Н.Е. Александрова[1], Д.С. Романов[2]

О ДЛИНЕ ЕДИНИЧНОГО ПРОВЕРЯЮЩЕГО ТЕСТА ОТНОСИТЕЛЬНО ВСТАВОК ЭЛЕМЕНТОВ, НЕ СОХРАНЯЮЩИХ КОНСТАНТУ [*]

Введение

Схемы из функциональных элементов (СФЭ) — одна из классических моделей управляющих систем без памяти. Анализ функционирования СФЭ при возникновении в них неисправностей традиционно осуществляется с помощью тестового подхода, предложенного в работах С. В. Яблонского и И. А. Чегис [48, 47] в середине 1950-х гг. Пусть $F(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1, f_2, ..., f_N)$ — система булевых функций (БФ) n переменных, S — реализующая ее схема из функциональных элементов (СФЭ) в базисе B. Пусть на СФЭ S мог подействовать источник одиночных неисправностей U, способный видоизменять схему конечным числом способов. Множество T входных наборов называется *единичным проверяющим тестом* для схемы S относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда для любой схемы S', полученной действием U на S, справедливо: если S' реализует некоторую систему БФ F', неравную F, то найдется набор α из T такой, что $F'(\alpha) \neq F(\alpha)$. Число наборов в тесте T называется его *длиной* $L(T)$. Схема S называется *неизбыточной* относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда при любой одиночной неисправности элемента, вызванной действием источника U, реализуемая неисправной схемой система оказывается неравной системе, реализуемой схемой S при отсутствии неисправностей. Под *длиной минимального проверяющего теста* для системы БФ $F(x_1, \ldots, x_n)$, реализованной с помощью СФЭ в базисе B, относительно источника неисправностей U понимается величина $L_B(U, F)$, равная минимуму по всем реализующим F неизбыточным СФЭ S с n входами и одним выходом в базисе B минимума по всем проверяющим тестам T для S относительно U

---

[1] ООО «ГлоуБайт Аналитические решения», e-mail: alexandrova-nat@mail.ru.

[2] Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: romanov@cs.msu.ru.

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект «Оценки сложностных характеристик булевых функций и графов»), РФФИ (проект № 18-01-00800-а) и госбюджетной темы НИР № 5.4.19 факультета ВМК МГУ.

величины $L(T)$. Величины $\tilde{L}_B(U,F)$, $\bar{L}_B(U,F)$, $\tilde{\bar{L}}_B(U,F)$ определяются по аналогии с $L_B(U,F)$, но предполагают перебор схем, реализующих F с использованием дополнительных существенных входов, дополнительных выходов, дополнительных существенных входов и выходов соответственно. *Функцией Шеннона* длины проверяющего теста для реализованной с помощью СФЭ в базисе B булевой функции f относительно источника неисправностей U называется величина $L_B(U,n)$, равная максимуму по всем БФ f, существенно зависящих от n переменных, величины $L_B(U,f)$. Величины $\tilde{L}_B(U,n)$, $\bar{L}_B(U,n)$, $\tilde{\bar{L}}_B(U,n)$ определяются по аналогии с $L_B(U,n)$.

Под *вставкой* m-входового ($m \in \mathbb{N}$) элемента E в схему S понимается следующая операция: в S выбираются m не обязательно различных функциональных элементов (ФЭ) $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, ..., $E^{(m-1)}$, $E^{(m)}$ так, что никакой элемент среди $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, ..., $E^{(m-1)}$ не лежит ни на каком ориентированном пути от $E^{(m)}$ к выходу схемы (однако, некоторые из элементов $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, ..., $E^{(m-1)}$ или даже все могут совпадать с элементом $E^{(m)}$), все дуги, исходящие из $E^{(m)}$, заменяются на дуги с теми же концами, исходящие из E (при этом, если элемент $E^{(m)}$ был выходным элементом схемы, то в результате вставки выходным оказывается элемент E, а элемент $E^{(m)}$ перестает быть выходным), и добавляются m дуг с концами в E, исходящих из $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, ..., $E^{(m)}$. О такой вставке элемента E в дальнейшем будем говорить как о *вставке элемента E от элементов $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, ..., $E^{(m-1)}$ под элемент $E^{(m)}$*.

Пусть U_1' — источник одиночных вставок элементов (с произвольным числом входов), не сохраняющих нуль, в схему, а U_1'' — источник одиночных вставок элементов (с произвольным числом входов), не сохраняющих единицу, в схему. Обозначения для некоторых других источников неисправностей в СФЭ будут иметь вид X_z^y, где X обозначает места возможных неисправностей (I — входы элементов, O — выходы элементов), y — это название типа неисправности ($const$, 0, 1, inv — константные, константные типа 0, константные типа 1 и инверсные неисправности соответственно), число z ограничивает сверху количество возможных поломок в схеме. Легко видеть, что источник неисправностей U_1' (соответственно U_1'') мощнее источника инверсных и константных типа «константа 1» (соответственно инверсных и константных типа «константа 0») неисправностей на выходах элементов.

