

В. И. Афанасьев¹, Чэнь Жэнь², Ю. И. Ожигов³,
Ю Цзянчуань⁴

СПОНТАННАЯ ЭМИССИЯ ФОТОНА ТЕМНЫМ СОСТОЯНИЕМ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ГАМИЛЬТОНИАНА ТАВИСА-КАММИНГСА-ХАББАРДА*

1. Введение

Модель Джейнса-Каммингса [1] и ее обобщение - модель Тависа-Каммингса [2] описывает динамику группы n двух-уровневых атомов в оптической полости, взаимодействующих с одномодовым полем внутри нее.

Гамильтониан модели ТСН имеет вид

$$H_{ТСН}^{RWA} = \sum_i H_{ТС, i} + \sum_{i < j} \mu_{ij} (a_j^\dagger a_i + a_i^\dagger a_j), \quad (1)$$

$$H_{ТС, i} = \hbar \omega a_i^\dagger a_i + \hbar \omega \sum_k \sigma_{ik}^\dagger \sigma_{ik} + \sum_k g_k^i (a_i^\dagger \sigma_{ik} + a_i \sigma_{ik}^\dagger),$$

где индексы i, j относятся к полости, k - к атому внутри нее, операторы атомных релаксаций и возбуждений $\sigma_{ik}, \sigma_{ik}^\dagger$ и полевые операторы a_i, a_i^\dagger имеют стандартный вид. Мы также будем рассматривать модификацию этой модели, в которой допускается туннелирование атомов между полостями по специальным мостикам; в этом случае в гамильтониан (1) добавляется слагаемое $\sum_{i < j} \mu_{ij}^{at} (S_{ik}^+ S_{jk} + S_{ik} S_{jk}^+)$, где S_{jk} - оператор уничтожения атома k в полости j , μ_{ij}^{at} - интенсивность туннелирования атома k между полостями i, j . Такую модификацию мы будем называть моделью $ТСН^{lum}$.

Собственные состояния гамильтониана Тависа-Каммингса (ТС) имеют очень сложное описание [2], однако практическую ценность имеют те, в которых атомная система не может взаимодействовать с полем, так как именно это взаимодействие является главным источником декогерентности - главного врага квантовых вычислений.

В частности, важными являются так называемые темные состояния атомных ансамблей, находясь в которых атомы не могут испустить энергию в виде фотонов. Темные состояния имеют многочисленные приложения, например, как аккумуляторы энергии для нано-устройств [3]. Роль темных состояний в междуатомных

¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

²Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

³Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Физико-технологический институт РАН имени К.А.Валиева,

⁴Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова.

*Работа выполнена в Московском центре фундаментальной и прикладной математики

взаимодействиях рассматривалась в работе [4], в управлении твердотельными спинами - в [5], в управлении макроскопическими квантовыми системами - в [6]; их роль в биологии, в светособирательных комплексах, исследовалась в [7]. Некоторые методы получения темных состояний можно найти в работе [8] и в [9]. В недавней работе [10] рассматривались темные состояния трехуровневых систем. В работе [11] установлена размерность темного подпространства в модели Тависа-Каммингса.

Темное подпространство в модели с неподвижными атомами в модели TC+RWA есть ядро оператора рождения фотона: $Ker(a^+)$. Однако для модели TCH^{lun} с движущимися атомами это уже не так: атом может сначала переместиться, а уже потом испустить фотон. Поэтому в модели с движущимися атомами темное подпространство (мы называем его черным), будет иметь вид $Ker(a^+U_i)$, где $U_i = exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)$ для малого $t > 0$.

Важным вопросом является степень устойчивости темных состояний к плавной деформации гамильтониана, например, к перемещению атомов внутри одной полости оптическими пинцетами, что выражается в изменении энергии взаимодействия атомов с полем g_k^i , что и является предметом данной работы.

2. Деформация гамильтониана для одной полости

Энергия взаимодействия атома с координатой x внутри полости длины L и поля этой полости с длиной волны $L/2$ задается выражением $g = \sqrt{\hbar\omega/Vd}E(x)$, где V - эффективный объем полости, $E(x) = \sin(\pi x/L)$. Перемещение атома внутри полости сводится к изменению x . Мы будем рассматривать случай такого перемещения, что $g_1 = const$, $g_2 \rightarrow 0$. Задача становится нестационарной, и описывается переменным гамильтонианом $H_{TC}(t)$.

Спектр гамильтониана TC для двухатомной системы не имеет вырожденных уровней, так что для этого случая применима адиабатическая теорема. Численное моделирование показывает, что эволюция решения нестационарного уравнения Шредингера для такого гамильтониана при достаточно плавном изменении энергии взаимодействия g_2 переводит синглет $|s_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ в аналогичный по форме синглет $|s_{12}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}(g_1|01\rangle - g_2|10\rangle)$, причем если в первоначальном состоянии полости в ней не было фотонов, то и в течение всей эволюции они не появятся, что говорит об устойчивости одного синглета к плавной деформации гамильтониана.

