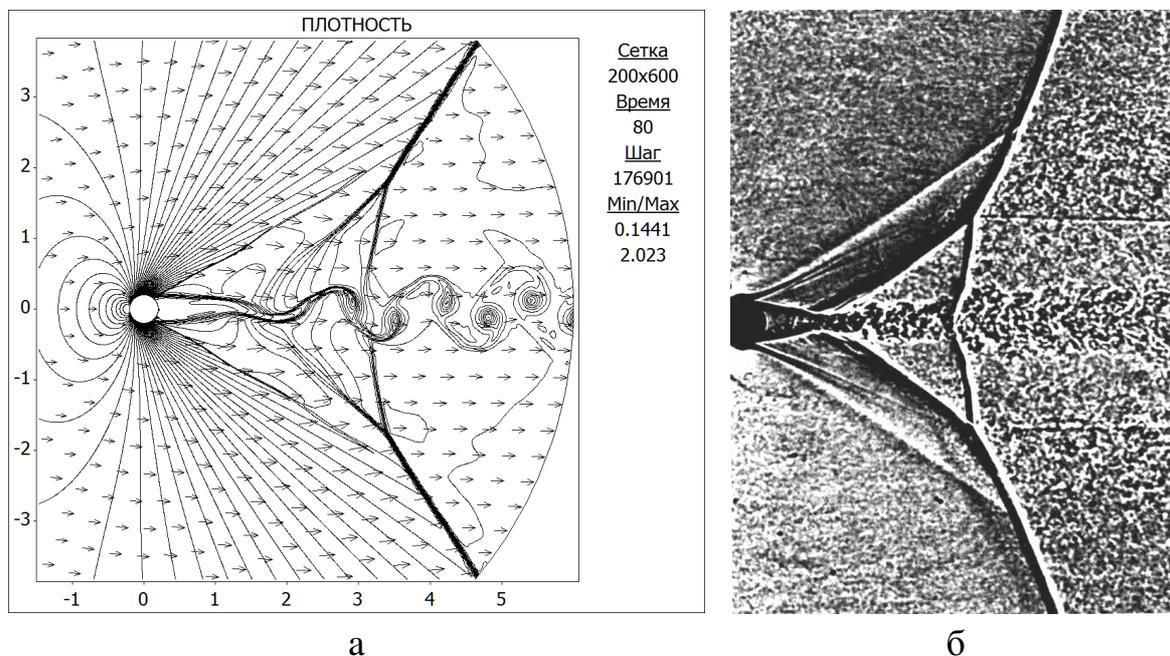


Рис.3. Обтекание цилиндра: а) расчет при  $M = 0.9$ ; б) эксперимент при  $M = 0.98$  (Dyment A., Gryson P., Ducruet C.)

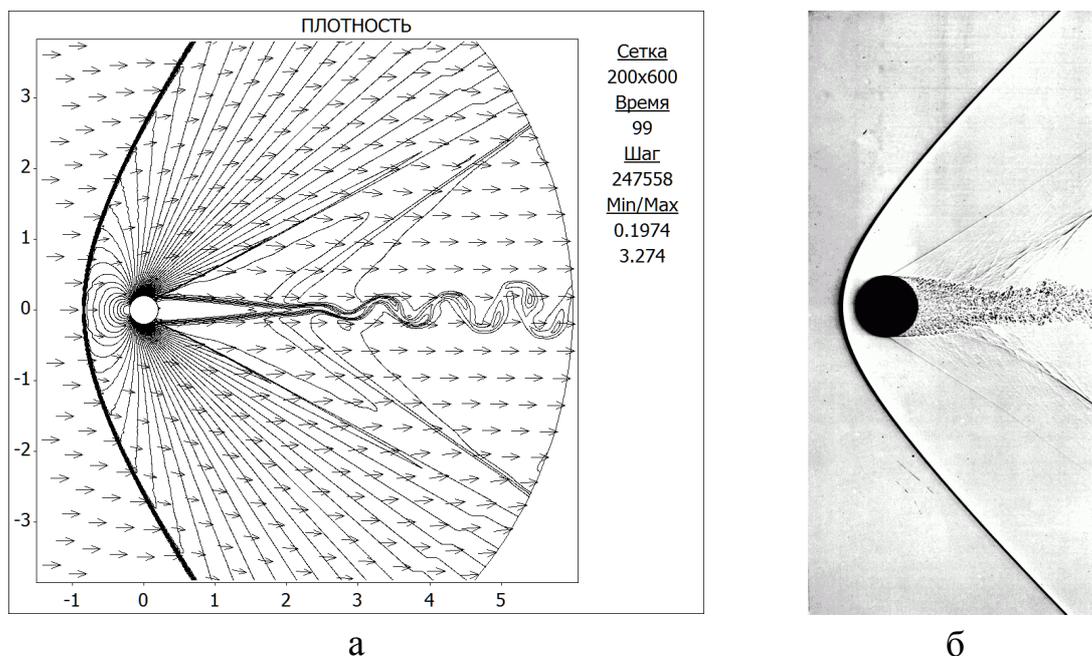


Рис.4. а) Расчет обтекания цилиндра при  $M = 1.5$ . б) Эксперимент по обтеканию сферы при  $M = 1.53$  (Charters A.C.)

