

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

«Утверждаю»

Декан факультета ВМК МГУ  
имени М.В. Ломоносова



Е.И. Моисеев

2017 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Алгебраическая геометрия и сложность алгоритмов»**

Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Дискретная математика и математическая кибернетика» (01.01.09)

2017

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### 1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Алгебраическая геометрия и сложность алгоритмов

### 2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре.

### 3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направления 01.06.01 «Математика и механика», «Дискретная математика и математическая кибернетика» (01.01.09).

### 4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина относится к вариативным спецкурсам (по выбору) образовательных программ.

### 5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
ПК-1 Владение современными методами построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методами разработки и реализации алгоритмов их решения на основе фундаментальных знаний в области математики и информатики	З1 (ПК-1) Знать: современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1) Уметь: применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения В1 (ПК-1) Владеть: навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации

	алгоритмов их решения
Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях. (УК -1)	У1 (УК-1) УМЕТЬ: анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыши реализации этих вариантов  В1(УК-1) ВЛАДЕТЬ: навыками анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1)	З1(ОПК-1) ЗНАТЬ: современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области У1(ОПК-1) УМЕТЬ: уметь самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
Способность применять современные методы математической кибернетики (ПК-4)	ЗНАТЬ: современные методы математической кибернетики; УМЕТЬ: применять современные методы математической кибернетики; ВЛАДЕТЬ: современными методами математической кибернетики.

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

## 6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов.

42 часа составляет контактная работа с преподавателем – 36 часов занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 0 часов индивидуальных консультаций, 0 часов мероприятий текущего контроля успеваемости, 2 часа групповых консультаций, 4 часа мероприятий промежуточной аттестации.

70 часов составляет самостоятельная работа аспиранта.

## 7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной и общей алгебре, основам программирования и алгоритмам, дискретной математике и основам кибернетики в объеме, соответствующем основным образовательным программам бакалавриата и магистратуры по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

## 8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В процессе обучения используются слайды с лекциями.

## 9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе рассматриваются некоторые основы алгебраической геометрии, которые применяются в современной алгебраической теории сложности алгоритмов. Особое внимание уделяется алгоритмам умножения в алгебре матриц и их сложности. Первая часть посвящена основным понятиям сложности алгоритмов. В ней рассматриваются виды сложности алгоритмов и их свойства, методы построения эффективных алгоритмов умножения матриц. Вторая часть посвящена основам алгебраической геометрии и ее применению для доказательства нижних оценок для сложности алгоритмов.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),	Всего (часы)	В том числе	
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них	Самостоятельная работа обучающегося, часы из них

форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, практические контрольные занятия и др)*	<b>Всего</b>	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	<b>Всего</b>
<p><b>Тема 1. Задача сложности умножения матриц</b></p> <p>Умножение матриц. Основные определения. Арифметический алгоритм для вычисления системы дробно-рациональных функций. Сложность арифметического алгоритма. Экспонента матричного умножения. «Эквивалентность» задач умножения матриц, обращения матрицы и вычисления определителя матрицы. Билинейный алгоритм для вычисления системы билинейных форм. Сложность билинейного алгоритма. Квадратичный алгоритм для вычисления системы</p>	16	8	-	-	-		8	8	-	8

билинейных форм. Сложность квадратичного алгоритма.										
<b>Тема 2. Методы получения верхних оценок для сложности умножения матриц</b>  Достаточность класса билинейных алгоритмов для нахождения экспоненты матричного умножения. Алгоритм Штрассена для умножения матриц 2x2 и его применение для умножения матриц произвольных размеров. Переход к трилинейным формам и тензорам. Ранг тензора. Соотношения между экспонентой матричного умножения и рангом тензора матричного умножения. Прямая сумма и прямое произведение тензоров матричного умножения, их свойства. Гипотеза о прямой сумме.	12	6	-	-	-	-	6	6	-	6
<b>Тема 3. Базовые понятия</b>	9	4	-	1	-	-	5	4	-	4

<p><b>тия алгебраической геометрии</b></p> <p>Плоские алгебраические кривые. Рациональные кривые. Связь с теорией полей. Особые и простые точки. Проективная плоскость. Замкнутые подмножества аффинных пространств. Рациональные функции. Неприводимые множества.</p>										
<p><b>Тема 4. Связь между алгебраической геометрией и сложностью алгоритмов</b></p> <p>Квазипроjektивные многообразия. Произведения и отображения квазипроjektивных многообразий. Размерность многообразий. Приближенные алгоритмы умножения матриц и граничный ранг тензора. Отсутствие полунепрерывности ранга тензора. Пример. Доказательство непрерывности граничного ранга тензора.</p>	12	6	-	-	-	-	6	6	-	6