Однако для двух синглетов в одной полости ситуация будет совершенно иной. Для 4-атомного квартета спектр деформируемого гамильтониана TC имеет вид, показанный на рисунке 1; вырожденность уровней, соответствующих темным состояниям, не дает возможности

применить адиабатическую теорему. Четвертым уровнем будет начальное темное состояние $|s_{12,34}\rangle$, а вырожденные пятый и шестой уровни содержат ненулевую амплитуду базисного состояния с явными 2 фотонами $(|2\rangle_{ph}|0000\rangle_{at})$.

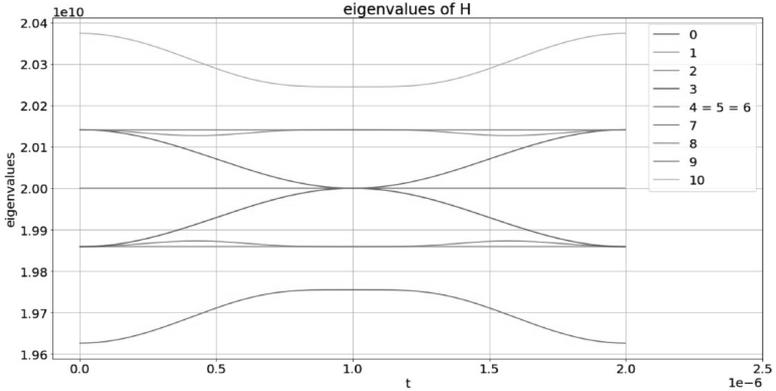


Рис. 1. Спектральные линии деформируемого гамильтониана ТС. Собственные состояния пронумерованы от нуля до десяти по увеличению энергии.

3. Устойчивость темных состояний для модели с перемещением атомов

Рассмотрим возможность туннелирования атомов между полостями - модель TCH^{un} . Мы предполагаем, что граф \mathcal{G} полостей с ребрами в виде туннельных мостиков для атомов между ними является связным. Для двухатомной системы темные состояниями ее гамильтониана будут существовать тогда и только тогда, когда граф \mathcal{G} будет четным, то есть любой цикл в нем содержит четное число вершин. В этом случае темное состояние 2 атомов - единственное, и имеет вид $|s_{\mathcal{G}}\rangle = \sum_i (-1)^{d(i)} |s^i\rangle$, где $d(i)$ - длина пути, соединяющего полость i с полостью 0, а $|s^i\rangle = |s_{12}^i\rangle$ - синглет в полости i .

Пусть граф \mathcal{G} состоит всего из 2 полостей, так что $|s_{\mathcal{G}}\rangle = |s^1\rangle - |s^2\rangle$. Мы будем предполагать, что этот процесс осуществляется так, что энергия взаимодействия с полем для перемещенного атома сохраняется; это можно обеспечить, располагая каналы туннелирования отдельно для каждого атома. Пусть $g_1^1 = g_1^2 = const$, $g_1^2 = g_2^2 \rightarrow 0$ - медленная деформация гамильтониана.

4. Вероятность свободного фотона в резонаторе как функция времени

Чтобы заставить $g_2(t)$ (и $g_4(t)$) изменяться достаточно медленно, воспользуемся следующей функцией:

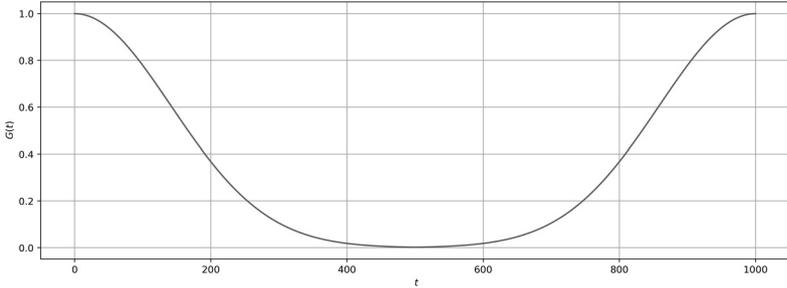


Рис. 2. $G(t)$

$$G(t) = \begin{cases} e^{-(5t/T)^2}, & 0 \leq t \leq 0.5T, \\ e^{-(5(T-t)/T)^2}, & 0.5T \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} t \in [0, T], \quad \Delta t = 0.001, \quad T = 10^3, \\ f'(0.5T - 0) = f'(0.5T + 0) \approx 0, \\ g_2(t) = g_1 G(t). \end{aligned}$$

Уравнение Шрёдингера:

$$\begin{cases} i\hbar |\dot{\psi}(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, & 0 \leq t \leq T \\ |\psi(0)\rangle = |s_{12}\rangle. \end{cases} \quad (3)$$

Итеративный расчет: $|\psi(t + \Delta t)\rangle = e^{-iH(t)\Delta t} |\psi(t)\rangle$.