Приведем сжатый обзор основных известных результатов о функциях Шеннона длин проверяющих тестов относительно упомянутых источников неисправностей (приводимые без пояснений оценки верны при всех $n \in \mathbb{N}$). Пусть $B_1 = \{x \& y, x \oplus y, 1\}$, тогда: $L_{B_1}(IO_1^{const}, n) \leq n+3$ [11, 9, 37: с. 113–116]. В двух специальных базисах B при двух [7] и четырех [1] добавочных входах: $\tilde{L}_B(O^{const}, n) = 2$ (с возможностью обнаружения и части неисправностей на входах элементов). $\tilde{\tilde{L}}_{\{\oplus,|\}}(IO^{const}, n) \leq 5$ [2] (число добавочных входов и выходов сравнимо с числом элементов схемы). $\tilde{\tilde{L}}_{\{\vee,\&,\neg,|,\downarrow\}}(IO^{const}, n) = 3$ [12] (6 добавочных входов, каждый элемент схемы является выходным). Для произвольного полного конечного базиса B: $L_B(O^{const}, n) \leq 2(2^{[n/2]} + 2^{]n/2[} + n)$ [36]. В базисе $B_0 = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$: $L_{B_0}(I^0, n) = L_{B_0}(I^1, n) = O(2^{n/2})$ [34]; $L_{B_0}(O^0, n) = L_{B_0}(O^1, n) \leq n$ [35]. С тремя дополнительными входами и одним дополнительным выходом для произвольного полного конечного базиса B: $\tilde{\tilde{L}}_B(O_k, n) = O(n + 2^k)$ [24]. В базисе $B^\infty = \{x \oplus y, 1, x_1 \cdot \ldots \cdot x_t, x_1 \vee \ldots \vee x_t \mid t \in \mathbb{N}\}$: $\tilde{L}_{B^\infty}(IO_1^{const}, n) \leq 2\sqrt{n}(1 + o(1))$ [6] (с $\left\lceil \sqrt{n} \right\rceil$ дополнительными входами). Для произвольного полного конечного базиса B: $L_B(O_1^{inv}, n) \leq 3$ [38], $L_{B_1}(O_1^{inv}, n) = 1$ [20]. Для произвольного полного базиса B: $L_B(O_1^{const}, n) \leq n+3$ [21–23]. $L_{B_0}(O^0, n) = L_{B_0}(O^1, n) = 2$ [16], $L_{B_1}(O_1^1, n) = 1$ [17], $L_{B_1}(O^0, n) = 1$ [19]. В произвольном полном базисе B: $2 \leq L_B(O_1^{const}, n) \leq 4$ [41]. Существуют конечные полные базисы $\hat{B}_1$ и $\hat{B}_2$, в которых: $2 \leq L_{\hat{B}_1}(O^{const}, n) \leq 4$ [40] ([40, 41] — с иным определением неизбыточности), $2 \leq L_{\hat{B}_2}(O^{inv}, n) \leq 4$ [42]. $L_{\{x|y\}}(O^1, n) \geq n+1$ [18]. В базисе $B' = \{xy, x \oplus y, x \sim y\}$ $L_{B'}(IO_1^{const}, n) \leq 16$ [43]. Для базисов B из специальных классов при $n \geq 3$ установлены оценки $L_B(O_1^1, n) \geq 2$, $L_B(O_1^1, n) = 2$, $L_B(O_1^{const}, n) \geq 3$ [26]. При $p \in \{0,1\}$: $L_{\{\bar{x}, xy\}}(O_1^p, n) = 3$ [27]. Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется: а) базис B от не более чем 3 переменных такой, что при $p \in \{0,1\}$: $L_B(IO_k^p, n) \leq 2$, $L_B(I_k^p, n) = 1$ [30], б) базис B от $2k+2$ переменных такой, что $L_B(IO_k^{const}, n) \leq 3$, $L_B(I_k^{const}, n) \leq 2$ [31]. $L_{\{xy, \bar{x}, x \oplus y \oplus z\}}(O_1^{const}, n) = 2$ [29]. $L_{\{xy, x \vee y, x \oplus y, 1\}}(O^{const}, n) \leq 5$, $L_{\{xy, x \vee y, x \oplus y, x \vee \bar{y}\}}(O^{const}, n) \leq 4$ [32]. Для $B_2 = \{\bar{x}, x \oplus y \oplus z, (000011*011101101)\}$ $L_{B_2}(O^{const}, n) = 2$ [28]. Среди современных публикаций по тестированию схем есть работы, в которых обсуждаются идеи по сокращению длины теста, по повышению качества покрытия неисправностей множествами входных наборов, предлагаются новые методы построения легкотестируемых схем и тестов для них, но улучшение известных оценок функций Шеннона длины теста не осуществляется, — выделим среди публикаций этого типа работы [10, 3, 4, 5, 8, 14, 15].

