

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

«Утверждаю»

Декан факультета ВМК МГУ  
имени М.В. Ломоносова

академик



Е.И. Моисеев

2018г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

«Аналитические методы теории вероятностей»

Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Теория вероятностей и математическая статистика» (01.01.05)

2018 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### 1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Аналитические методы теории вероятностей

### 2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре.

### 3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление 01.06.01 «Математика и механика». Направленность (профиль) «Теория вероятностей и математическая статистика» (01.01.05).

### 4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина относится к дисциплинам вариативной части образовательной программы и является обязательной для освоения в 4 семестре.

### 5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
Владение современными методами построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методами разработки и реализации алгоритмов их решения на основе фундаментальных знаний в области математики и информатики (ПК-1)	З1 (ПК-1) Знать: современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1) Уметь: применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения В1 (ПК-1) Владеть: навыками оптимального выбора современных методов построения и ана-

	<p>лиза математических моделей, возникающих при решении естественно-научных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>
<p>Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1)</p>	<p>З1(ОПК-1) ЗНАТЬ: современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области</p> <p>У1(ОПК-1) УМЕТЬ: уметь самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий</p>
<p>Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1)</p>	<p>У2 (УК-1)УМЕТЬ: при решении исследовательских и практических задач генерировать новые идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений</p> <p>В2 (УК-1)ВЛАДЕТЬ: навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях</p>
<p>Готовность использовать современные методы и технологии научной коммуникации на государственном и иностранном языках (УК-4)</p>	<p>З2(УК-4) ЗНАТЬ: стилистические особенности представления результатов научной деятельности в устной и письменной форме на государственном и иностранном языках</p> <p>У1(УК-4) УМЕТЬ: следовать основным нормам, принятым в научном общении на государственном и иностранном языках</p>

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

## 6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов.

38 часов составляет контактная работа с преподавателем – 36 часа занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 2 часа групповых консультаций.

70 часов составляет самостоятельная работа аспиранта.

## 7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по теории вероятностей, теории меры и математическому анализу в объеме, соответствующем основным образовательным программам бакалавриата и магистратуры по укрупненным группам направлений и специальности 01.00.00 «Математика и механика».

## 8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В процессе обучения используется редактор формул LaTeX для подготовки конспектов лекции и задач для решения на экзамене, а также программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader.

## 9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе рассматриваются некоторые аналитические методы теории вероятностей: метод характеристических функций, основы метода Тихомирова-Стейна, метод метрических расстояний. Доказываются формулы обращения, неравенства сглаживания, связывающие метрику в пространстве распределений с интегралами от соответствующих характеристических функций, различные неравенства для х.ф., изучаются интегральные преобразования над х.ф., не выводящие за класс х.ф. Исследуется связь между некоторыми вероятностными метриками.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),	Всего (часы)	В том числе	
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы	Самостоятельная работа обучающегося, часы
		из них	из них

<b>форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)</b>		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, практические контрольные занятия и др)*	<b>Всего</b>	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	<b>Всего</b>
<p><b>Тема 1. Метод характеристических функций</b></p> <p>Характеристические функции (х.ф.) и их основные свойства. Формулы обращения.</p> <p>Равенство Парсеваля, тождество Планшереля и его дискретный аналог (теорема Леви).</p> <p>Неравенства для вещественной части и абсолютного значения х.ф. Связь х.ф. с хвостами распределения.</p> <p>Смеси х.ф. и интегральные преобразования, не выводящие за класс х.ф. Преобразование смещения размера, двойного смещения размера, нулевого смещения.</p> <p>Неравенства сглаживания.</p> <p>Характеристические функции и моменты.</p>	26	26	-	-	-		26	-	-	-
<p><b>Тема 2. Вероятностные</b></p>	6	6	-	-	-	-	6			

<b>метрики</b>  Сложные и простые вероятностные метрики. Минимальные и протоминимальные метрики.  Метрики Колмогорова, Канторовича, дзета-метрики, минимальные $L_p$ -метрики и связь между ними.												
<b>Тема 3. Основы метода Тихомирова-Стейна</b>  Нормальное распределение как единственная неподвижная точка преобразования нулевого смещения. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями уравнения Стейна. Оценки близости к нормальному распределению в дзета-метриках.	4	4	-	-	-		4					
<b>4. Промежуточная аттестация – устный экзамен</b>	72						2					70
<b>Итого</b>	108						38					70

## 10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом .

### **Тема 1 «Метод характеристических функций»**

1. М. Лозв. Теория вероятностей. М.: ИИЛ, 1962.
2. Е. Лукач. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
3. В.В. Петров. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
4. В.В. Петров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
5. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
6. И.Г. Шевцова. О неравенстве сглаживания. – *Доклады Академии наук*, 2010, т. 430, вып. 5, с. 600-602
7. И.Г. Шевцова. Точность нормальной аппроксимации: методы оценивания и новые результаты. М.: Аргамак-Медиа, 2016.
8. H. Prawitz. Nocheinige Ungleichungen fur charakteristische Funktionen. – *Scandinavian Actuarial Journal*. 1991, No. 1, p. 49–73.
9. N.G. Ushakov. Selected Topics in Characteristic Functions. VSP, Utrecht, 1999.

