

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аналитические методы теории вероятностей
Analytical methods for probability theory

Программа (программы) подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

102.01.00.112-фмн-кфап, 102.01.00.122-фмн-кмф, 102.01.00.122-фмн- кски,
102.01.00.235-фмн- кски, 102.01.00.112-фмн-ком, 102.01.00.122-фмн-кани
102.01.00.112-фмн-кса, 102.01.00.122-фмн- кса, 102.01.00.112-фмн- кндсипу,
102.01.00.122-фмн- кндсипу, 102.01.00.114-фмн- кмс, 102.01.00.115-фмн- кммп
102.01.00.115-фмн- кмк, 102.01.00.123-фмн- кмк, 102.01.00.116-фмн- квтм,
102.01.00.122-фмн- квтм, 102.01.00.116-фмн- квм, 102.01.00.122-фмн- квм, 102.01.00.122-фмн- коу,
102.01.00.112-фмн- коу, 102.01.00.123-фмн- кио, 102.01.00.122-фмн- кио, 102.01.00.235-фмн- киит,
102.01.00.235-фмн-касвк, 102.01.00.235-фмн- ксп, 102.01.00.235-фмн- киб,
102.01.00.236-фмн-киб, 102.01.00.235-фмн-кая

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова»

1. Краткая аннотация:

Название дисциплины Аналитические методы теории вероятностей

Цель изучения дисциплины – в курсе рассматриваются некоторые аналитические методы теории вероятностей: метод характеристических функций, основы метода Тихомирова-Стейна, метод метрических расстояний. Доказываются формулы обращения, неравенства сглаживания, связывающие метрику в пространстве распределений с интегралами от соответствующих характеристических функций, различные неравенства для характеристических функций, изучаются интегральные преобразования над характеристическими функциями. Исследуется связь между некоторыми вероятностными метриками.

2. Уровень высшего образования – аспирантура

3. Научная специальность *1.1.4. «Теория вероятностей и математическая статистика»*.
Область науки: Физико-математические науки.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры- элективный курс.

5. *Объем дисциплины (модуля) составляет 2 зачетные единицы.*

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

На предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы:

1. Математический анализ
2. Функциональный анализ
3. Теория вероятностей и математическая статистика
4. Дополнительные главы теории вероятностей

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы						Самостоятельная работа обучающегося, часы		
		из них						из них		
Занятия лекционно-го типа	Занятия семинарско-го типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	Всего		
<p>Тема 1. Метод характеристических функций</p> <p>Характеристические функции (х.ф.) и их основные свойства. Формулы обращения.</p> <p>Равенство Парсеваля, тождество Планшереля и его дискретный аналог (теорема Леви).</p> <p>Неравенства для вещественной части и абсолютного значения х.ф.</p>	26	26	-	-	-		26	-	-	-

<p>Связь х.ф. с хвостами распределения.</p> <p>Неравенства сглаживания.</p> <p>Характеристические функции и моменты.</p> <p>Интегральные преобразования х.ф.</p> <p>Преобразование смещения размера, равновесное преобразование и нулевого смещения.</p>										
<p>Тема 2. Вероятностные метрики</p> <p>Сложные и простые вероятностные метрики.</p> <p>Минимальные и протоминимальные метрики.</p> <p>Метрики Колмогорова, Канторовича, дзета-метрики, минимальные Lp-метрики и связь между ними.</p>	6	6	-	-	-	-	6			
<p>Тема 3. Основы метода Тихомирова-Стейна</p> <p>Нормальное распределение как единственная неподвижная точка преобразования нулевого смещения. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями</p>	4	4	-	-	-		4			

<p>уравнения Стейна. Оценки близости к нормальному распределению в дзета-метриках.</p> <p>Показательное распределение как единственная неподвижная точка равновесного преобразования. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями уравнения Стейна. Оценки точности показательной аппроксимации для распределений нормированных геометрических случайных сумм в дзета-метриках.</p> <p>Распределение Лапласа как единственная неподвижная точка симметричного (двойного) равновесного преобразования. Связь модулей гладкости тестовых функций с соответствующими решениями уравнения Стейна. Оценки скорости сходимости геометрических случайных сумм к распределению Лапласа в дзета-метриках.</p>										
<p>Промежуточная аттестация: <i>устный экзамен</i></p>	38			2			2			

8. Образовательные технологии.