Основная часть

Оказывается, для базиса $B' = \{xy, x \oplus y, x \sim y\}$ и источника неисправностей U_1' имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *При любом натуральном* $n \geq 1$ *для произвольной булевой функции* $f(\tilde{x}^n)$, *не равной константе* 1 *и тождественной функции, имеет место равенство* $L_{B'}(U_1', f) = 1$.

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $f(\tilde{x}^n) \equiv 1$. Не существует неизбыточных (относительно U') СФЭ в базисе B', реализующих константу 1. Действительно, рассмотрим произвольную СФЭ в базисе B', реализующую константу 1. Пусть E' — выходной элемент этой схемы. Легко заметить, что вставка сохраняющего единицу элемента E от элементов E', E', ..., E' под элемент E' необнаруживаема, что противоречит неизбыточности схемы.

Случай 2. $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$. Константу 0 можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $x_1 \oplus x_1$. Эта схема допускает единичный проверяющий тест $\{(\tilde{0}^n)\}$, поэтому $L_{B'}(U_1', f) = 1$.

Далее будем считать, что функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех переменных.

Случай 3. $f(x_1) = x_1$. Тождественную функцию x_1 можно реализовать схемой без элементов. Эта схема абсолютно надежна, поэтому $L_{B'}(U_1', f) = 0$. Неконгруэнтных этой функции f функций, допускающих абсолютно надежные реализации относительно рассматриваемого источника неисправностей, очевидно, не существует.

Случай 4. $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ или $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Функцию $x_1 \oplus x_2$ можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $x_1 \oplus x_2$. Функцию $x_1 x_2$ можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $x_1 x_2$. Нетрудно видеть, что каждая из этих схем допускает единичный проверяющий тест $\{(0,0)\}$, поэтому $L_{B'}(U_1', f) = 1$.

Случай 5. $f(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$. Функцию $x_1 \sim x_2$ можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $x_1 \sim x_2$. Эта схема допускает единичный проверяющий тест $\{(0,1)\}$, поэтому $L_{B'}(U_1', f) = 1$.

Случай 6. $f(x_1)=\bar{x}_1$. Функцию $\bar{x}_1$ можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $(x_1\oplus x_1)\sim x_1$. Эта схема допускает единичный проверяющий тест $\{(1)\}$, поэтому $L_{B'}(U_1', f)=1$.

Случай 7. Функция $f(\tilde{x}^n)$ не конгруэнтна функциям, рассмотренным в случаях 1–6. Поскольку функция f тождественно не равна константе 1, найдется набор $\alpha\in\{0,1\}^n$ такой, что $f(\alpha)=0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha=(\tilde{1}^d,\tilde{0}^{n-d})$ $(0\le d\le n)$. Для функции $f(\bar{x}_1,...\bar{x}_d,x_{d+1,...,x_n})$ построим полином Жегалкина, а затем навесим в нем отрицания на все вхождения переменных x_1, ..., x_d, — получим поляризованный полином P_f для функции f с вектором поляризации $(\tilde{1}^d,\tilde{0}^{n-d})$ (о поляризованных полиномах см. работы [13, 25, 44, 45, 46]). Запишем этот полином в следующем виде: $P_f=K_1\oplus\cdots\oplus K_t\oplus c_0$, где K_1, ..., K_t — попарно неэквивалентные элементарные конъюнкции, в которых отрицания висят в точности над переменными x_1, ..., x_d, а $c_0=0$, поскольку на наборе α все конъюнкции K_1, ..., K_t обращаются в нуль и $f(\alpha)=0$. Значит, $f=K_1\oplus\cdots\oplus K_t$.

Далее приведем описание неизбыточной схемы S, которая реализует функцию f и допускает единичный проверяющий тест $\{(\tilde{1}^d,\tilde{0}^{n-d})\}$ длины 1.

