

С.Н. Аввакумов, Ю.Н. Киселёв

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДИФFUЗИИ ИНФОРМАЦИИ В СОЦИАЛЬНОЙ ГРУППЕ*

В статье изучаются две модели распространения (*диффузии*) информации в социальной группе. Динамика процесса описывается одномерным управляемым дифференциальным уравнением Риккати. Отличие изучаемых моделей от исходной модели [2] состоит в выборе оптимизируемого функционала. Рассмотрены два варианта выбора оптимизируемого функционала. Поставленные задачи оптимального управления решаются с привлечением принципа максимума Понтрягина [1]. Показано, что оптимальная программа управления является релейной функцией времени, имеющей не более одной точки переключения. Приведены легко проверяемые условия на параметры задачи, гарантирующие наличие точки переключения оптимального управления. Выполненный теоретический анализ задачи приводит к построению одномерной выпуклой задачи минимизации для нахождения точки переключения оптимального управления. В статье описан также альтернативный подход (без использования техники принципа максимума) для построения оптимального решения, основанный на специальном представлении оптимизируемого функционала и анализе множеств достижимости, которые не зависят от функционала. Для двух изучаемых в статье моделей, на основе построенных оптимальных законов управления в программной форме, предъявляются оптимальные законы управления в форме обратной связи.

1. Постановка задачи. Введение

1.1. Постановка задачи. Модель I

Рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = [ax + bu][1 - x], & x(0) = x_0 \in [0, 1), & 0 \leq t \leq T, \\ L \equiv \int_0^T [(1 - x) + ru] dt \rightarrow \min_{u(\cdot)}, & 0 \leq u \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

*Работа поддержана грантами

НШ-65590.2010.1, РФФИ 09-01-00378-а, РГНФ № 10-02-05640 г/И

где x — одномерная фазовая переменная, u — одномерное управление, подчинённое геометрическому ограничению $u \in [0, 1]$. Начальное состояние $x_0 \in [0, 1)$ фазовой переменной и положительные параметры a, b, r, T предполагаются заданными. Задачу (1) можно охарактеризовать как одномерную нелинейную задачу оптимального управления с функционалом интегрального типа на фиксированном отрезке времени при свободном правом конце траектории. Дифференциальное уравнение управляемого движения, содержащее функцию управления $u(t)$, является уравнением *Риккати* с положением равновесия $x = 1$. Любые допустимые траектории $x(t)$ управляемой системы при $x_0 \in (0, 1)$ обладают следующими свойствами

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = 0, \quad (2)$$

$$0 < x(t) < 1, \quad \dot{x}(t) > 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

функционал L всегда положителен: $L > 0$.

В силу предельных соотношений (2) ясно, что изучение задачи (1) не представляет содержательного интереса для «больших» значений параметра T (длительности горизонта планирования).

1.2. Содержательная трактовка модели

В оригинальной *модели распространения информации* [2] рассматривается социальная группа численности $N^* > 0$. Через $N(t)$ обозначается количество членов социальной группы («адептов»), получивших определённую информацию к моменту времени t . Начальное состояние $N(0) = N_0 \in [0, N^*)$ считается заданным. Примеры специальных групп: электорат политической партии, потенциальные покупатели в определённом сегменте рынка, население отдельного города, региона, страны, и т.д. Скорость $\dot{N}(t)$ изменения функции $N(t)$ испытывает влияние по двум каналам

- неуправляемый канал межличностного общения, роль которого характеризуется величиной $\alpha N(t)$, где $\alpha > 0$ — коэффициент межличностного общения
- управляемый канал, влияние которого характеризуется величиной $\beta u(t)$, где $\beta > 0$ — положительный параметр (коэффициент эффективности рекламы), $u(t)$ — управление, подчинённое ограничению $u(t) \in [0, 1]$; это влияние осуществляется рекламными

акциями через СМИ, Интернет, другими средствами, и требует определённых финансовых затрат.

Динамика переменной $N(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{N}(t) = [\alpha N(t) + \beta u(t)] [N^* - N(t)]$$

при начальном условии

$$N(0) = N_0 \in [0, N^*].$$

Переходя к безразмерной переменной $x(t) = N(t)/N^*$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{N}(t)/N^* = [\alpha N(t) + \beta u(t)] [N^* - N(t)]/N^* = \\ &= [\alpha N^* x(t) + \beta u(t)] [1 - x(t)]. \end{aligned}$$

Полагая здесь $a = \alpha N^*$, $b = \beta$, $x_0 = N_0/N^*$, приходим к дифференциальному уравнению задачи (1).