1. Предположим, что в полости находятся два атома. Мы устанавливаем начальное состояние как $|s_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$. (Если в полости находятся 4 атома, то начальное состояние: $|\psi(0)\rangle = |s_{12}\rangle |s_{34}\rangle$.)

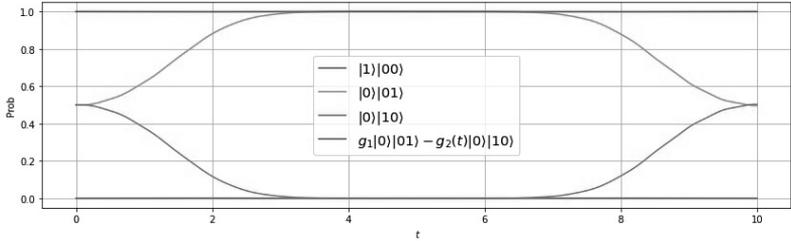


Рис. 3. 2 атома, 1 полость; вероятности внутрирезонаторных состояний во времени, $t \in [0, T']$, $T' = 0.1T$.

В случае двух атомов состояние в резонаторе возвращается к исходному по мере того, как $g_2(t)$ возвращается к исходному значению. Однако по мере увеличения числа атомов, когда функция $G(t)$ меняется быстро (на рис.4 $G(t)$ изменяется в 10 раз быстрее исходной), состояние в резонаторе не возвращается в исходное состояние (рис.4).

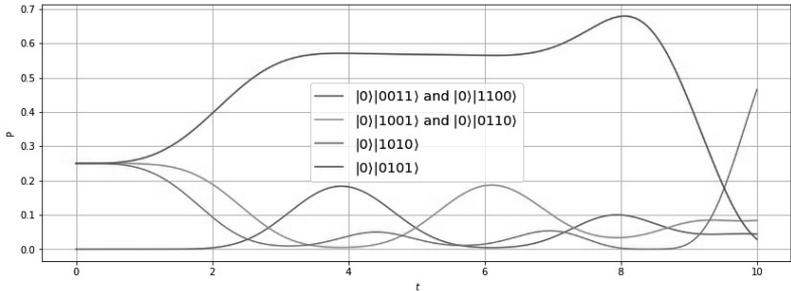


Рис. 4. 4 атома, 1 полость; исходное состояние: $|s_{12,34}\rangle = |s_{12}\rangle|s_{34}\rangle$, $t \in [0, T']$, $T' = 0.1T$.

Поэтому мы проводим имитационные эксперименты с медленно меняющейся функцией $G(t)$ (рис.2).

2. Рассмотрим вероятность появления хотя бы одного свободного фотона. При наличии всего двух атомов в резонаторе вероятность появления свободного фотона следующая:

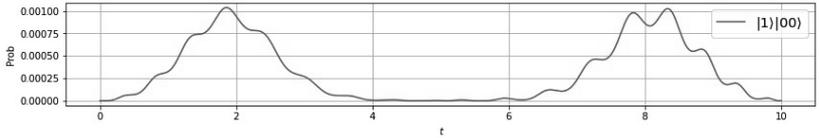


Рис. 5. 2 атома, 1 полость; вероятность появления свободных фотонов при наличии в полости двух атомов ($|1\rangle|00\rangle$).

В случае 4 атомов в резонаторе мы предполагаем, что начальное состояние равно $|s_{12,34}\rangle = |s_{12}\rangle|s_{34}\rangle$.

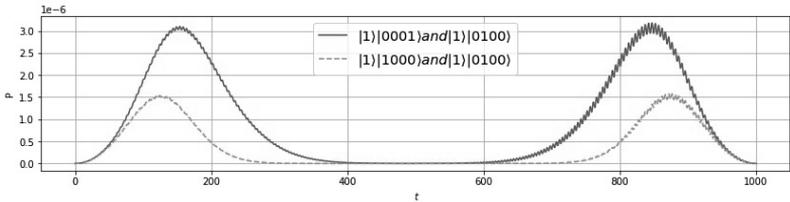


Рис. 6. 4 атома, 1 полость; вероятность $|1\rangle|0001\rangle, |1\rangle|0010\rangle, |1\rangle|0100\rangle$ и $|1\rangle|1000\rangle$ при наличии в полости 4 атомов ($g_2(t) = g_4(t) = G(t)$).