Реализуем элементарную конъюнкцию $K_i=x_{i,1}^{\sigma_{i,1}}\cdots x_{i,r_i}^{\sigma_{i,s_i}}$ $(1\le i\le t$, $\sigma_{i,j}\in\{0,1\})$ подсхемой C_i^1 следующим образом. Для каждой буквы $x_{i,j}^{\sigma_{i,j}}$ $(1\le j\le s_i)$ построим свою собственную подсхему $X_{i,j}^1$: если $\sigma_{i,j}=1$, то подсхема $X_{i,j}^1$ представляет собой вход $x_{i,j}$ схемы S (являющийся и выходом подсхемы $X_{i,j}^1$), если же $\sigma_{i,j}=0$, то подсхема $X_{i,j}^1$ представляет собой цепочку из элемента $G_{i,j}^1$ сложения по модулю 2 (сумматора), на оба входа которого подается переменная $x_{i,j}$, и элемента $H_{i,j}^1$ эквивалентности, на первый вход которого подается переменная $x_{i,j}$, а на второй — выход элемента $G_{i,j}^1$ (выходом подсхемы $X_{i,j}^1$ в этом случае является выход элемента $H_{i,j}^1$). Общими у различных подсхем $X_{i,j}^1$ могут быть только входы схемы S. При $s_i=1$ подсхема C_i^1 совпадает с подсхемой $X_{i,1}^1$. При $s_i>1$ построим цепочку Z_i^1 из s_i-1 конъюнкторов. На входы первого конъюнктора $E_{i,1}^1$ цепочки Z_i^1 подаются выходы подсхем $X_{i,1}^1$ и $X_{i,2}^1$, а на первый и второй входы конъюнктора $E_{i,j}^1$

($2 \le j \le s_i - 1$) подаются выход предыдущего конъюнктора $E^1_{i,j-1}$ и выход подсхемы $X^1_{i,j+1}$. При $s_i > 1$ выходом построенной подсхемы C^1_i является выход конъюнктора E^1_{i,s_i-1}.

Построим для каждого i, $1 \le i \le t$, такого, что $s_i > 1$, одну копию C^2_i подсхемы C^1_i и удалим в этой копии последний конъюнктор E^2_{i,s_i-1} (обозначения элементов подсхемы C^2_i будут отличаться от обозначений соответствующих элементов подсхемы C^1_i лишь верхним индексом, который для подсхемы C^2_i будет равен 2).

Для каждой имеющейся пары конъюнкторов $E^1_{i,j}$ и $E^2_{i,j}$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le s_i - 2$) построим контролирующий элемент $E^3_{i,j}$ сложения по модулю 2 (сумматор), подав на его входы выходы элементов $E^1_{i,j}$ и $E^2_{i,j}$. Аналогично, для каждой имеющейся пары элементов эквивалентности $H^1_{i,j}$ и $H^2_{i,j}$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le s_i$ при $s_i > 1$) построим контролирующий сумматор $E^4_{i,j}$, подав на его входы выходы элементов $H^1_{i,j}$ и $H^2_{i,j}$.

Пусть общее число контролирующих сумматоров $E^3_{i,j}$ и $E^4_{i,j}$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le s_i$) в схеме оказалось равным q.Для завершения синтеза схемы S построим еще цепочку Z, состоящую из $t+q-1$ сумматоров E_1, E_2, ..., E_{t+q-1}. На первый вход каждого элемента E_k ($2 \le k \le t+q-1$) в цепочке Z подается выход предыдущего элемента E_{k-1}. На оставшиеся входы элементов цепочки Z подаются выходы подсхем C^1_1, C^1_2, ..., C^1_t, а также выходы всех контролирующих сумматоров $E^3_{i,j}$, $E^4_{i,j}$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le s_i$ при $s_i > 1$). Порядок, в котором эти выходы элементов и переменные подаются на указанные входы элементов, может быть произвольным. Выход элемента E_{t+q-1} является выходом схемы S. Конец описания схемы S.

В отсутствие неисправностей построенная схема реализует функцию f, так как на выходах всех контролирующих сумматоров на всех входных наборах оказываются нули. На наборе $(\tilde{1}^d, \tilde{0}^{n-d})$ на выходах всех элементов схемы S оказываются нули.

Рассмотрим случай вставки m-входового не сохраняющего 0 элемента E под некоторый элемент E' схемы S. В дальнейшем описываются значения на входах и выходах элементов лишь на входном наборе $\alpha = (\tilde{1}^d, \tilde{0}^{n-d})$ схемы. Заметим: на входах элемента E при этом оказываются нули, а на выходе — единица.

Пусть $E' = E_{t+q-1}$. Тогда элемент E становится выходным элементом схемы. На выходе элемента E оказывается единица, поэтому такие неисправности обнаруживаются на наборе α.

Пусть $E' = E_k$ ($1 \le k \le t+q-2$). Тогда выход элемента E подается на первый вход элемента E_{k+1}. На входах элемента E оказываются нули, а на выходе — единица, далее от элемента E вдоль цепочки Z неверное значение передается до выхода схемы, поэтому неисправность обнаруживается на наборе α.

Пусть $E' = E^3_{i,j}$ или $E' = E^4_{i,j}$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le s_i - 1$ при $s_i > 1$). Тогда выход элемента E подается на вход некоторого элемента E_k. На входах элемента E оказываются нули, а на выходе — единица, далее от элемента E_k вдоль цепочки Z неверное значение передается до выхода схемы, поэтому неисправность обнаруживается на наборе α.