При проведении лекционных занятий предусматривается использование информационных технологий, включающих пакеты математических программ: MATLAB, MATHEMATICA и др., а также программы AdobeReader. Информационные и интерактивные технологии используются при обсуждении проблемных и неоднозначных вопросов, требующих выработки решения в ситуации неопределенности.

9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю):

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации.

Литература для самостоятельной работы студентов в соответствии с тематическим планом.

Тема 1 «Метод характеристических функций»

1. М. Лозв. Теория вероятностей. М.: ИИЛ, 1962.
2. Е. Лукач. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
3. В.В. Петров. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
4. В.В. Петров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
5. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
6. И.Г. Шевцова. О неравенстве сглаживания. – *Доклады Академии наук*, 2010, т. 430, вып. 5, с. 600-602
7. И.Г. Шевцова. Точность нормальной аппроксимации: методы оценивания и новые результаты. М.: Аргамак-Медиа, 2016.
8. Н. Prawitz. NocheinigeUngleichungen fur charakteristischeFunktionen. – *Scandinavian Actuarial Journal*. 1991, No. 1, p. 49–73.
9. N.G. Ushakov. Selected Topics in Characteristic Functions. VSP, Utrecht, 1999.

Тема 2 «Вероятностные метрики»

1. С.С. Валландер. Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т.18, вып.4, с.824-827.
2. В.М.Золотарев. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. В.М.Золотарев. Вероятностные метрики. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т.28, вып.2, с.264-287.

Тема 3 «Основы метода Тихомирова-Стейна»

1. L.H.Y. Chen, L.Goldstein,Q.-M. Shao. Normal Approximation by Stein's Method. Springer, 2011.

2. Y. Rinott, V. Rotar. Normal Approximation by Stein's Method. – *Decisions in Economics and Finance*, 2000, vol.23, p.15-29.

10. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и вспомогательной учебной литературы ко всему курсу

Основная литература:

1. С.С. Валландер. Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1973, т.18, вып.4, с.824-827.
2. В.М.Золотарев. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. Е. Лукач. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
4. М. Лозв. Теория вероятностей. М.: ИИЛ, 1962.
5. В.В. Петров. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
6. В.В. Петров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987
7. L.H.Y. Chen, L.Goldstein,Q.-M. Shao. Normal Approximation by Stein's Method. Springer, 2011.
8. N.G. Ushakov. Selected Topics in Characteristic Functions. VSP, Utrecht, 1999.

Дополнительная литература:

1. H. Prawitz. Nocheinige Ungleichungen fur charakteristische Funktionen. – *Scandinavian Actuarial Journal*.1991, No. 1, p. 49–73
2. И.Г. Шевцова. О неравенстве сглаживания. – *Доклады Академии наук*, 2010, т. 430, вып. 5, с. 600-602
3. И.Г. Шевцова. Некоторые оценки для характеристических функций с применением к уточнению неравенства Мизеса. – *Информатика и ее применения*, 2009, т.3, вып. 3, с. 69-78.
4. Y. Rinott, V. Rotar. Normal Approximation by Stein's Method. – *Decisions in Economics and Finance*, 2000, vol.23, p.15-29.
5. I. Shevtsova. Moment-type estimates with asymptotically optimal structure for the accuracy of the normal approximation. – *Annales Mathematicae et Informaticae*, 2012, vol. 39, p.241-307.
6. I. Shevtsova. On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications. – *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, vol.418, issue 1, p.185-210

- Перечень используемых информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса, включая программное обеспечение, информационные справочные системы (при необходимости):

<http://elibrary.ru>

www.scopus.com

<http://arxiv.org>

- Описание материально-технической базы.
Занятия проводятся в аудитории, оснащенной маркерной или меловой доской.