На рис.4б представлена картина течения, наблюдавшаяся при обтекании сферы сверхзвуковым потоком с числом Маха  $M \approx 1.5$  (аналогичных фотографий обтекания цилиндра в атласе, к сожалению, не содержится). Результаты расчета обтекания цилиндра потоком газа с тем же числом Маха по построенной полярной схеме (см. рис.4а) также демонстрируют качественное сходство с экспериментальными данными.

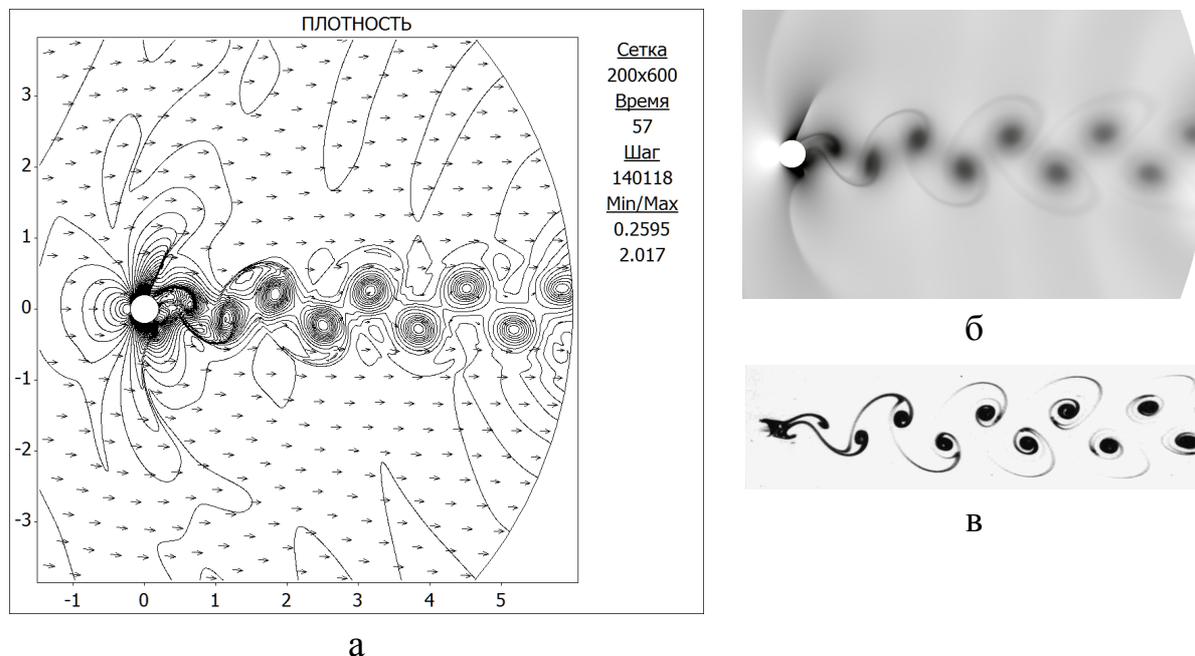


Рис.5. Обтекание цилиндра: а), б) расчет при  $M = 0.9$ ,  $Re \approx 500$ ; в) эксперимент в воде при  $Re \approx 100$  (Taneda S.)

Описанные выше расчеты проводились при отсутствующей вязкости газа. Для демонстрации ее влияния приведем также результаты расчета течения при  $M = 0.9$ , который отличается от представленного на рис.3а наличием вязких слагаемых, задаваемых добавками к разностным потокам (4.2) с коэффициентами  $\mu = 10^{-3}$  и  $\lambda = -2\mu/3$ . Для этих значений коэффициентов вязкости число Рейнольдса, рассчитанное по диаметру цилиндра, скорости набегающего потока и средней плотности,  $Re \approx 500$ . Наличие вязкости существенно меняет характер рассчитываемого течения (см. рис.5а,5б). Проявляется качественное сходство с течениями вязкой жидкости с близкими числами Рейнольдса [18], которые наблюдаются при обтекании цилиндра (см. рис. 5в).

В заключение данного пункта приведем результаты тестового расчета задачи о распаде разрыва в круге  $\Omega = (r \leq 9) \times (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ . Его отличительной особенностью является принадлежность точки  $r = 0$  расчетной области. Важно, отметить, что указанная особенность не влияет на форму записи разностных уравнений (3.5). Ее проявление ограничивается лишь тем, что соответствующие границы разностных ячеек с номером  $i = 1$  вырождаются в точку (или отрезок для цилиндрических координат), что со-

ответствует значению  $\check{\gamma} = 0$  в уравнениях (3.5), которое задает нулевые разностные потоки через границы ячеек нулевой длины (площади).