Пусть $E' = E^1_{i,s_i-1}$ ($1 \le i \le t$). Тогда выход элемента E подается на вход некоторого элемента E_k. На входах элемента E оказываются нули, а на выходе — единица, далее от элемента E_k вдоль цепочки Z неверное значение передается до выхода схемы, поэтому неисправность обнаруживается на наборе α.

Пусть $E' = E^1_{i,j}$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le s_i - 2$ при $s_i > 2$). Тогда выход элемента E подается на входы элемента $E^3_{i,j}$ и элемента $E^1_{i,j+1}$. На наборе α значение на выходе элемента $E^1_{i,j+1}$ не изменится по сравнению со случаем отсутствия неисправностей и останется равным нулю, а вот значение на выходе элемента $E^3_{i,j}$ изменится с нуля на единицу. Выход элемента $E^3_{i,j}$ подается на вход некоторого элемента E_k цепочки Z. От элемента E_k вдоль цепочки Z неверное значение передается до выхода схемы, поэтому неисправность обнаруживается на наборе α.

Пусть $E' = E^2_{i,j}$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le s_i - 2$ при $s_i > 2$). Тогда выход элемента E подается на вход элемента $E^3_{i,j}$ и — при $j < s_i - 2$ — на вход элемента $E^2_{i,j+1}$. На наборе α значение на выходе элемента $E^2_{i,j+1}$ не изменится по сравнению со случаем отсутствия неисправностей и останется равным нулю, а вот значение на выходе элемента $E^3_{i,j}$ изменится с нуля на единицу. Выход элемента $E^3_{i,j}$ подается на вход некоторого элемента E_k цепочки Z. От элемента E_k вдоль цепочки Z неверное значение передается до выхода схемы, поэтому неисправность обнаруживается на наборе α.

Пусть $E' = G_{i,1}^1$ или $E' = H_{i,1}^1$ ($1 \le i \le t$, $s_i = 1$). Выход неисправной подсхемы $H_{i,1}^1$, под элемент которой E' осуществилась вставка элемента E, подается на вход некоторого элемента E_k цепочки Z. От элемента E до элемента E_k и далее от элемента E_k вдоль цепочки Z неверное значение передается до выхода схемы, поэтому неисправность обнаруживается на наборе α.

Пусть $E' = G_{i,j}^1$ или $E' = H_{i,j}^1$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le s_i - 2$ при $s_i > 1$). Выход неисправной подсхемы $H_{i,1}^1$, под элемент которой E' осуществилась вставка элемента E, подается на входы сумматора $E_{i,j}^4$ и конъюнктора $E_{i,\max(j-1,1)+1}^1$. На наборе α значение на выходе элемента $E_{i,\max(j-1,1)+1}^1$ не изменится по сравнению со случаем отсутствия неисправностей и останется равным нулю, а вот значение на выходе элемента $E_{i,j}^4$ изменится с нуля на единицу. Выход элемента $E_{i,j}^4$ подается на вход некоторого элемента E_k цепочки Z. От элемента E_k вдоль цепочки Z неверное значение передается до выхода схемы, поэтому неисправность обнаруживается на наборе α.

Пусть $E' = G_{i,j}^2$ или $E' = H_{i,j}^2$ ($1 \le i \le t$, $1 \le j \le s_i - 2$ при $s_i > 1$). Выход неисправной подсхемы $H_{i,1}^2$, под элемент которой E' осуществилась вставка элемента E, подается на входы сумматора $E_{i,j}^4$ и, возможно, конъюнктора $E_{i,\max(j-1,1)+1}^2$. На наборе α значение на выходе элемента $E_{i,\max(j-1,1)+1}^2$ не изменится по сравнению со случаем отсутствия неисправностей и останется равным нулю, а вот значение на выходе элемента $E_{i,j}^4$ изменится с нуля на единицу. Выход элемента $E_{i,j}^4$ подается на вход некоторого элемента E_k цепочки Z. От элемента E_k вдоль цепочки Z неверное значение передается до выхода схемы, поэтому неисправность обнаруживается на наборе α.

Итак, оказалось, что множество $\{\alpha\}$ является единичным проверяющим тестом для схемы S. Теорема доказана.

Следствие. *При любом натуральном* $n \ge 1$ *имеет место равенство* $L_{B'}(U_1', n) = 1$.

Для базиса B' и источника неисправностей U'' имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *При любом натуральном* $n \geq 1$ *для произвольной булевой функции* $f(\tilde{x}^n)$*, не равной константе* 0 *и тождественной функции, имеет место равенство* $L_{B'}(U_1'', f) = 1$.

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$. Не существует неизбыточных (относительно U_1'') СФЭ в базисе B', реализующих константу 0. Действительно, рассмотрим произвольную СФЭ в базисе B', реализующую константу 0. Пусть E' — выходной элемент этой схемы. Легко заметить, что вставка сохраняющего нуль элемента E от элементов E', E', ..., E' под элемент E' необнаруживаема, что противоречит неизбыточности схемы.