### **Тема 2 «Вероятностные метрики»**

1. С.С. Валландер. Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т.18, вып.4, с.824-827.
2. В.М.Золотарев. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. В.М.Золотарев. Вероятностные метрики. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т.28, вып.2, с.264-287.

### **Тема 3 «Основы метода Тихомирова-Стейна»**

1. L.H.Y. Chen, L.Goldstein,Q.-M. Shao. Normal Approximation by Stein's Method. Springer, 2011.
2. Y. Rinott, V. Rotar. Normal Approximation by Stein's Method. – *Decisions in Economics and Finance*, 2000, vol.23, p.15-29.

## **11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

### **Основная литература**

1. С.С. Валландер. Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т.18, вып.4, с.824-827.
2. В.М.Золотарев. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. Е. Лукач. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
4. М. Лозв. Теория вероятностей. М.: ИИЛ, 1962.

5. В.В. Петров. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
6. В.В. Петров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987
7. L.H.Y. Chen, L.Goldstein,Q.-M. Shao. Normal Approximation by Stein's Method. Springer, 2011.
8. N.G. Ushakov. Selected Topics in Characteristic Functions. VSP, Utrecht, 1999.

#### **Дополнительная литература**

1. H. Prawitz. Nocheinige Ungleichungen fur charakteristische Funktionen. – Scandinavian Actuarial Journal.1991, No. 1, p. 49–73
2. И.Г. Шевцова. О неравенстве сглаживания. – *Доклады Академии наук*, 2010, т. 430, вып. 5, с. 600-602
3. И.Г. Шевцова. Некоторые оценки для характеристических функций с применением к уточнению неравенства Мизеса. – *Информатика и ее применения*, 2009, т.3, вып. 3, с. 69-78.
4. Y. Rinott, V. Rotar. Normal Approximation by Stein's Method. – *Decisions in Economics and Finance*, 2000, vol.23, p.15-29.
5. I. Shevtsova. Moment-type estimates with asymptotically optimal structure for the accuracy of the normal approximation. – *Annales Mathematicae et Informaticae*, 2012, vol. 39, p.241-307.
6. I. Shevtsova. On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications. – *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, vol.418, issue 1, p.185-210

#### **Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. <http://elibrary.ru>
2. [www.scopus.com](http://www.scopus.com)
3. <http://arxiv.org>

#### **Информационные технологии, используемые в процессе обучения**

1. Программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader
2. Издательская система LaTeX.

#### **Материально-техническая база**

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный маркерной или меловой доской.

## **12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ**

Русский, английский

## **13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛИ**

доцент, д.ф.-м.н. Шевцова Ирина Геннадьевна

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**«Аналитические методы теории вероятностей»**

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю) <i>(критерии и показатели берутся из соответствующих карт компетенций, при этом пользуются либо традиционной системой оценивания, либо БРС)</i>					ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
	1	2	3	4	5	
	<b>Неудовлетворительно</b>	<b>Неудовлетворительно</b>	<b>Удовлетворительно</b>	<b>Хорошо</b>	<b>Отлично</b>	
ЗНАТЬ: современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения 31 (ПК-1)	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	В целом сформированные, но неполные знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Сформированные систематические знания о современных методах построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методах разработки и реализации алгоритмов их решения	Устный экзамен
УМЕТЬ: применять современные методы построения и анализа мате-	Отсутствие умений	Фрагментарные умения применять современные методы построения и анализа	В целом успешное, но не систематическое умение применять	Успешное, но содержащее отдельные пробелы умение	Сформированное умение применять современные методы построения и анализа	Устный экзамен

<p>математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения У1 (ПК-1)</p>		<p>математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>применять современные методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современные методы разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	
<p><b>ВЛАДЕТЬ:</b> навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения В1 (ПК-1)</p>	<p>Отсутствие навыков</p>	<p>Фрагментарное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>В целом успешное, но не полное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>Успешное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>Сформированное владение навыками оптимального выбора современных методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также современных методов разработки и реализации алгоритмов их решения</p>	<p>Устный экзамен</p>
<p><b>УМЕТЬ:</b> при решении исследовательских и практических задач гене-</p>	<p>Отсутствие умений</p>	<p>Частично освоенное умение при решении исследовательских и практических задач</p>	<p>В целом успешное, но не систематически осуществляемое умение</p>	<p>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение</p>	<p>Сформированное умение при решении исследовательских и практических задач</p>	<p>доклад на научном семинаре</p>