Эти два графика представляют собой кривые вероятности появления в резонаторе только одного фотона. Мы видим, что независимо от того, находятся ли в резонаторе только 2 атома или 4 атома, их кривые вероятности показывают два горба.

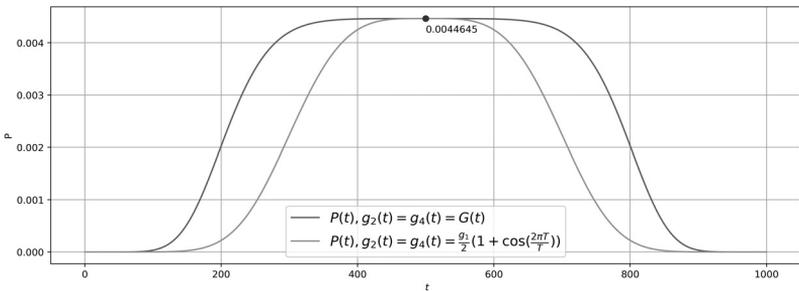


Рис. 7. 4 атома, 1 полость; вероятность того, что в полости в момент t будет хотя бы один явный фотон ($g_2(t) = g_4(t) = g_1 G(t)$).

$P(t)$ - это вероятность того, что в полости в момент t будет хотя бы один явный фотон.

$$P(t) = \langle 2_{ph} | \rho_{ph}(t) | 2_{ph} \rangle + \langle 1_{ph} | \rho_{ph}(t) | 1_{ph} \rangle,$$

где

$\rho_{ph} = tr_{ph}(\rho(t))$ - матрица плотности относительного поля;
 $\rho(t) = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ - матрица плотности всего состояния поля и атомов при медленной эволюции.

На рис. 7 показан случай, когда 4 атома находятся в одной полости. Поскольку вероятность появления 2 фотонов (максимальное значение около 0,004) намного больше, чем вероятность появления только одного фотона (максимальное значение около 3×10^{-6}), изображение в основном представляет вероятность появления двух фотонов, а кривая представляет собой одиночный горб.

Сравнение рисунка 5 с рисунком 7 показывает, что наличие дополнительной пары атомов в синглетном состоянии увеличивает эффект спонтанной эмиссии фотона.

При использовании другой функции $g_2(t) = \frac{g_1}{2}(1 + \cos(\frac{2\pi t}{T}))$ для плавной деформации максимальные амплитуды свободных фотонов (при $t = 0.5T$, $g_2(t) = g_4(t) = 0$) почти не меняются.

Два графика имеют почти одинаковые максимумы. У нас есть основания полагать, что это не совпадение и что свободные фотоны существуют.

3. Обсудим метод оценки того, остается ли состояние в оптическом резонаторе темным при изменении $g_i(t)$.

Поскольку вероятность появления фотонов в оптическом резонаторе мала, необходимо проверить, является ли это итеративной ошибкой или следствием разрушения темного состояния при изменении $g_2(t)$ и $g_4(t)$. Мы используем следующий метод, чтобы проверить, остается ли состояние внутри оптического резонатора постоянно темным.

$$\bar{\sigma}(t) = g_1\sigma_1 + g_2(t)\sigma_2 + g_3\sigma_3 + g_4(t)\sigma_4$$

После упрощения матрицы $\bar{\sigma}(t)$ получаем $rank(\bar{\sigma}(t)) = 6$. Поэтому пространство решений $\bar{\sigma}(t)|s\rangle = 0$ имеет 6 базисов:

$$\begin{cases} |s_1(t)\rangle = g_1g_3|0101\rangle + g_2(t)g_4(t)|1010\rangle - g_1g_4(t)|0110\rangle - g_2(t)g_3|1001\rangle \\ |s_2(t)\rangle = -g_1g_3|0101\rangle - g_2(t)g_4(t)|1010\rangle - g_1g_2(t)|0011\rangle + g_3g_4(t)|1001\rangle \\ |s_3(t)\rangle = -g_1|0100\rangle - g_2(t)|1000\rangle \\ |s_4(t)\rangle = -g_1|0001\rangle - g_4(t)|1000\rangle \\ |s_5(t)\rangle = -g_1|0010\rangle - g_3(t)|1000\rangle \\ |s_6(t)\rangle = |0000\rangle \end{cases} \quad (4)$$

Так как начальное состояние $|s_{12,34}\rangle$, то если $|\psi(t)\rangle$ останется в темном состоянии и в резонаторе не появятся свободные фотоны, то состояние в резонаторе может быть представлено как: $|\psi(t)\rangle = \alpha|s_1(t)\rangle + \beta|s_2(t)\rangle$. Это означает, что отношение амплитуды $|0101\rangle$ и амплитуды $|1010\rangle$ равно: $\frac{g_1 g_3}{g_2(t) g_4(t)}$.