При выборе функционала L исходим из желания:

- минимизировать величину $[1 - x(t)]$ (долю членов социальной группы, не получивших информацию к моменту времени t),
- и при этом минимизировать суммарные затраты на рекламные акции, пропорциональные интегралу $\int_0^T u(t) dt$.

Интеграл от взвешенной суммы величины $[1 - x(t)]$ и мгновенной интенсивности затрат на рекламу приводит к построению функционала L в задаче (1). Горизонт планирования $[0, T]$ и весовой множитель $r > 0$ считаются заданными.

Модель (1) является модификацией модели распространения информации в социальной группе [2]. Основное отличие модели (1) от модели из работы [2] заключается в выборе критерия качества L , имеющего простую содержательную интерпретацию; кроме того, в модели (1) используется безразмерная переменная $x(t) = N(t)/N^* \in [0, 1]$ — доля членов социальной группы, получивших информацию к моменту времени t , N^* — численность социальной группы. Интегрант функционала L является взвешенной суммой доли $[1 - x(t)]$ членов социальной группы, не охваченных информацией, и ограниченного управления $u(t)$, влияющего на скорость $\dot{x}(t)$ изменения переменной $x(t)$ и характеризующего затраты на рекламу. Статья основана

на публикациях в тезисах, статьях [3]–[6] и новых исследованиях авторов. В [7] рассмотрена задача (1) с квадратичным функционалом

$$L = \int_0^T [(1-x)^2 + ru^2] dt.$$

Применяемый в данной статье термин «диффузия информации» избран по аналогии с термином «диффузия инноваций» [8], [9].

Построение функции $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, — оптимальной программы управления для задачи (1) — осуществляется на основе принципа максимума Понтрягина [1]. Показано, что оптимальное управление является релейной функцией времени, принимающей значения 0 и 1 и имеющей не более одной точки переключения, причём на финальном участке горизонта планирования оптимальное управление равно нулю. В силу выполненного ниже анализа нахождение оптимального закона управления сводится к вычислению точки переключения этого управления.

1.3. Постановка задачи. Модель II

Наряду с задачей (1) будет изучена следующая задача

$$\begin{cases} \dot{x} = [ax + bu](1-x), & x(0) = x_0 \in [0, 1), & 0 \leq t \leq T, \\ J_2 = \int_0^T ru dt + w(x(T)) \longrightarrow \max_{u(\cdot)}, & 0 \leq u \leq 1, \end{cases} \quad (4)$$

в которой $w(x)$ — гладкая убывающая функция. Задача Больца (4) в силу равенства

$$w(x(T)) = w(x(0)) + \int_0^T w'(x(t)) \dot{x}(t) dt$$

приводится к следующей равносильной задаче Лагранжа

$$\begin{cases} \dot{x} = [ax + bu](1-x), & x(0) = x_0 \in [0, 1), & 0 \leq t \leq T, \\ J = \int_0^T \{w'(x)[ax + bu](1-x) + ru\} dt \longrightarrow \max_{u(\cdot)}, & 0 \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Эту задачу будем изучать при следующем выборе терминальной функции $w(\cdot)$:

$$w(x) = 1 - x, \quad w'(x) = -1. \quad (6)$$

Задача (5) при условии (6) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = [ax + bu](1 - x), & x(0) = x_0 \in [0, 1), & 0 \leq t \leq T, \\ J = \int_0^T [-[ax + bu](1 - x) + ru] dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}, & 0 \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

В дальнейшем задачу (7) будем именовать «модель II». В задачах (1) и (7) динамика управляемого объекта описывается одним и тем же дифференциальным уравнением Риккати, имеющим положение равновесия $x = 1$. Модели I и II отличаются выбором оптимизируемого функционала.

1.4. Краткое описание структуры статьи

В разделе 2 содержится исследование модели I. В разделе 3 описано решение задачи оптимального управления для модели II. В разделе 4, на основе построенных в разделах 2 и 3 программных законов управления, предъявлены оптимальные законы управления в форме синтеза (обратной связи) для моделей I и II. Теоретические построения иллюстрируются численными экспериментами и графическими материалами.

Уместно привести выдержку из аннотации к статье [2]: «Модель, построенная при вполне разумных и интерпретируемых предположениях, позволяет не только изучить характер нарастания информационного воздействия со временем в зависимости от поведенческих характеристик объекта, но и дает возможность найти методами теории оптимального управления наиболее выгодные, в определенном смысле, режимы этого воздействия на некоторую социальную группу. Показано, что в силу нелинейности процесса, он допускает отнюдь не очевидные способы управления ресурсом».