Случай 2. $f(\tilde{x}^n) \equiv 1$. Константу 1 можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $x_1 \sim x_1$. Эта схема допускает единичный проверяющий тест $\{(\tilde{1}^n)\}$, поэтому $L_{B'}(U_1'', f) = 1$.

Далее будем считать, что функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех переменных.

Случай 3. $f(x_1) = x_1$. Тождественную функцию x_1 можно реализовать схемой без элементов. Эта схема абсолютно надежна, поэтому $L_{B'}(U_1'', f) = 0$. Неконгруэнтных этой функции f функций, допускающих абсолютно надежные реализации относительно рассматриваемого источника неисправностей, очевидно, не существует.

Случай 4. $f(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ или $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Функцию $x_1 \sim x_2$ можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $x_1 \sim x_2$. Функцию $x_1 x_2$ можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $x_1 x_2$. Нетрудно видеть, что каждая из этих схем допускает единичный проверяющий тест $\{(1,1)\}$, поэтому $L_{B'}(U_1'', f) = 1$.

Случай 5. $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$. Функцию $x_1 \oplus x_2$ можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $x_{i_1} \oplus x_{i_2}$. Эта схема допускает единичный проверяющий тест $\{(0,1)\}$, поэтому $L_{B'}(U_1'', f) = 1$.

Случай 6. $f(x_1) = \overline{x}_1$. Функцию $\overline{x}_1$ можно реализовать схемой, которая моделирует формулу $(x_1 \sim x_1) \oplus x_1$. Эта схема допускает единичный проверяющий тест $\{(0)\}$, поэтому $L_{B'}(U_1'', f) = 1$.

Случай 7. Функция $f(\tilde{x}^n)$ не конгруэнтна функциям, рассмотренным в случаях 1–6. Поскольку функция f тождественно не равна константе 0, найдется набор $\alpha \in \{0,1\}^n$ такой, что $f(\alpha) = 1$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha = (\tilde{0}^d, \tilde{1}^{n-d})$ $(0 \leq d \leq n)$. Для функции $f(\bar{x}_1,...\bar{x}_d,x_{d+1,...,x_n})$ построим полином Жегалкина, а затем навесим в нем отрицания на все вхождения переменных x_1, ..., x_d, — получим поляризованный полином P_f для функции f с вектором поляризации $(\tilde{1}^d,\tilde{0}^{n-d})$. Перепишем этот полином в следующем виде: $P_f = K_1 \sim \cdots \sim K_t \sim c_0$, где K_1, ..., K_t — попарно неэквивалентные элементарные конъюнкции, в которых отрицания висят в точности над переменными x_1, ..., x_d, а $c_0 = 1$, поскольку на наборе α все конъюнкции K_1, ..., K_t обращаются в единицу и $f(\alpha) = 1$. Значит, $f = K_1 \sim \cdots \sim K_t$.

Далее приведем описание неизбыточной схемы S, которая реализует функцию f и допускает единичный проверяющий тест $\{(\tilde{0}^d,\tilde{1}^{n-d})\}$ длины 1.

Реализуем элементарную конъюнкцию $K_i = x_{i,1}^{\sigma_{i,1}} \cdots x_{i,r_i}^{\sigma_{i,s_i}}$ ($1 \le i \le t$, $\sigma_{i,j} \in \{0,1\}$) подсхемой C_i следующим образом. Для каждой буквы $x_{i,j}^{\sigma_{i,j}}$ ($1 \le j \le s_i$) построим свою собственную подсхему $X_{i,j}$: если $\sigma_{i,j} = 1$, то подсхема $X_{i,j}$ представляет собой вход $x_{i,j}$ схемы S (являющийся и выходом подсхемы $X_{i,j}$), если же $\sigma_{i,j} = 0$, то подсхема $X_{i,j}$ представляет собой цепочку из элемента эквивалентности $G_{i,j}$, на оба входа которого подается переменная $x_{i,j}$, и сумматора $H_{i,j}$, на первый вход которого подается переменная $x_{i,j}$, а на второй — выход элемента $G_{i,j}$ (выходом подсхемы $X_{i,j}$ в этом случае является выход элемента $H_{i,j}$). Общими у различных подсхем $X_{i,j}$ могут быть только входы схемы S .При $s_i = 1$ подсхема C_i совпадает с подсхемой $X_{i,1}$. При $s_i > 1$ построим цепочку Z_i из $s_i - 1$ конъюнкторов. На входы первого конъюнктора $E_{i,1}$ цепочки Z_i подаются выходы подсхем $X_{i,1}$ и $X_{i,2}$, а на первый и второй входы конъюнктора $E_{i,j}$ $(2 \le j \le s_i - 1)$ подаются выход предыдущего конъюнктора $E_{i,j-1}$ и выход подсхемы $X_{i,j+1}$. При $s_i > 1$ выходом построенной подсхемы C_i является выход конъюнктора E_{i,s_i-1}.