Зададим функцию $\lambda(x)$ - амплитуду x . Тогда мы должны иметь $g_2(t)g_4(t)\lambda(|0101\rangle) - g_1g_3\lambda(|1010\rangle) = 0$, если состояние в резонаторе все время остается темным.

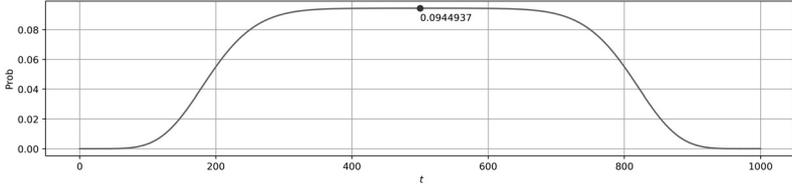


Рис. 8. 4 атома, 1 полость; $g_2(t)g_4(t)\lambda(|0101\rangle) - g_1g_3\lambda(|1010\rangle)$.

Отсюда мы видим, что выражение $g_2(t)g_4(t)\lambda(|0101\rangle) - g_1g_3\lambda(|1010\rangle)$ не всегда остается равным 0. Даже при $t = 0,5T$ его значение намного больше 0. Это означает, что $|\psi(t)\rangle$ не может быть представлено темным состоянием. Поэтому мы уверены, что в оптическом резонаторе есть свободные фотоны.

5. Вероятность свободного фотона в резонаторе модифицированной модели TCH^{lum}

Ранее мы представили модель TCH^{lum} , в которой допускается туннелирование атомов между полостями по специальным мостикам.

Таким образом, базисное состояние будет иметь вид:

$|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle_{ph} |at_1 state, at_1 position\rangle |at_2 state, at_2 position\rangle \dots |at_n state, at_n position\rangle$,
где

- $|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle_{ph}$ - как обычно, числа фотонов в полостях $1, 2, \dots, k$.
- $|at_i state, at_i position\rangle$ характеризует атом i .
- $at_i state \in \{0, 1, \dots, d\}$.
- $at_i position \in \{1, 2, \dots, k\}$ - полость, в которой он находится.

Далее мы решаем уравнение Шредингера для изучения изменения начального состояния и вероятности испускания фотона при изменении силы атома и поля.

5.1 Два атома, две полости

Две полости, два атома в синглетном состоянии. Один атом стоит на месте, у другого мостик перехода мы двигаем медленно к зеркалу так, что $g_2^1 = g_2^2 \rightarrow 0$, то есть и в первой, и во второй полости сила взаимодействия с полем медленно стремится к нулю. Пусть атомы изначально имеют одинаковое g в обеих полостях:

$$g_1^1 = g_1^2 = g_2^1 = g_2^2 = g = const.$$

Используем ту же функцию $G(t)$ (рис.2), что и в предыдущей главе. В этом случае сила, действующая на атом j в полости i , имеет вид $g_j^i(t) = g \times G(t)$.

Начальное состояние - темное состояние $|s_1\rangle - |s_2\rangle$.

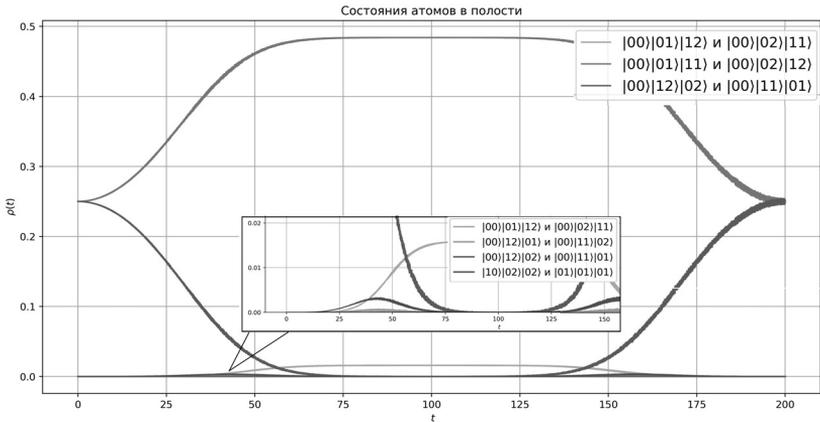


Рис. 9. 2 атома, 2 полости, фотоны и атомы могут перемещаться между полостями; $g_2^1 = g_2^2 \rightarrow 0$ медленно адиабатически; два атома в синглетном состоянии: $\Psi(0) = |s_1\rangle - |s_2\rangle$.

