Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ВМК МГУ,
Академик ____________ /И.А. Соколов/
«14» сентября 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аналитические методы теории вероятностей
Analytical methods for probability theory

Программа (программы) подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова»

1. Краткая аннотация

Курс позволяет расширить знания о некоторых аналитических методах теории вероятностей: метод характеристических функций, основы метода Тихомирова-Стейна, метод метрических расстояний. В куре доказываются формулы обращения, неравенства сглаживания, связывающие метрику в пространстве распределений с интегралами от соответствующих характеристических функций, различные неравенства для характеристических функций, изучаются интегральные преобразования над характеристическими функциями. Исследуется связь между некоторыми вероятностными метриками.

Одна из задач курса заключается в развитии способности к критическому анализу современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях.

2. Уровень высшего образования – подготовка кадров высшей квалификации.

3. Научная специальность в отрасли физико-математических наук - 1.2.1., 1.2.2., 1.2.3., 1.1.2., 1.1.4., 1.1.5., 1.1.6., 2.3.5., 2.3.6., а также в отрасли технических наук - 1.2.2.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры: Обязательные Дисциплины (модули) - Факультетская дисциплина (обязательная дисциплина по выбору).

5. Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетные единицы, всего 72 часа, из которых 40 часов составляет контактная работа аспиранта с преподавателем, 32 часа составляет самостоятельная работа аспиранта.

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы:

1. Математический анализ
2. Функциональный анализ
3. Теория вероятностей и математическая статистика
4. Дополнительные главы теории вероятностей.

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам:

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Всего (часы)**	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						**Самостоятельная работа обучающегося, часы** из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	**Всего**	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	**Всего**
Тема 1. Метод характеристических функций Характеристические функции (х.ф.) и их основные свойства. Формулы обращения. Равенство Парсеваля, тождество Планшереля и его дискретный аналог (теорема Леви). Неравенства для вещественной части и абсолютного значения х.ф. Связь х.ф. с хвостами распределения. Неравенства сглаживания.	**30**	20	-	-	-		**20**	10	-	**10**

Характеристические функции и моменты. Интегральные преобразования х.ф. Преобразование смещения размера, равновесное преобразование и нулевого смещения.										
Тема 2. Вероятностные метрики Сложные и простые вероятностные метрики. Минимальные и протоминимальные метрики. Метрики Колмогорова, Канторовича, дзета-метрики, минимальные Lp-метрики и связь между ними.	**20**	10	-	-	-	-	**10**	10	-	**10**
Тема 3. Основы метода Тихомирова-Стейна Нормальное распределение как единственная неподвижная точка преобразования нулевого смещения. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями уравнения Стейна. Оценки близости к нормальному распределению в дзета-метриках. Показательное распределение как единственная неподвижная точка равновесного преобразования. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями уравнения Стейна. Оценки точности показательной аппроксимации для распределений нормированных геометрических случайных сумм	**20**	8	-	-	-	-	**8**	12	-	**12**

в дзета-метриках. Распределение Лапласа как единственная неподвижная точка симметричного (двойного) равновесного преобразования. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями уравнения Стейна. Оценки скорости сходимости. геометрических случайных сумм к распределению Лапласа в дзета-метриках.										
Промежуточная аттестация: устный экзамен	**2**	-	-	-	-	2	**2**	-	-	**-**
Итого	**72**	38	-	-	-	2	**40**	32	-	**32**

8. Образовательные технологии

При проведении лекционных занятий предусматривается использование информационных технологий, включающих пакеты математических программ: MATLAB, MATHEMATICA и др., а также программы AdobeReader. Информационные и интерактивные технологии используются при обсуждении проблемных и неоднозначных вопросов, требующих выработки решения в ситуации неопределенности.

9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа аспиранта состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы аспирантов в соответствии с тематическим планом.