Эти слова в полной мере можно отнести и к изучаемым в статье управляемым моделям. Удачный выбор оптимизируемых критериев качества в моделях I и II позволяет выполнить подробный теоретический анализ и провести расчёты конкретных примеров.

2. Исследование модели I

2.1. Краевая задача принципа максимума

Запишем функцию Гамильтона-Понтрягина для задачи (1), полагая $\psi_0 = -1$:

$$K(x, \psi, u) = -[(1-x) + ru] + \psi[ax + bu](1-x). \quad (8)$$

Функцию (8) можно представить в форме

$$K = (x-1) - ax(x-1)\psi + u \cdot \pi,$$

где множитель при управлении

$$\pi = \pi(x, \psi) = K'_u \equiv -r - b(x-1)\psi \quad (9)$$

— функция переключения. Из условия максимума $K \rightarrow \max_{u \in [0,1]}$ находим максимизатор функции K

$$u_*(x, \psi) = \operatorname{argmax}_{u \in [0,1]} K(x, \psi, u) = \begin{cases} 1, & \pi > 0, \\ 0, & \pi < 0, \end{cases}$$

или, в более компактной форме,

$$u_*(x, \psi) = h(\pi), \quad \pi \neq 0, \quad (10)$$

где $h(\cdot)$ — функция Хевисайда. В случае $\pi = 0$ любая точка отрезка $[0, 1]$ является максимизатором функции K ; случай $\pi = 0$ в данной задаче, как показано ниже, неактуален: особые режимы отсутствуют.

Сопряжённое уравнение $\dot{\psi} = -K'_x$ принимает вид

$$\dot{\psi} = -1 + [ax + bu]\psi + a(x-1)\psi. \quad (11)$$

Так как правый конец траектории свободен, то сопряжённая переменная $\psi(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности

$$\psi(T) = 0. \quad (12)$$

В силу (1), (9)–(12) краевая задача принципа максимума для задачи (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -[ax + bu](x-1), & x(0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -1 + [ax + bu]\psi + a(x-1)\psi, & \psi(T) = 0, \\ u = h(\pi), \quad \pi \equiv -r - b(x-1)\psi. \end{cases} \quad (13)$$

Пусть пара функций

$$(x(t), \psi(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (14)$$

образует решение краевой задачи (13). Полагаем

$$u(t) = h(\Pi(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

где

$$\Pi(t) = \pi(x(t), \psi(t)) \equiv -r - b [x(t) - 1] \psi(t) \quad (16)$$

— программная функция переключения. При этом построенный допустимый процесс $(x(t), u(t))$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума с участием сопряжённой переменной $\psi(t)$.

Ниже устанавливается существование и единственность решения (14) краевой задачи (13). Это вместе с фактом существования оптимального решения задачи (1) влечёт оптимальность построенного экстремального процесса $(x(t), u(t))$.

Для приближённого вычисления решения (14) краевой задачи (13) можно привлечь численные методы, см. Приложение 1 в [12].

Пример 1. Для набора параметров

$$a = 1, \quad b = 1, \quad r = 1, \quad T = 3, \quad x_0 = 0 \quad (17)$$

выполнено численное решение краевой задачи (13). Функция Хевисайда была взята в сглаженной форме с малым параметром сглаживания $\mu = 0.00001$, см. [12]. Результаты расчёта представлены на рис. 1: траектория $x(t)$ и сопряжённая переменная $\psi(t)$ имеют точку излома при $\tau = \tau_* \approx 0.49185$. Точка τ_* является *точкой переключения* оптимального управления $u(t)$, график которого также показан на рис. 1. Программная функция переключения $\Pi(t)$ имеет корень τ_* и является гладкой убывающей функцией времени.

В следующем подразделе краевая задача принципа максимума записывается в других переменных.

2.2. Анализ краевой задачи. Краевая задача в других переменных. Оптимальная программа управления, имеющая не более одной точки переключения

Умножив первое уравнение задачи (13) на ψ , второе уравнение — на $(x - 1)$, и выполнив почленное сложение этих соотношений,

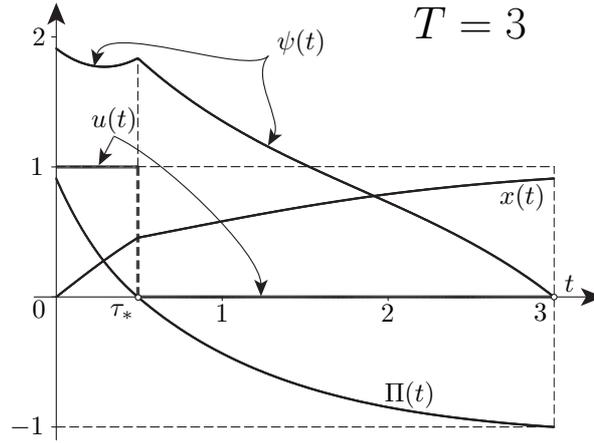


Рис. 1. Оптимальное управление $u(t)$ с точкой переключения τ_* , траектория $x(t)$, сопряжённая переменная $\psi(t)$ и программная функция переключения $\Pi(t)$