На рис.9 мы видим, что при уменьшении второго атома g_2 два атома могут находиться в разных полостях.

На рис.10 представлена функция вероятности излучения хотя бы одного фотона — величина: $prob(t) = \langle 01_{ph} | \rho(t) | 01_{ph} \rangle + \langle 10_{ph} | \rho(t) | 10_{ph} \rangle$, где $\rho(t) = |\Psi\rangle\langle\Psi|$.

5.2 Меняется амплитуда перехода атома между полостями

Рассмотрим случай, когда $g_{1,2}^i = const$, но меняется амплитуда перехода атома между полостями. Используем ту же функцию $G(t)$ (рис.2). Тогда

изменение интенсивности движения атомов между полостями описывается функцией $R(t) = r \times G(t)$.

Полученный результат близок к прямой — начальное состояние $|s_1\rangle - |s_2\rangle$ было почти устойчивым с течением времени t .

Но вероятность излучения фотона все еще существует, хотя она очень мала, примерно 10^{-14} , как показано на рис. 11.

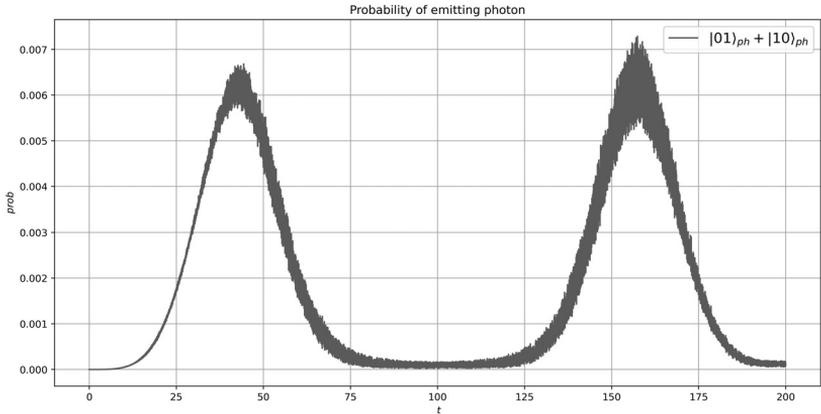


Рис. 10. 2 атома, 2 полости, фотоны и атомы могут перемещаться между полостями; $g_2^1 = g_2^2 \rightarrow 0$ медленно адиабатически; вероятность вылета фотона.

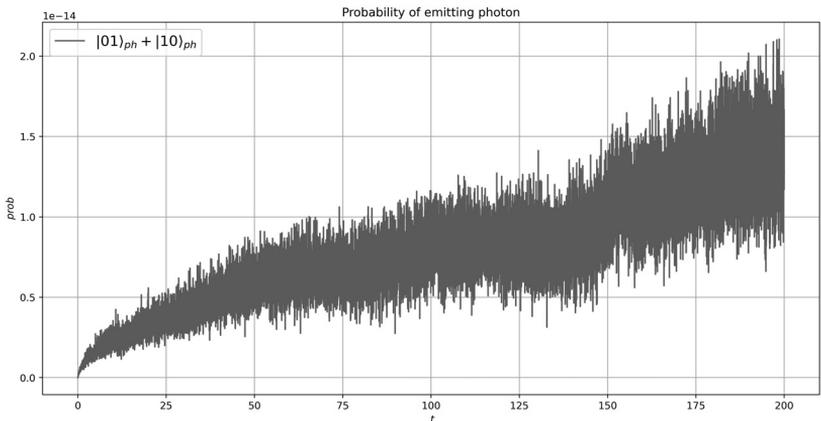


Рис. 11. Изменение интенсивности движения атомов между полостями. Вероятность вылета фотона.

5.3 Четыре атома, две полости

Две полости, четыре атома в синглетном состоянии. $g_2^1 = g_2^2 = g_4^1 = g_4^2 \rightarrow 0$, то есть и в первой и во второй полости сила взаимодействия второго и четвертого атомов с полем медленно стремится к нулю. Пусть атомы изначально имеют одинаковое g в обеих полостях.

Мы используем функцию $G(t)$ (рис.2) как изменение g второго и четвертого атома в полости.

