С.Ю. Артамонов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ОБОБЩЕННЫЕ МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ*

Работа посвящена центральной теме Теории Приближений, а именно, соотношению между ошибкой приближения и структурными свойствами индивидуальной функции. Рассматривается приближение непериодических функций, принадлежащих пространству $L_p(R), 1 \le p \le +\infty$ (в случае $p = +\infty$ рассматривается пространство равномерно непрерывных ограниченных функций, снабженное нормой Чебышева) целыми функциями экспоненциального типа, которые также называются в силу теоремы Пэли-Винера-Шварца функциями с ограниченным спектром. Теория приближений, соответствующая значениям $1 \le p \le +\infty$ является высокоразвитой областью современного анализа, имеющей многочисленные приложения в различных отраслях современной математики. Однако, несмотря на активное развитие данной тематики, по-прежнему существует ряд открытых вопросов. Средние Фейера дают самый простой пример: ошибка приближения средними Фейера не эквивалентна ни одному из известных модулей гладкости. Данный пробел был заполнен путем введения К-функционала и модуля гладкости, соответствующих производной Рисса [6]. Более того, в работе [8] была решена в периодическом случае более общая задача описания качества приближения метода, порожденного произвольным генератором в терминах обобщенных модулей гладкости.

Рассматриваются "хорошие" ядра $\{K_\sigma^\varphi\}_{\sigma>0} \subset L_1(R)$, порожденные некоторой непрерывной функцией φ с компактным носителем, содержащимся в интервале $(-r, r)$, заданные соотношением $K_\sigma^\varphi(x) = \sigma F(\varphi)(\sigma x)$, $\sigma > 0$. Символы $F(\cdot)$ и $F^{-1}(\cdot)$ обозначают Фурье-преобразование и его обратное в пространстве $S'(R)$ умеренных распределений. Также предполагается, что $\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}$ для всех $x \in R$ и

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук, код МК-2915.2015.1

$\varphi(0)=1$. Аппаратом приближения являются сверточные интегралы $M_\sigma^\varphi f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)K_\sigma^\varphi(y)\,dy$.

Хорошо известно [3], что $\left\|f-M_\sigma^\varphi f\right\|_p \to 0\,(\sigma\to+\infty)$ для всех $f\in L_p(R)$, $1\le p\le+\infty$. Аппроксиманты $M_\sigma^\varphi f$ принадлежат пространству Бернштейна $B^p{}_{r\sigma}=\{g\in L_p(R):\operatorname{supp} F(g)\subset(-r\sigma,r\sigma)\}$, где $\operatorname{supp} f$ - носитель функции f.

Основная задача данной работы - найти эквивалентное описание ошибки приближения $\left\|f-M_\sigma^\varphi f\right\|_p$ в терминах структурных свойств функции. Оказывается, что классические модули гладкости не являются подходящим средством для описания ошибки приближения метода, порожденного произвольным генератором φ. Следовательно, возникает необходимость построения конструкций модулей гладкости, адаптированных для заданного метода приближения.

Отправной точкой является результат [4], устанавливающий эквивалентность ошибки приближения метода и обобщенного K-функционала. Более точно, пусть $B^p=\bigcup\limits_{\sigma>0}B^p{}_\sigma$, ψ- однородная функция порядка $s>0$, удовлетворяющая ряду дополнительных условий, $D(\psi)$ - дифференциальный оператор, формально определенный в пространстве B^p соотношением $D(\psi)=F\left[\psi\cdot F^{-1}\right]$. Запись $A(f,\delta)\sim B(f,\delta)$ означает, что существуют положительные константы C_1 и C_2, не зависящие от f и δ, такие что $C_1B(f,\delta)\le A(f,\delta)\le C_2B(f,\delta)$. Тогда при условии эквивалентности генераторов $1-\varphi$ и ψ в некотором смысле в окрестности нуля

$$\left\|f-M_\sigma^\varphi f\right\|_p \sim K_\psi(f,1/\sigma)_p:=\inf\{\left\|f-g\right\|_p+(1/\sigma)^s\left\|D(\psi)g\right\|_p:g\in B^p\} \quad (1)$$

Эквивалентность генераторов $1-\varphi$ и ψ означает, что $F\left[\frac{1-\varphi}{\psi}\eta\right]\in L_1(R)$ и $F\left[\frac{\psi}{1-\varphi}\eta\right]\in L_1(R)$ для некоторой гладкой функции η с компактным носителем. Данный результат служит "мостом" между ошибкой приближения и обобщенными модулями гладкости в силу "гибридной" конструкции K-функционала.