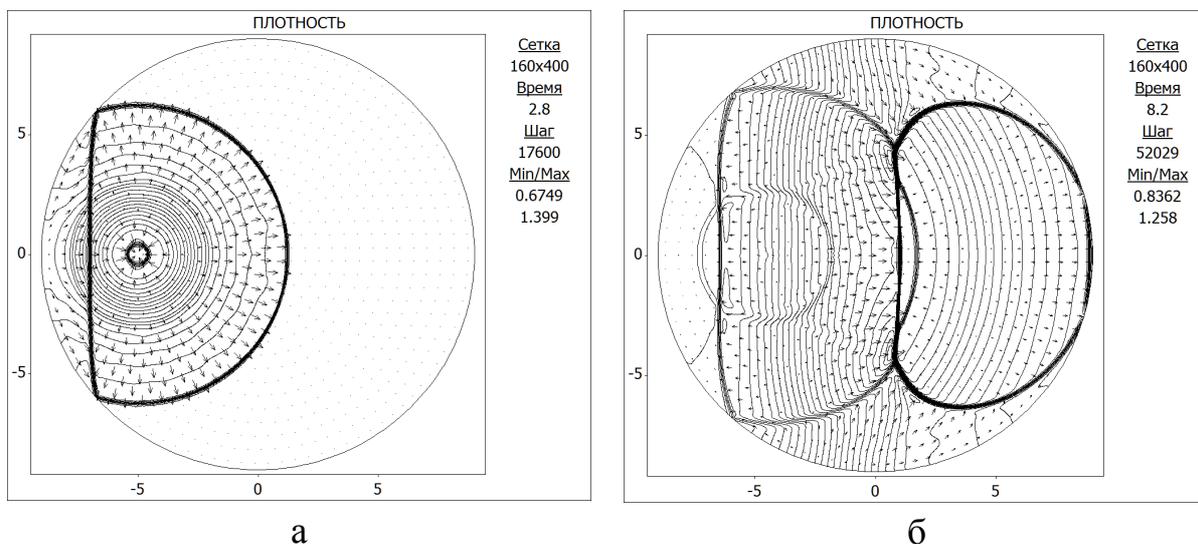


Рис.6. Расчет распада разрыва: а)  $T = 2.8$ ; б)  $T = 8.2$

На границе круга задавались условия непротекания. В качестве начальных условий задавались разрывные функции давления и плотности невязкого покоящегося газа. В круге с центром в точке  $r = 0.5$ ,  $\varphi = \pi$  радиуса 0.2 значения плотности и давления выбирались равными  $\rho \approx 1.7$  и  $p \approx 2.5$ , в остальных точках расчетной области –  $\rho = 1$  и  $p = 1$ . При таких значениях параметров разрыва на периферию расчетной области распространяется ударная волна, которая впоследствии отражается от границы области. В результате через точку  $r = 0$  проходят фронты первичной (см. рис.6а) и отраженной волн (см. рис.6б). Как видно на рисунках, фронты ударных волн проходят через точку  $r = 0$  без каких-либо заметных искажений их формы.

### Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов. – Доклады АН СССР, т.124, с.529, 1959.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989.
3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.:Наука, 1980.
4. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. – Математический сборник, 47(89), с.271, 1959.
5. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтека-

ния с отошедшей ударной волной. – Журн. вычисл. математики и мат. физики, т.1, с.1020, 1961.

6. Osher S., Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. – Math. Comput., v.38, p.339, 1982.

7. Harten A., Lax P.D., Van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. – SIAM Rev., v.25, p.35, 1983.

8. Roe P.L. Characteristic-based schemes for the Euler equations. – Ann. Rev. Fluid Mech., v.18, p.337, 1986.

9. Einfeldt B. On Godunov-type methods for gas dynamics. – SIAM J. Numer. Anal., v.25, p.294, 1988.

10. Chakravarthy S.R., Osher S. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. – AIAA Pap., №85-0363, 1985.

11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Серия Теор. физ., Т.4. – М.:Наука, 1986.

12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для ВУЗов. – 7-е изд., испр. – М.:Дрофа, 2003.

13. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. – М.: Наука, 1970.

14. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.:Наука, 1965.

15. Абакумов М.В. Построение потоковых разностных схем для расчета течений вязкого сжимаемого газа в цилиндрических координатах. – М.: Препринт МАКС-Пресс, 2010.

16. Абакумов М.В., Фаворский А.П., Хруленко А.Б. Представление уравнений Навье-Стокса в криволинейных координатах. – М.: Препринт МАКС-Пресс, 2011.

17. Colella P., Woodward P.R. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. – J. Comput. Phys. (Elsevier), 54, p.115, 1984.

18. Van Dyke M. An Album of Fluid Motion. – Stanford: Parabolic Press., 1982