Для завершения синтеза схемы S построим еще цепочку Z, состоящую из $t+q-1$ элементов эквивалентности E_1, E_2, ..., E_{t+q-1}. На первый вход каждого элемента E_k $(2 \le k \le t+q-1)$ в цепочке Z подается выход предыдущего элемента E_{k-1}. На оставшиеся входы элементов цепочки Z подаются выходы подсхем C_1, C_2, ..., C_t. Порядок, в котором эти выходы элементов и переменные подаются на указанные входы элементов, может быть произвольным. Выход элемента E_{t+q-1} является выходом схемы S. Конец описания схемы S.

В отсутствие неисправностей построенная схема с очевидностью реализует функцию f. На наборе $\alpha = (\tilde{0}^d, \tilde{1}^{n-d})$ на выходах всех элементов схемы S оказываются нули.

Рассмотрим случай вставки m-входового не сохраняющего 1 элемента E под некоторый элемент E' схемы S. В дальнейшем описываются значения на входах и выходах элементов лишь на входном наборе $\alpha = (\tilde{0}^d, \tilde{1}^{n-d})$ схемы. Заметим: на входах элемента E при этом оказываются единицы, а на выходе — нуль. Ясно, что, каким бы ни был элемент E', неисправность на наборе α обнаружится, поскольку неверное значение 0 от выхода элемента E будет передано до выхода схемы. Теорема доказана.

Следствие. *При любом* n, $n \in \mathbb{N}$, *верно равенство* $L_{B'}(U_1'', n) = 1$.

Рассмотрим теперь базис $\hat{B} = \{x \vee y, x \oplus y, x \sim y,\}$. В силу принципа двойственности для базиса $\hat{B}$ и источника неисправностей U_1'' имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. *При любом натуральном* $n \geq 1$ *для произвольной булевой функции* $f(\tilde{x}^n)$, *не равной константе* 0 *и тождественной функции, имеет место равенство* $L_{\hat{B}}(U_1'', f) = 1$.

Теорема 4. *При любом натуральном* $n \geq 1$ *для произвольной булевой функции* $f(\tilde{x}^n)$, *не равной константе* 1 *и тождественной функции, имеет место равенство* $L_{\hat{B}}(U_1', f) = 1$.

Следствие. *При любом натуральном* $n \geq 1$ *имеют место равенства* $L_{\hat{B}}(U_1', n) = 1$, $L_{\hat{B}}(U_1'', n) = 1$.

Заключение

В статье рассмотрен случай неисправности типа одиночной вставки не сохраняющего некоторую фиксированную булеву константу элемента в схему из функциональных элементов. Установлено, что для двух специальных полных схемных базисов для любой отличной от константы и тождественной функции булевой функции найдется реализующая эту функцию схема такая, что для обнаружения любой подобной неисправности достаточно одного набора. Этот результат может быть интересен как теоретикам в области математической кибернетики, так и — в качестве справочного материала — специалистам, разрабатывающим и тестирующим интегральные схемы.

Литература

1. *DasGupta S., Hartmann C. R. P., Rudolph L. D.* Dual-mode logic for function-independent fault testing // IEEE Trans. Comput. 1980. Vol. C-29, Iss. 11. Pp. 1025–1029.
2. *Hayes J. P.* On modifying logic networks to improve their diagnoaability // IEEE Trans. Comput. 1974. Vol. C-23, Iss. 1. Pp. 56–62.
3. *Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.* Analysis of different types of faults in a class of Boolean circuits // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT). 2012. Vol. 2, Iss. 4. Pp. 145–149.
4. *Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.* Single network structure for stuck-at and bridging fault analysis and diagnosis for Exclusive-OR sum of products in Reed–Muller canonical circuits // Elixir Elec. Eng. 2013. Vol. 57. Pp. 14080–14085.
5. *Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.* Network structure for testability improvement in exclusive-OR sum of products Reed–Muller canonical circuits // Int. J. Eng. Res. Gen. Sci. 2015. Vol. 3, Iss. 3. Pp. 368–378.
6. *Hirayama T., Koda G., Nishitani Y., Shimizu K.* Easily testable realization based on OR-AND-EXOR expansion with single-rail inputs // IEICE Trans. Inf. & Syst. 1999. Vol. E-82D, No. 9. Pp. 1278–1286.
7. *Inose H., Sakauchi M.* Synthesis of automatic fault diagnosable logical circuits by function conversion method // Proc. First USA-Japan Computer Conf. 1972. Pp. 426–430.
8. *Jameil A. K.* A new single stuck fault detection algorithm for digital circiuts // Int. J. Eng. Res. Gen. Sci. 2015. Vol. 3, Iss. 1. Pp. 1050–1056.
9. *Kodandapani K. L.* A note on easily testable realizations for logic functions // IEEE Transactions on Computers. 1974. Vol. C-23, No. 3. Pp. 332–333.
10. *Neelakantan P. N., Ebenezer J. A.* Single stuck-at fault diagnosing circuit of Reed–Muller canonical exclusive-or sum of product Boolean expressions // J. Comput. Sci. 2006. Vol. 2, Iss. 7. Pp. 595–599.
11. *Reddy S. M.* Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. Vol. 21, Iss. 1. Pp. 124–141.
12. *Saluja K.K., Reddy S.M.* On minimally testable logic networks // IEEE Trans. Comput. 1974. Vol. C-23, No. 1. Pp. 552–554.
13. *Sasao T., Besslich P.* On the complexity of mod-2 sum PLA's // IEEE Trans. on Comput. 1990. Vol. 39, Iss. 2. Pp. 262–266.
14. *Shah T., Matrosova A., Fujita M., Singh V.* Multiple stuck-at fault testability analysis of ROBDD based combinational circuit design // Journal of Electronic Testing (JETTA). 2018. Vol. 34, No. 1.
15. *Thamarai S. M., Kuppusamy K., Meyyappan T.* Fault detection and test minimization methods for combinational circuits — A survey //