Обобщенные модули гладкости (или θ-модули) введены в работах [5] в пространствах $L_2[0,2\pi)$ и в работе [7] в пространствах $L_p[0,2\pi), 1\le p\le +\infty$. В непериодическом случае обобщенные модули гладкости введены в работе [1] и задаются соотношением $\omega_\theta(f,\delta)_p := \sup_{0\le h\le\delta}\left\|\sum_{\nu\in Z}\theta^\wedge(\nu)f(x+\nu h)\right\|_p$, где θ - 2π-периодическая непрерывная функция, такая что $\sum_{\nu\in Z}\left|\theta^\wedge(\nu)\right|<\infty$, удовлетворяющая ряду дополнительных условий (полные определения φ,ψ и θ можно найти в [1], [2] и [8]). Основой концепции обобщенных модулей гладкости в непериодическом случае является следующий результат, справедливый для "хороших" функций f, например, принадлежащих пространству Шварца S или пространству $L_2(R)$ [1]:

$$\Delta_\theta^h f(x) := \sum_{\nu\in Z}\theta^\wedge(\nu)f(x+\nu h) = F\left[\theta(h\cdot)F^{-1}(f)(\cdot)\right](x). \qquad (2)$$

Соотношение (2) устанавливает двойственную природу оператора обобщенной разности Δ_θ^h: с одной стороны Δ_θ^h является линейной комбинацией операторов сдвига (т.е. гладкость описывается в терминах дискретных значений функции) и выражается посредством функционального ряда, с другой стороны является оператором мультипликаторного типа.

Описанный выше подход позволяет продолжить "цепочку" эквивалентностей (1) путем добавления модуля гладкости. Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть φ,ψ,θ - генераторы сверточных интегралов, обобщенных К-функционалов и обобщенных модулей гладкости соответственно. Пусть η,τ - соответствующее разбиение единицы на $(-r,r)$ и $\exists m\in N: F\left[\frac{\varphi^m}{1-\varphi}\tau\right]\in L_1(R)$. Пусть $\theta_2(\cdot) := \frac{\theta(2\cdot)}{\theta(\cdot)}$ и $\sum_{\nu\in Z}\left|\theta_2^\wedge(\nu)\right|<\infty$. Если генераторы $1-\varphi,\psi,\theta$ эквивалентны в описанном выше смысле, тогда для $f\in L_p(R), 1\le p\le\infty$

$$\left\|f - M_\sigma^\varphi f\right\|_p \sim K_\psi(f,1/\sigma)_p \sim \omega_\theta(f,1/\sigma)_p, \quad \sigma>0. \qquad (3)$$

Доказательство верхней оценки в (3) опирается на неравенства мультипликаторного типа в пространствах Бернштейна [4]. Основными ингредиентами доказательства нижней оценки в (3) являются также неравенства мультипликаторного типа в пространствах Бернштейна, свойство однородности обобщенного модуля гладкости, прямая оценка типа Джексона для $\omega_\theta(f,\delta)_p$ [1].

В качестве следствий "цепочки" (3) при соответствующем выборе генераторов получаем как классические так и новые результаты (см., например, периодический случай [2]).

Литература

1. *Артамонов С.* Прямая оценка типа Джексона для общего модуля гладкости в непериодическом случае // *Математические заметки*. — 2015. — Т. 97, № 5. — С. 794–797.
2. *Артамонов С.* Качество приближения средними Фурье в терминах общих модулей гладкости // *Математические заметки*. — 2015. — Т. 98, № 1. — С. 3–11.
3. *Burinska Z., Runovski K., Schmeisser H.* On the approximation by generalized sampling series in lp-metrics // *Sampling Theory in Signal and Image Processing*. — 2006. — Vol. 5, no. 1. — P. 59–87.
4. *Burinska Z., Runovski K., Schmeisser H.* On quality of approximation by families of generalized sampling series // *Sampling Theory in Signal and Image Processing*. — 2009. — Vol. 8, no. 2. — P. 105–126.
5. А. И. Козко, А. В. Рождественский, “О неравенстве Джексона в *L*2 с обобщенным модулем непрерывности”// *Матем. сб.*, **195**:8 (2004), 3–46
6. *Runovski K., Schmeisser H.* On modulus of continuity related to the Riesz derivative // *Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik*. — 2011. — Vol. 1. — P. 1–12.
7. *Руновский К.* Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости // *Математические заметки*. — 2014. — Т. 95, № 6. — С. 899–910.
8. *Runovski K., Schmeisser H.* General module of smoothness and approximation by families of linear polynomial operators // New Perspectives on Approximation and Sampling Theory (Festband in honor of P. Butzer 85th birthday). — Vol. 22 of *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. — Switzerland: Switzerland, 2014. — P. 269–298