11. Язык преподавания – русский

12. Преподаватели:

Степень, должность ФИО., e-mail, тел.: -Д.ф.-м.н., профессор Шевцова Ирина Геннадьевна, ishevtsova@cs.msu.ru, 4959395394

Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения

Вопросы для итоговой аттестации – экзамена:

1. Характеристические функции (х.ф.) и их основные свойства. Периодические х.ф. и решетчатые распределения.
2. Формулы обращения: для функций распределения (ф.р.), для плотностей с абсолютно интегрируемой х.ф., с неотрицательной интегрируемой х.ф., с неинтегрируемой х.ф.
3. Равенство Парсеваля, тождество Планшереля и его дискретный аналог (теорема Леви). Формула, выражающая связь скачка в произвольной точке произвольной ф.р. с интегралом от х.ф., ее конкретный вид для решетчатых распределений (с интегралом по ограниченной области).
4. Теоремы Хиткоута и Питмана (неравенства, связывающие вещественную часть и абсолютное значение х.ф. в разных точках). Связь хвостов ф.р. с х.ф.
5. Смеси х.ф. и интегральные преобразования, не выводящие за класс х.ф. Обобщенное и составное распределение Пуассона. Преобразование смещения размера, двойного смещения размера, нулевого смещения.
6. Неравенства сглаживания.
7. Х.ф. и моменты. Связь между дифференцируемостью и существованием соответствующих моментов. Разложение в ряд Тейлора. Классическая оценка точности аппроксимации х.ф. первыми членами ее разложения в ряд Тейлора с моментами целого и дробного порядка.
8. Замена в классической оценке остаточного члена в формуле Тейлора степенных функций тригонометрическими и интегралами от них. Оценка точности аппроксимации х.ф. первыми членами ее разложения в ряд Тейлора на основе модифицированного тейлоровского разложения комплексной экспоненты.
9. Масштабные смеси характеристических функций (х.ф.). Х.ф. преобразований смещения размера, смещения квадрата, равновесного, двойного (симметричного) равновесного и нулевого смещения
10. Соотношения между преобразованиями смещения размера, смещения квадрата, равновесным, двойным равновесным и нулевого смещения.
11. Распределения преобразований смещения размера, смещения квадрата, равновесного, двойного равновесного и нулевого смещения (ф.р. или плотность). Неподвижные точки.

12. Свойства преобразования смещения размера (моменты, стохастическая упорядоченность, свойство одного слагаемого).
13. Моменты и свойство одного слагаемого равновесного преобразования
14. Моменты и свойство одного слагаемого преобразования нулевого смещения
15. Оператор Стейна и уравнение Стейна для нормального распределения
16. Абсолютно-непрерывное решение уравнение Стейна для нормального распределения в классе произвольных тестовых функций h с конечным $E|h(Z)|$, где $Z \sim N(0,1)$
17. Решение уравнение Стейна для нормального распределения в классе липшицевых тестовых функций
18. Свойства решения уравнения Стейна для нормального распределения в классе липшицевых тестовых функций
19. Построение оценок скорости сходимости в ЦПТ в дзета-метриках методом Стейна
20. Оператор Стейна и уравнение Стейна для показательного распределения
21. Решение уравнения Стейна для показательного распределения и его свойства
22. Оценка скорости сходимости в теореме Реньи методом Стейна
23. Оператор Стейна и уравнение Стейна для распределения Лапласа
24. Решение уравнения Стейна для распределения Лапласа и его свойства
25. Оценка скорости сходимости геометрических случайных сумм к распределению Лапласа методом Стейна
26. Вероятностные метрики. Сложные и простые метрики. Минимальные метрики.
27. Структура вер. метрик. Примеры
28. Средняя метрика между ф.р. как метрика с дзета-структурой
29. Метрика полной вариации как метрика с дзета-структурой
30. Теорема Хефдинга об экстремальных значениях совместной ф.р. при фиксированных маргинальных
31. Средняя метрика между ф.р. как минимальная метрика Бирнбаума-Орлича.
32. Теорема Канторовича-Рубинштейна
33. Классы F_s^{inf} и F_s : определение, свойства, примеры (представители классов).
34. Дзета-метрики: определение и свойства
35. Идеальные метрики: определение, свойства, примеры идеальных метрик
36. Метод метрических расстояний на примере ЦПТ

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Экзамен проходит по билетам, состоящим из 1 вопроса и 1 задачи. В случае если на вопрос и задачу был дан ответ, оцененный не ниже чем «удовлетворительно», аспирант получает общую оценку «зачтено».