International Journal of Computer Trends and Technology. 2011. Vol. 2, Iss. 2. Pp. 140–146.

16. *Бородина Ю. В.* О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2008. № 1. С. 40–44.
17. *Бородина Ю. В.* О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2008. Т. 63, № 5. С. 49–52.
18. *Бородина Ю.В.* Нижняя оценка длины полного теста в базисе $\{x \mid y\}$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2015. Т. 70, № 4. С. 49–51.
19. *Бородина Ю. В., Бородин П. А.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа ``0'' на выходах элементов //Дискретная математика.2010. Т. 22, вып. 3. С. 127–133.
20. *Ковaценко С. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2000. № 2. С. 45–47.
21. *Коляда С. С.* О единичных проверяющих тестах для константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 6. С. 47–49.
22. *Коляда С. С.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисах из элементов, имеющих не более двух входов // Дискретный анализ и исследование операций. 2013. Т. 20, № 2. С. 58–74.
23. *Коляда С. С.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2013. № 4. С. 32–34.
24. *Носков В. Н.* Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем // Дискретн. матем. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 3–23.
25. *Перязев Н. А.* Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 3. С. 323–326.
26. *Попков К. А.* Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // Дискретная математика. 2017. Т. 29, вып. 2. С. 53–69.
27. *Попков К. А.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание» // Прикладная дискретная математика. 2017. № 38. С. 66–88.
28. *Попков К. А.* Полные проверяющие тесты длины два для схем при произвольных константных неисправностях элементов // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2018. Т. 25, № 2. С. 62–81.

29. *Попков К. А.* Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 3. С. 99–116.
30. *Попков К. А.* Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22, вып. 3. С. 131–147.
31. *Попков К. А.* Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Прикладная дискретная математика. 2019. № 43. С. 78–100.
32. *Попков К. А.* Короткие полные проверяющие тесты для схем из двухвходовых функциональных элементов // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2019. Т. 26, № 1. С. 89–113.
33. *Попков К. А.* Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 3. С. 99–116.
34. *Редькин Н. П.* О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Изв. вузов. Матем. 1988. № 7. С. 57–64.
35. *Редькин Н. П.* О схемах, допускающих короткие тесты // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 1988. № 2. С. 17–21.
36. *Редькин Н.П.* О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 198–222.
37. *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
38. *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 217–230.
39. *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 217–230.
40. *Романов Д. С.* О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. Т. 25, вып. 2. С. 104–120.
41. *Романов Д. С.* Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. 2014. Т. 26, вып. 2. С. 100–130.
42. *Романов Д. С.* О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно инверсных неисправностей на

выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2015. № 1. С. 30–37.
43. *Романов Д. С., Романова Е. Ю.* Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. 2017. Т. 29, № 4. С. 87–105.
44. *Селезнева С. Н.* О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами // Дискретная математика. — 2002. Т. 14, вып. 2. С. 48–53.
45. *Селезнева С. Н.* О сложности обобщенно-поляризованных полиномов *k*-значных функций // Дискретная математика. 2009. Т. 21, вып. 4. С. 20–29.
46. *Селезнева С. Н.* Сложность систем функций алгебры логики и систем функций трехзначной логики в классах поляризованных полиномиальных форм // Дискретная математика. 2015. Т. 27, вып. 1. С. 111–122.
47. *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля электрических схем // Труды МИАН СССР. 1958. Т. 51. С. 270–360.
48. *Яблонский С. В., Чегис И. А.* О тестах для электрических схем // УМН. 1955. Т. 10, вып. 4(60). С. 182–184.