Начальное состояние:

$$|\Psi(0)\rangle = (|s_1^{12}\rangle - |s_2^{12}\rangle) \otimes (|s_1^{34}\rangle - |s_2^{34}\rangle).$$

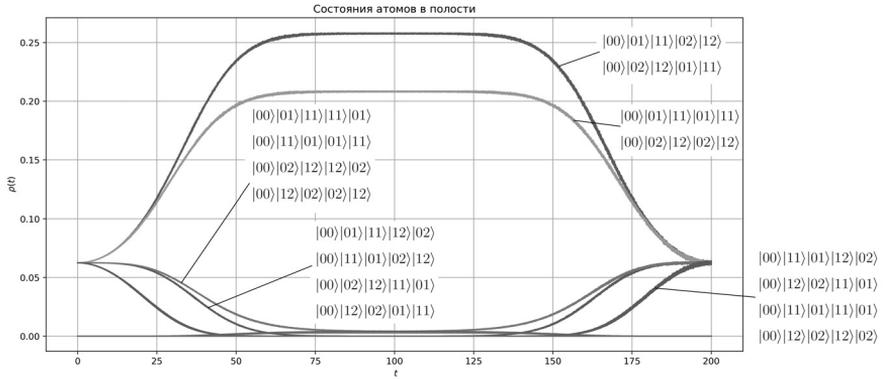


Рис. 12. 4 атома, 2 полости, фотоны и атомы могут перемещаться между полостями; $g_2^1, g_2^2, g_4^1, g_4^2 \rightarrow 0$ медленно адиабатически; уачальное состояние : $\Psi(0) = (|s_1^{12}\rangle - |s_2^{12}\rangle) \otimes (|s_1^{34}\rangle - |s_2^{34}\rangle)$.

При увеличении части рисунка видно, что с уменьшением второго и четвертого атома g_2^i, g_4^i появляются различные комбинации четырех атомов в полости (рис.13).

Функция вероятности излучения хотя бы одного фотона (рис.14) имеет вид:

$$prob(t) = \langle 01_{ph} | \rho(t) | 01_{ph} \rangle + \langle 10_{ph} | \rho(t) | 10_{ph} \rangle + \langle 11_{ph} | \rho(t) | 11_{ph} \rangle + \langle 02_{ph} | \rho(t) | 02_{ph} \rangle + \langle 20_{ph} | \rho(t) | 20_{ph} \rangle,$$

где

$$\rho(t) = |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

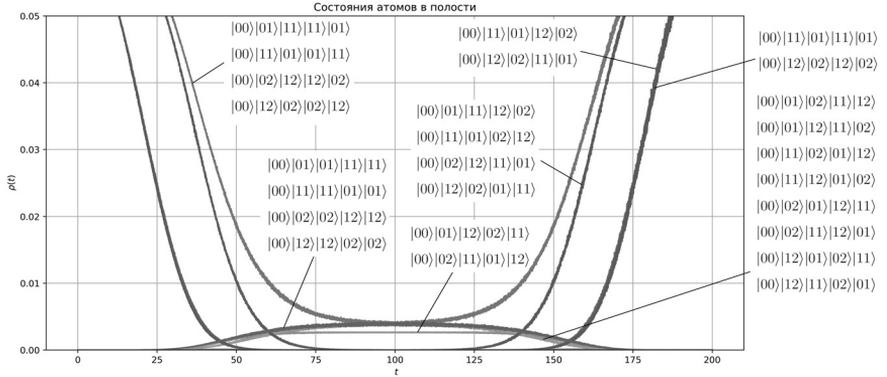


Рис. 13. 4 атома, 2 полости, фотоны и атомы могут перемещаться между полостями; $g_2^1, g_2^2, g_4^1, g_4^2 \rightarrow 0$ медленно адиабатически; начальное состояние : $\Psi(0) = (|s_1^{12}\rangle - |s_2^{12}\rangle) \otimes (|s_1^{34}\rangle - |s_2^{34}\rangle)$.

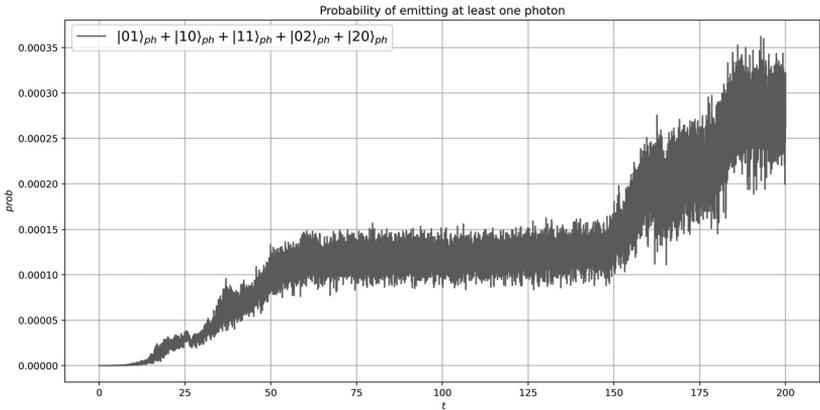


Рис. 14. Вероятность вылета хотя бы одного фотона.