Тема 1 «Метод характеристических функций»

1. М. Лоэв. Теория вероятностей. М.: ИИЛ, 1962.
2. Е. Лукач. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
3. В.В. Петров. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
4. В.В. Петров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
5. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
6. И.Г. Шевцова. О неравенстве сглаживания. – *Доклады Академии наук*, 2010, т. 430, вып. 5, с. 600-602
7. И.Г. Шевцова. Точность нормальной аппроксимации: методы оценивания и новые результаты. М.: Аргамак-Медиа, 2016.
8. H. Prawitz. NocheinigeUngleichungen fur charakteristischeFunktionen. – *Scandinavian Actuarial Journal*. 1991, No. 1, p. 49–73.
9. N.G. Ushakov. Selected Topics in Characteristic Functions. VSP, Utrecht, 1999.

Тема 2 «Вероятностные метрики»

1. С.С. Валландер. Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т.18, вып.4, с.824-827.
2. В.М.Золотарев. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. В.М.Золотарев. Вероятностные метрики. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т.28, вып.2, с.264-287.

Тема 3 «Основы метода Тихомирова-Стейна»

1. L.H.Y. Chen, L.Goldstein,Q.-M. Shao. Normal Approximation by Stein's Method. Springer, 2011.
2. Y. Rinott, V. Rotar. Normal Approximation by Stein's Method. – *Decisions in Economics and Finance*, 2000, vol.23, p.15-29.

10. Ресурсное обеспечение.

Основная литература:

1. С.С. Валландер. Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой. – Теория вероятн. и ее примен., 1973, т.18, вып.4, с.824-827.
2. В.М.Золотарев. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. Е. Лукач. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
4. М. Лоэв. Теория вероятностей. М.: ИИЛ, 1962.
5. В.В. Петров. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
6. В.В. Петров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987
7. L.H.Y. Chen, L.Goldstein,Q.-M. Shao. Normal Approximation by Stein's Method. Springer, 2011.
8. N.G. Ushakov. Seleceted Topics in Characteristic Functions. VSP, Utrecht, 1999.

Дополнительная литература:

1. H. Prawitz. NocheinigeUngleichungen fur charakteristischeFunktionen. – Scandinavian Actuarial Journal.1991, No. 1, p. 49–73

2. И.Г. Шевцова. О неравенстве сглаживания. – Доклады Академии наук, 2010, т. 430, вып. 5, с. 600-602
3. И.Г. Шевцова. Некоторые оценки для характеристических функций с применением к уточнению неравенства Мизеса. – Информатика и ее применения, 2009, т.3, вып. 3, с. 69-78.
4. Y. Rinott, V. Rotar. Normal Approximation by Stein's Method. – Decisions in Economics and Finance, 2000, vol.23, p.15-29.
5. I. Shevtsova. Moment-type estimates with asymptotically optimal structure for the accuracy of the normal approximation. – Annales Mathematicae et Informaticae, 2012, vol. 39, p.241-307.
6. I. Shevtsova. On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications. – Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, vol.418, issue 1, p.185-210

Информационные справочные системы:

- http://elibrary.ru
- www.scopus.com
- http://arxiv.org

Материально-техническая база:

- Занятия проводятся в аудитории, оснащенной маркерной или меловой доской.

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

- Д.ф.-м.н., профессор Шевцова Ирина Геннадьевна

Фонды оценочных средств,

необходимые для оценки результатов обучения

Вопросы для промежуточной аттестации – устного экзамена:

1. Характеристические функции (х.ф.) и их основные свойства. Периодические х.ф. и решетчатые распределения.
2. Формулы обращения: для функций распределения (ф.р.), для плотностей с абсолютно интегрируемой х.ф., с неотрицательной интегрируемой х.ф., с неинтегрируемой х.ф.
3. Равенство Парсеваля, тождество Планшереля и его дискретный аналог (теорема Леви). Формула, выражающая связь скачка в произвольной точке произвольной ф.р. с интегралом от х.ф., ее конкретный вид для решетчатых распределений (с интегралом по ограниченной области).
4. Теоремы Хиткоута и Питмана (неравенства, связывающие вещественную часть и абсолютное значение х.ф. в разных точках). Связьхвостовф.р. с х.ф.
5. Смеси х.ф. и интегральные преобразования, не выводящие за класс х.ф. Обобщенное и составное распределение Пуассона. Преобразование смещения размера, двойного смещения размера, нулевого смещения.
6. Неравенства сглаживания.
7. Х.ф. и моменты. Связь между дифференцируемостью и существованием соответствующих моментов. Разложение в ряд Тейлора. Классическая оценка точности аппроксимации х.ф. первыми членами ее разложения в ряд Тейлора с моментами целого и дробного порядка.
8. Замена в классической оценке остаточного члена в формуле Тейлора степенных функций тригонометрическими и интегралами от них. Оценка точности аппроксимации х.ф. первыми членами ее разложения в ряд Тейлора на основе модифицированного тейлоровского разложения комплексной экспоненты.
9. Масштабные смеси характеристических функций (х.ф.). Х.ф. преобразований смещения размера, смещения квадрата, равновесного, двойного (симметричного) равновесного и нулевого смещения
10. Соотношения между преобразованиями смещения размера, смещения квадрата, равновесным, двойным равновесным и нулевого смещения.
11. Распределения преобразований смещения размера, смещения квадрата, равновесного, двойного равновесного и нулевого смещения (ф.р. или плотность). Неподвижные точки.

12. Свойства преобразования смещения размера (моменты, стохастическая упорядоченность, свойство одного слагаемого).
13. Моменты и свойство одного слагаемогоравновесного преобразования
14. Моменты и свойство одного слагаемогопреобразования нулевого смещения
15. Оператор Стейна и уравнение Стейна для нормального распределения
16. Абсолютно-непрерывное решение уравнение Стейна для нормального распределения в классе произвольных тестовых функций h с конечным $E|h(Z)|$, где $Z \sim N(0,1)$
17. Решение уравнение Стейна для нормального распределения в классе липшицевых тестовых функций
18. Свойства решения уравнения Стейна для нормального распределения в классе липшицевых тестовых функций
19. Построение оценок скорости сходимости в ЦПТ в дзета-метриках методом Стейна
20. Оператор Стейна и уравнение Стейна для показательного распределения
21. Решение уравнения Стейна для показательного распределения и его свойства
22. Оценка скорости сходимости в теореме Реньи методом Стейна
23. Оператор Стейна и уравнение Стейна для распределения Лапласа
24. Решение уравнения Стейна для распределения Лапласа и его свойства
25. Оценка скорости сходимости геометрических случайных сумм к распределению ЛапласаметодомСтейна
26. Вероятностные метрики. Сложные и простые метрики. Минимальныеметрики.
27. Структуравер. метрик. Примеры
28. Средняя метрика между ф.р. как метрика с дзета-структурой
29. Метрика полной вариации как метрика с дзета-структурой
30. Теорема Хеффдинга об экстремальных значениях совместной ф.р. при фиксированных маргинальных
31. Средняя метрика между ф.р. как минимальная метрика Бирнбаума-Орлича.
32. Теорема Канторовича-Рубинштейна
33. Классы $F_s^{\inf}$ и F_s: определение, свойства, примеры (представители классов).
34. Дзета-метрики: определение и свойства
35. Идеальные метрики: определение, свойства, примеры идеальных метрик
36. Метод метрических расстояний на примере ЦПТ

Экзамен проходит по билетам. Уровень знаний аспиранта по каждому вопросу оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
2	3	4	5
Неудовлетворительно	**Удовлетворительно**	**Хорошо**	**Отлично**
Фрагментарные знания актуальных проблем, алгоритмов, теорем в области аналитических методов теории вероятностей.	Неполные знания актуальных проблем, алгоритмов, теорем в области аналитических методов теории вероятностей.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания актуальных проблем, алгоритмов, теорем в области аналитических методов теории вероятностей. .	Сформированные и систематические знания актуальных проблем, алгоритмов, теорем в области аналитических методов теории вероятностей.