

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ВМК МГУ,
Академик И.А. Соколов
«14» сентября 2022 г.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аналитические методы теории вероятностей
Analytical methods for probability theory

Программа (программы) подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова»

1. Краткая аннотация:

Название дисциплины Аналитические методы теории вероятностей

Цель изучения дисциплины – Курс позволяет расширить знания о некоторых аналитических методах теории вероятностей: метод характеристических функций, основы метода Тихомирова-Стейна, метод метрических расстояний. В курсе доказываются формулы обращения, неравенства сглаживания, связывающие метрику в пространстве распределений с интегралами от соответствующих характеристических функций, различные неравенства для характеристических функций, изучаются интегральные преобразования над характеристическими функциями. Исследуется связь между некоторыми вероятностными метриками.

2. Уровень высшего образования – аспирантура

3 Научная специальность 1.2.1., 1.2.2., 1.2.3., 1.1.2., 1.1.4., 1.1.5., 1.1.6., 2.3.5., 2.3.6.,
отрасль науки: физико-математические науки,

Научная специальность 1.2.2., отрасль науки: технические науки

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры- элективный курс.

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетные единицы, всего 72 часа, из которых 40 часов составляет контактная работа аспиранта с преподавателем, 32 часа составляет самостоятельная работа учащегося.

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы:

1. Математический анализ
2. Функциональный анализ
3. Теория вероятностей и математическая статистика
4. Дополнительные главы теории вероятностей

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы						Самостоятельная работа обучающегося, часы		
		из них						из них		
		Занятия лекционно го типа	Занятия семинарско го типа	Групповые консуль тации	Индивидуальные кон сультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	Всего
Тема 1. Метод характеристических функций Характеристические функции (х.ф.) и их основные свойства. Формулы обращения. Равенство Парсеваля, тождество Планшереля и его дискретный аналог (теорема Леви). Неравенства для вещественной части и абсолютного значения х.ф.	30	20	-	-	-		20	10	-	10

Связь х.ф. с хвостами распределения. Неравенства сглаживания. Характеристические функции и моменты. Интегральные преобразования х.ф. Преобразование смещения размера, равновесное преобразование и нулевого смещения.										
Тема 2. Вероятностные метрики Сложные и простые вероятностные метрики. Минимальные и протоминимальные метрики. Метрики Колмогорова, Канторовича, дзета-метрики, минимальные Lp-метрики и связь между ними.	20	10	-	-	-	-	10	10		10
Тема 3. Основы метода Тихомирова-Стейна Нормальное распределение как единственная неподвижная точка преобразования нулевого смещения. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями	20	8	-	-	-		8	12		12

уравнения Стейна. Оценки близости к нормальному распределению в дзета-метриках. Показательное распределение как единственная неподвижная точка равновесного преобразования. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями уравнения Стейна. Оценки точности показательной аппроксимации для распределений нормированных геометрических случайных сумм в дзета-метриках. Распределение Лапласа как единственная неподвижная точка симметричного (двойного) равновесного преобразования. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями уравнения Стейна. Оценки скорости сходимости геометрических случайных сумм к распределению Лапласа в дзета-метриках.										
Промежуточная аттестация: <i>устный экзамен</i>	2						2			

Итого	72						40			32
--------------	----	--	--	--	--	--	----	--	--	----

8. Образовательные технологии.

При проведении лекционных занятий предусматривается использование информационных технологий, включающих пакеты математических программ: MATLAB, MATHEMATICA и др., а также программы AdobeReader. Информационные и интерактивные технологии используются при обсуждении проблемных и неоднозначных вопросов, требующих выработки решения в ситуации неопределенности.

9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю):

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом.

Тема 1 «Метод характеристических функций»

1. М. Лозв. Теория вероятностей. М.: ИИЛ, 1962.
2. Е. Лукач. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
3. В.В. Петров. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
4. В.В. Петров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
5. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
6. И.Г. Шевцова. О неравенстве сглаживания. – *Доклады Академии наук*, 2010, т. 430, вып. 5, с. 600-602
7. И.Г. Шевцова. Точность нормальной аппроксимации: методы оценивания и новые результаты. М.: Аргамак-Медиа, 2016.
8. Н. Prawitz. Nocheinige Ungleichungen fur charakteristische Funktionen. – *Scandinavian Actuarial Journal*. 1991, No. 1, p. 49–73.
9. N.G. Ushakov. Selected Topics in Characteristic Functions. VSP, Utrecht, 1999.

Тема 2 «Вероятностные метрики»

1. С.С. Валландер. Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т.18, вып.4, с.824-827.
2. В.М.Золотарев. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. В.М.Золотарев. Вероятностные метрики. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т.28, вып.2, с.264-287.

Тема 3 «Основы метода Тихомирова-Стейна»

1. L.H.Y. Chen, L.Goldstein,Q.-M. Shao. Normal Approximation by Stein's Method. Springer, 2011.

2. Y. Rinott, V. Rotar. Normal Approximation by Stein's Method. – *Decisions in Economics and Finance*, 2000, vol.23, p.15-29.

10. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и вспомогательной учебной литературы ко всему курсу

Основная литература:

1. С.С. Валландер. Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т.18, вып.4, с.824-827.
2. В.М.Золотарев. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. Е. Лукач. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
4. М. Лозв. Теория вероятностей. М.: ИИЛ, 1962.
5. В.В. Петров. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
6. В.В. Петров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987
7. L.H.Y. Chen, L.Goldstein,Q.-M. Shao. Normal Approximation by Stein's Method. Springer, 2011.
8. N.G. Ushakov. Seleceted Topics in Characteristic Functions. VSP, Utrecht, 1999.