5.4 Параметры, используемые для расчета

$$\begin{aligned}
 \hbar &= 1.054571817 * 10^{-27} & \Delta t &= 0.01 \\
 \mu_{12} &= 9 * 10^7 & \mu_{12}^{at} &= 8 * 10^7 \\
 g &= 2 * 10^8 & \omega &= 10^7
 \end{aligned} \tag{5}$$

6. Выводы

1. Установлен парадоксальный эффект спонтанной эмиссии фотонов темным состоянием двухатомной системы в оптической полости при сколь угодно плавной деформации гамильтониана Тависа-Каммингса, имеющий место несмотря на неприменимость к этому случаю адиабатической теоремы. Деформация гамильтониана физически означает медленное перемещение атомов в полости с помощью оптических пинцетов. Этот эффект имеет некоторое сходство со сдвигом волнового фронта электрона в окрестности соленоида (эффект Ааронова-Бома).

2. Показано, что этот эффект многократно усиливается для 4 атомов, находящихся в темном состоянии. Этот чисто квантовый эффект влияния синглетов друг на друга в то время как порознь они не взаимодействуют с полем.

3. Аналогичный эффект имеет место и при условии перемещения атомов между полостями, однако с этом случае добавление атомов не усиливает эффект, а наоборот, ослабевает его. Эффект спонтанной эмиссии при деформации гамильтониана сильнее в случае единого поля в одной полости, чем для разделенного поля в двух полостях. Механизм эффекта связан с обменом виртуальными фотонами между синглетными состояниями пар атомов, которые при деформации гамильтониана становятся реальными. При изменении амплитуды перехода атомов между полостями с сохранением силы взаимодействия с полем для каждого атома эффект спонтанной эмиссии пренебрежимо мал.

Эффект спонтанной эмиссии фотонов темными состояниями необходимо учитывать при манипуляции атомами при практических применениях темных состояний, однако очень небольшая вероятность эмиссии фотона при плавной деформации гамильтониана говорит о большой устойчивости таких состояний и перспективах использования этих состояний для хранения информации или в качестве аккумуляторов энергии для нано-систем.

7. Благодарности

Работа выполнена в Московском центре фундаментальной и прикладной математики.

Литература

1. *E.T.Jaynes, F.W.Cummings*. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proc. IEEE 51 (1): 89–109, (1963). doi:10.1109/PROC.1963.1664
2. *Michael Thomas Tavis*. A Study of an N Molecule Quantized-Radiation-Field Hamiltonian, Dissertation, <https://arxiv.org/abs/1206.0078>.

3. *James Q. Quach, William J. Munro.* Using dark states to charge and stabilise open quantum batteries, *Phys. Rev. Applied* 14, 024092 (2020).
4. *Andre A., Duan L.M., Lukin M.D.* Coherent atom interactions mediated by dark-state polaritons, *Phys Rev Lett.* 2002 Jun 17;88(24):243602.
5. *J. Hansom, C. Schulte, C. Le Gall, C. Matthiesen, E. Clarke, M. Hugues, J.M. Taylor, M. Atatüre.* Environment-assisted quantum control of a solid-state spin via coherent dark states, *Nature Physics* 10, 725–730 (2014).
6. *E.S.Lee, C.Geckeler, J.Heurich, A.Gupta, Kit-Iu Cheong, S.Secretst and P. Meystre.* Dark states of dressed Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. A* 60, 4006, 1999.
7. *M.Ferretti, R.Hendrikx, E.Romero, J.Southall, R.J.Cogdell, Vladimir I.Novoderezhkin, G.D.Scholes and R. van Grondelle.* Dark States in the Light-Harvesting complex 2 Revealed by Two-dimensional Electronic Spectroscopy, *Sci Rep.* 2016; 6: 20834, Published online 2016 Feb 9. doi: 10.1038/srep20834.
8. *C.Pörtl, C.Emary, T.Brandes.* Spin entangled two-particle dark state in quantum transport through coupled quantum dots, *Phys. Rev. B* 87, 045416 (2013).
9. *T.Tanamoto, K.Ono, F.Nori.* Steady-state solution for dark states using a three-level system in coupled quantum dots, *Jpn. J. Appl. Phys., Part 1* 51, 02BJ07 (2012).
10. *H.Rose, D.V.Popolitova, O.V.Tikhonova, T.Meier, P.R.Sharapova.* Dark-state and loss-induced phenomena in the quantum-optical regime of Lambda -type three-level systems, *Phys. Rev. A* 103, 013702 (2021).
11. *Ю.И.Ожигов.* О размерности пространства темных состояний в модели Тависа-Камингса, *Математические заметки*, 2022, том 111, N3, стр. 433-442, doi: <https://doi.org/10.4213/mzm13464>.
12. *R.Dicke.* *Phys. Rev.* 93, 99 (1954).