<p><b>Тема 5. Некоторые понятия алгебры</b></p> <p>Теорема Гильберта о базисе. Деление с остатком и базисы Гребнера. Критерий Бухбергера. Множества нулей и аннуляторы. Условие совместности. Теорема Нётер о нормализации. Теорема Гильберта о нулях. Неприводимые многообразия.</p>	16	8	-	-	-	-	8	8	-	8
<p><b>Тема 6. Нижние оценки для сложности умножения матриц</b></p> <p>Метод подстановок для доказательства нижних оценок для ранга тензора. Оценка Блезера для ранга умножения матриц <math>3 \times 3</math>. Оценка Блезера для ранга умножения матриц произвольного размера. Оценка Ландсберга для ранга умножения матриц произвольного размера. Метод подстановок для доказательства нижних оценок для граничного</p>	9	4	-	1	-	-	5	4	-	4

ранга тензора. Оценка Ландсберга для граничного ранга умно- жения матриц произволь- ного размера.											
<b>6. Промежуточная атте- стация – устный экза- мен</b>	42	4					38				
<b>Итого</b>	108	42					66				

## 10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом.

**Тема 1 «Задача сложности умножения матриц»**

**Тема 2 «Методы получения верхних оценок для сложности умножения матриц»**

**Тема 3 «Базовые понятия алгебраической геометрии»**

**Тема 4 «Связь между алгебраической геометрией и сложностью алгоритмов»**

**Тема 5 «Некоторые понятия алгебры»**

**Тема 6 «Нижние оценки для сложности умножения матриц»**

## 11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

### Основная литература

1. Алексеев В. Б. Сложность умножения матриц. Обзор// Кибернетич. сборник. 1988. Вып. 25. С. 139-236.

2. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. МНМЦО, Москва. 2007.
3. Тыртышников Е.Е. Основы алгебры. ФИЗМАТЛИТ, Москва. 2017.
4. Peter Burgisser, Michael Clausen, and M. Amin Shokrollahi. Algebraic complexity theory. Fundamental Principles of Mathematical Sciences, vol. 315, Springer. Berlin, 1997.
5. Strassen V. Gaussian Elimination is not Optimal// Numer. Math. 1969. V 13. P. 354-356..

#### **Дополнительная литература**

1. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.
2. Алексеев В.Б. Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 2002.
3. Markus Blaser. Lower bounds for the bilinear complexity of associative algebras// Comput. Complexity 9 (2000), no. 2, 73-112.
4. Markus Blaser. On the complexity of the multiplication of matrices of small formats// J. Complexity 19 (2003), no. 1, 43-60.
5. J. M. Landsberg. New lower bounds for the rank of matrix multiplication, SIAM J. Comput. 43 (2014), no. 1, 144-149.
6. J. M. Landsberg. On the geometry of border rank algorithms for matrix multiplication and other tensors with symmetry. ArXiv: 1601.08229v1. 2016.
7. J. M. Landsberg. Geometry and Complexity Theory. Cambridge University Press, 2017.

#### **Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. <http://elibrary.ru>
2. [www.scopus.com](http://www.scopus.com)

#### **Информационные технологии, используемые в процессе обучения**

1. Программное обеспечение для подготовки слайдов лекций TeXnicCenter, LaTeX
2. Программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader
3. Издательская система LaTeX

### Активные и интерактивные формы проведения занятия

№ п\п	Тип занятия или внеаудиторной работы	Вид и тематика (название) интерактивного занятия
1	Лекции 1-18	Активное общение вида «вопрос-ответ» со слушателями во время лекций

### Материально-техническая база

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный меловой или маркерной доской и проектором.

### 12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Русский

### 13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛИ

в.н.с., к.ф.-м.н. Чокаев Бекхан Вахаевич

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«Алгебраическая геометрия и сложность алгоритмов»**

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю) <i>(критерии и показатели берутся из соответствующих карт компетенций, при этом пользуются либо традиционной системой оценивания, либо БРС)</i>					ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
	1	2	3	4	5	
	<b>Неудовлетворительно</b>	<b>Неудовлетворительно</b>	<b>Удовлетворительно</b>	<b>Хорошо</b>	<b>Отлично</b>	
ЗНАТЬ: современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения 31 (ПК-1)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные систематические знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Устный экзамен
УМЕТЬ: применять современные методы построения и анализа мате-	Отсутствие умений	Фрагментарные умения применять современные методы построения и анализа	В целом успешное, но не систематическое умение применять	Успешное, но содержащее отдельные пробелы умение	Сформированное умение применять современные методы построения и анализа	Устный экзамен

<p>математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1)</p>		<p>математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	
<p><b>ВЛАДЕТЬ:</b> навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения В1 (ПК-1)</p>	<p>Отсутствие навыков</p>	<p>Фрагментарное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>В целом успешное, но не полное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>Успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>Сформированное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>Устный экзамен</p>
<p><b>УМЕТЬ</b> критически анализировать и оценивать современные науч-</p>	<p>Отсутствие умений</p>	<p>Фрагментарные умения критически анализировать и оценивать современные научные</p>	<p>В целом успешное, но не систематическое умение критически анализи-</p>	<p>Успешное, но содержащее отдельные пробелы умение критически</p>	<p>Сформированное умение критически анализировать и оценивать современные научные</p>	<p>Устный экзамен</p>