рировать новые идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений У2 (УК-1)		генерировать идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений	при решении исследовательских и практических задач генерировать идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений	при решении исследовательских и практических задач генерировать идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений	генерировать идеи, поддающиеся операционализации исходя из наличных ресурсов и ограничений	
<b>ВЛАДЕТЬ:</b> навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях В2 (УК-1)	Отсутствие навыков	Фрагментарное применение технологий критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач.	В целом успешное, но не систематическое применение технологий критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач.	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение технологий критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач.	Успешное и систематическое применение технологий критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач.	доклад на научном семинаре
<b>ЗНАТЬ:</b> стилистические особенности представления результатов научной деятельности в устной и письменной форме на государственном и иностранном языках	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания стилистических особенностей представления результатов научной деятельности в устной и письменной форме на государственном и иностранном языках	Неполные знания стилистических особенностей представления результатов научной деятельности в устной и письменной форме на государственном	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания основных стилистических особенностей представления результатов научной деятель-	Сформированные систематические знания стилистических особенностей представления результатов научной деятельности в устной и письменной форме на государст-	доклад на научном семинаре

32(УК-4)			и иностранном языках	ности в устной и письменной форме на государственном и иностранном языках	венном и иностранном языках	
УМЕТЬ: следовать основным нормам, принятым в научном общении на государственном и иностранном языках У1(УК-4)	Отсутствие умений	Частично освоенное умение следовать основным нормам, принятым в научном общении на государственном и иностранном языках	В целом успешное, но не систематическое умение следовать основным нормам, принятым в научном общении на государственном и иностранном языках	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение следовать основным нормам, принятым в научном общении на государственном и иностранном языках	Успешное и систематическое умение следовать основным нормам, принятым в научном общении на государственном и иностранном языках	доклад на научном семинаре
УМЕТЬ: самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий У1 (ОПК-1)	Отсутствие умений	Частично освоенное умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	В целом успешное, но не систематическое умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Успешное и систематическое умение самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	реферат
ЗНАТЬ:	Отсутствие знаний	Фрагментарные	В целом сформированные	Сформированные,	Сформированные	реферат

современные методы исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области 31(ОПК-1)		представления современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	рованные, но неполные знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	систематические знания о современных методах исследования и информационно-коммуникационных технологий в соответствующей профессиональной области	
---	--	---	--	--	--	--

### Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Список вопросов для устного экзамена.

1. Характеристические функции (х.ф.) и их основные свойства. Периодические х.ф. и решетчатые распределения.
2. Формулы обращения: для функций распределения (ф.р.), для плотностей с абсолютно интегрируемой х.ф., с неотрицательной интегрируемой х.ф., с неинтегрируемой х.ф.
3. Равенство Парсеваля, тождество Планшереля и его дискретный аналог (теорема Леви). Формула, выражающая связь скачка в произвольной точке произвольной ф.р. с интегралом от х.ф., ее конкретный вид для решетчатых распределений (с интегралом по ограниченной области).
4. Теоремы Хиткоута и Питмана (неравенства, связывающие вещественную часть и абсолютное значение х.ф. в разных точках). Связь хвостов ф.р. с х.ф.
5. Смеси х.ф. и интегральные преобразования, не выводящие за класс х.ф. Обобщенное и составное распределение Пуассона. Преобразование смещения размера, двойного смещения размера, нулевого смещения.
6. Неравенства сглаживания.
7. Х.ф. и моменты. Связь между дифференцируемостью и существованием соответствующих моментов. Разложение в ряд Тейлора. Классическая оценка точности аппроксимации х.ф. первыми членами ее разложения в ряд Тейлора с моментами целого и дробного порядка.

8. Замена в классической оценке остаточного члена в формуле Тейлора степенных функций тригонометрическими и интегралами от них. Оценка точности аппроксимации х.ф. первыми членами ее разложения в ряд Тейлора на основе модифицированного тейлоровского разложения комплексной экспоненты.
9. Вероятностные метрики. Сложные и простые метрики. Минимальные и протоминимальные метрики.
10. Равномерная метрика, дзета-метрики, средние метрики,  $L_p$ -метрики между случайными величинами, Связь между ними.
11. Нормальное распределение как единственная неподвижная точка преобразования нулевого смещения.
12. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями уравнения Стейна.
13. Оценки близости к нормальному распределению в дзета-метриках

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

#### **Особенности организации процесса обучения**

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятием привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать дополнительную литературу по теме лекции и прочитать свои конспекты.

#### **Структура и график контрольных мероприятий**

Устный экзамен в конце семестра, реферат.