Дополнительная литература:

1. Н. Prawitz. NocheinigeUngleichungen fur charakteristischeFunktionen. – Scandinavian Actuarial Journal.1991, No. 1, p. 49–73
 2. И.Г. Шевцова. О неравенстве сглаживания. – *Доклады Академии наук*, 2010, т. 430, вып. 5, с. 600-602
 3. И.Г. Шевцова. Некоторые оценки для характеристических функций с применением к уточнению неравенства Мизеса. – *Информатика и ее применения*, 2009, т.3, вып. 3, с. 69-78.
 4. Y. Rinott, V. Rotar. Normal Approximation by Stein's Method. – *Decisions in Economics and Finance*, 2000, vol.23, p.15-29.
 5. I. Shevtsova. Moment-type estimates with asymptotically optimal structure for the accuracy of the normal approximation. – *Annales Mathematicae et Informaticae*, 2012, vol. 39, p.241-307.
 6. I. Shevtsova. On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications. – *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, vol.418, issue 1, p.185-210
- Перечень используемых информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение, информационные справочные системы (при необходимости):

<http://elibrary.ru>

www.scopus.com

<http://arxiv.org>

- Описание материально-технической базы.
Занятия проводятся в аудитории, оснащенной маркерной или меловой доской.

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

Степень, должность ФИО., e-mail, тел.: -Д.ф.-м.н., профессор Шевцова Ирина Геннадьевна, ishevtsova@cs.msu.ru, 4959395394

Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Вопросы для итоговой аттестации –экзамена:

1. Характеристические функции (х.ф.) и их основные свойства. Периодические х.ф. и решетчатые распределения.
2. Формулы обращения: для функций распределения (ф.р.), для плотностей с абсолютно интегрируемой х.ф., с неотрицательной интегрируемой х.ф., с неинтегрируемой х.ф.
3. Равенство Парсеваля, тождество Планшереля и его дискретный аналог (теорема Леви). Формула, выражающая связь скачка в произвольной точке произвольной ф.р. с интегралом от х.ф., ее конкретный вид для решетчатых распределений (с интегралом по ограниченной области).
4. Теоремы Хиткоута и Питмана (неравенства, связывающие вещественную часть и абсолютное значение х.ф. в разных точках). Связь хвостов ф.р. с х.ф.
5. Смеси х.ф. и интегральные преобразования, не выводящие за класс х.ф. Обобщенное и составное распределение Пуассона. Преобразование смещения размера, двойного смещения размера, нулевого смещения.
6. Неравенства сглаживания.
7. Х.ф. и моменты. Связь между дифференцируемостью и существованием соответствующих моментов. Разложение в ряд Тейлора. Классическая оценка точности аппроксимации х.ф. первыми членами ее разложения в ряд Тейлора с моментами целого и дробного порядка.
8. Замена в классической оценке остаточного члена в формуле Тейлора степенных функций тригонометрическими и интегралами от них. Оценка точности аппроксимации х.ф. первыми членами ее разложения в ряд Тейлора на основе модифицированного тейлоровского разложения комплексной экспоненты.
9. Масштабные смеси характеристических функций (х.ф.). Х.ф. преобразований смещения размера, смещения квадрата, равновесного, двойного (симметричного) равновесного и нулевого смещения
10. Соотношения между преобразованиями смещения размера, смещения квадрата, равновесным, двойным равновесным и нулевого смещения.
11. Распределения преобразований смещения размера, смещения квадрата, равновесного, двойного равновесного и нулевого смещения (ф.р. или плотность). Неподвижные точки.
12. Свойства преобразования смещения размера (моменты, стохастическая упорядоченность, свойство одного слагаемого).
13. Моменты и свойство одного слагаемого равновесного преобразования

14. Моменты и свойство одного слагаемого преобразования нулевого смещения
15. Оператор Стейна и уравнение Стейна для нормального распределения
16. Абсолютно-непрерывное решение уравнение Стейна для нормального распределения в классе произвольных тестовых функций h с конечным $E|h(Z)|$, где $Z \sim N(0,1)$
17. Решение уравнение Стейна для нормального распределения в классе липшицевых тестовых функций
18. Свойства решения уравнения Стейна для нормального распределения в классе липшицевых тестовых функций
19. Построение оценок скорости сходимости в ЦПТ в дзета-метриках методом Стейна
20. Оператор Стейна и уравнение Стейна для показательного распределения
21. Решение уравнения Стейна для показательного распределения и его свойства
22. Оценка скорости сходимости в теореме Реньи методом Стейна
23. Оператор Стейна и уравнение Стейна для распределения Лапласа
24. Решение уравнения Стейна для распределения Лапласа и его свойства
25. Оценка скорости сходимости геометрических случайных сумм к распределению Лапласа методом Стейна
26. Вероятностные метрики. Сложные и простые метрики. Минимальные метрики.
27. Структура вер. метрик. Примеры
28. Средняя метрика между ф.р. как метрика с дзета-структурой
29. Метрика полной вариации как метрика с дзета-структурой
30. Теорема Хеффдинга об экстремальных значениях совместной ф.р. при фиксированных маргинальных
31. Средняя метрика между ф.р. как минимальная метрика Бирнбаума-Орлича.
32. Теорема Канторовича-Рубинштейна
33. Классы $F_s^{\inf}$ и F_s : определение, свойства, примеры (представители классов).
34. Дзета-метрики: определение и свойства
35. Идеальные метрики: определение, свойства, примеры идеальных метрик
36. Метод метрических расстояний на примере ЦПТ

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Экзамен проходит по билетам, состоящим из 1 вопроса и 1 задачи. В случае если на вопрос и задачу был дан ответ, оцененный не ниже чем «удовлетворительно», аспирант получает общую оценку «зачтено».