ные достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях У1(УК-1)		достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	вать и оценивать современные научные достижения, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	анализировать и оценивать современные научные достижения, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	достижений, генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях	
ВЛАДЕТЬ: навыками анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях Код В1 (УК-1)	Отсутствие навыков	Фрагментарное применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач	В целом успешное, но не систематическое применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач	Успешное и систематическое применение навыков анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	доклад на научном семинаре
УМЕТЬ: самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Отсутствие умений	Частично освоенное умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных	В целом успешное, но не систематическое умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов	Успешное и систематическое умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-	доклад на научном семинаре

У1 (ОПК-1)		технологий	информационно-коммуникационных технологий	исследования и информационно-коммуникационных технологий	коммуникационных технологий	
ЗНАТЬ: современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области З1(ОПК-1)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	Сформированные систематические знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	доклад на научном семинаре
ЗНАТЬ современные методы математической кибернетики Код З1 (ПК-4)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о современных методах математической кибернетики	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах математической кибернетики	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах математической кибернетики	Сформированные систематические знания о современных методах математической кибернетики	Устный экзамен
УМЕТЬ применять современные методы математической кибернетики Код У1(ПК-4)	Отсутствие умений	Фрагментарные умения применять современные методы математической кибернетики	В целом успешное, но не систематическое умение применять современные методы математической кибернетики	Успешное, но содержащее отдельные пробелы умение применять современные методы математической кибернетики	Сформированное умение применять современные методы математической кибернетики	Отчет
ВЛАДЕТЬ современными ме-	Отсутствие навыков	Фрагментарное владение навыками со-	В целом успешное, но не сис-	Успешное, но содержащее отдель-	Сформированное владение навыками	Отчет

годами математической кибернетики Код В1(ПК-4)		временных методов математической кибернетики	тематическое применение навыков современных методов математической кибернетики	ные пробелы владение навыками современных методов математической кибернетики	оптимального выбора современных методов математической кибернетики	
---	--	--	--	--	--	--

### Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Список вопросов для устного экзамена.

1. Задача умножения матриц. Алгоритм Штрассена и его сложность.
2. Трилинейные формы. Алгоритм Пана и его сложность.
3. «Эквивалентность» задач умножения матриц, обращения матрицы и вычисления определителя матрицы.
4. Билинейные алгоритмы. Достаточность класса билинейных алгоритмов для нахождения экспоненты матричного умножения.
5. Трехмерные тензоры. Свойства ранга тензора. Гипотеза о прямой сумме.
6. Плоские алгебраические кривые. Рациональные кривые. Связь с теорией полей. Особые и простые точки.
7. Проективная плоскость. Теорема о регулярности рационального отображения проективной кривой.
8. Замкнутые подмножества аффинных пространств. Рациональные функции. Неприводимые множества.
9. Теорема о замкнутом множестве. Теорема единственности несократимого представления замкнутого множества.
10. Теорема о произведении неприводимых замкнутых множеств.
11. Теорема о регулярности рациональной функции на замкнутом множестве.
12. Квазипроективные многообразия. Произведения и отображения квазипроективных многообразий. Размерность многообразий.
13. Приближенные алгоритмы умножения матриц и граничный ранг тензора, его свойства.
14. Отсутствие полунепрерывности ранга тензора. Пример.
15. Доказательство непрерывности граничного ранга тензора.
16. Теорема Гильберта о базисе.
17. Деление с остатком и базисы Гребнера.
18. Критерий Бухбергера.
19. Множества нулей и аннуляторы. Условие совместности.

20. Теорема Нётер о нормализации.
21. Теорема Гильберта о нулях.
22. Метод подстановок для доказательства нижних оценок для ранга тензора.
23. Нижняя оценка Блезера для ранга умножения матриц  $3 \times 3$ .
24. Нижняя оценка Блезера для ранга умножения матриц произвольного размера.
25. Нижняя оценка Ландсберга для ранга умножения матриц произвольного размера.
26. Метод подстановок для доказательства нижних оценок для граничного ранга тензора.
27. Нижняя оценка Ландсберга для граничного ранга умножения матриц произвольного размера.

Материалы для мероприятий текущего контроля.

-

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

#### **Особенности организации процесса обучения**

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятием привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать дополнительную литературу по теме лекции и прочитать свои конспекты.

#### **Система контроля и оценивания**

Экзамен проходит устно. В билете - два вопроса. Подготовка к ответу в течение одного часа без источников.

#### **Структура и график контрольных мероприятий**

Устный экзамен в конце семестра.