получаем:

$$\frac{d}{dt}[(x-1)\psi] = \dot{x}\psi + (x-1)\dot{\psi} = (x-1)[-1 + a(x-1)\psi].$$

Таким образом, функция

$$\xi = (x-1)\psi \quad (18)$$

является решением задачи Коши

$$\dot{\xi} = (1-x)[1 - a\xi], \quad \xi(T) = 0. \quad (19)$$

Функция переключения π в силу (9) связана с функцией (18) следующими простыми соотношениями

$$\pi = -r - b\xi, \quad \xi = -\frac{\pi + r}{b}, \quad (20)$$

причём

$$\pi|_{t=T} \equiv \Pi(T) = -r < 0. \quad (21)$$

Из (20), (19) находим:

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} &= -b\dot{\xi} = -b(1-x)[1 - a\xi] = \\ &= -b(1-x) \left[1 + a\frac{\pi + r}{b} \right] = \\ &= (1-x)[a(\pi + r) + b]. \end{aligned} \quad (22)$$

Введём в рассмотрение новую неизвестную функцию $m = m(t)$, полагая

$$m = a(\pi + r) + b. \quad (23)$$

Из (21) и (23) следует, что

$$m(T) = b > 0. \quad (24)$$

Из соотношений (22)–(24) следует, что функция $m(t)$ является решением задачи Коши

$$\dot{m}(t) = -[1 - x(t)]m(t), \quad m(T) = b > 0. \quad (25)$$

В силу (25) функцию $m(t)$ можно представить в форме

$$m(t) = m(T) e^{-\int_t^T [1-x(s)] ds},$$

или

$$m(t) = b e^{\int_t^T [1-x(s)] ds}. \quad (26)$$

Из (26) в силу (3) следует, что

$$m(t) \geq b > 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (27)$$

Из (25), (27) и неравенства $[1 - x(t)] > 0$ следует, что

$$\dot{m}(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (28)$$

Соотношения (22), (23), (28) влекут неравенство

$$\dot{\Pi}(t) \equiv \dot{\pi} < 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (29)$$

Таким образом, программная функция переключения $\Pi(t)$ является строго убывающей функцией времени и имеет не более одной перемены знака на отрезке времени $[0, T]$. Так как $\Pi(T) = -r < 0$, то $\Pi(t) > -r$ при $\forall t \in [0, T)$, причём возможны следующие две ситуации:

S1. $\Pi(0) > 0$, существует единственный корень $\tau \in (0, T)$ функции $\Pi(t)$, причём

$$\begin{aligned} \Pi(t) &> 0, & t \in [0, \tau), \\ \Pi(\tau) &= 0, \\ \Pi(t) &< 0, & t \in (\tau, T], \end{aligned}$$

и функция (15) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau] , \\ 0, & t \in (\tau, T]; \end{cases}$$

S2. $\Pi(0) \leq 0$, при этом $\Pi(t) < 0$, $t \in (0, T]$,

$$u(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

При поиске оптимального решения задачи (1) в силу (22) можно перейти от краевой задачи принципа максимума (13) к следующей краевой задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = [1 - x][ax + bh(\pi)], & x|_{t=0} = x_0, \\ \dot{\pi} = -[1 - x][a(\pi + r) + b], & \pi|_{t=T} = -r. \end{cases} \quad (30)$$

Краевая задача (30) имеет более простой вид по сравнению с краевой задачей (13): в задаче (30) разрывная функция Хевисайда входит лишь в первое уравнение, второе уравнение в (30) имеет более простой вид по сравнению со вторым уравнением задачи (13). Краевая задача (30) может решена численными методами; при этом оптимальная программа управления имеет вид (15), (16).

Пример 2. Для набора параметров (17) из примера 1 выполнено решение краевой задачи (30). Функция Хевисайда была взята в сглаженной форме. Результаты расчёта представлены на рис. 1: траектория $x(t)$ и программная функция переключения $\Pi(t) \equiv \pi(x(t), \psi(t))$; графики траектории $x(t)$ и сопряжённой переменной

$$\psi(t) = (\Pi(t) + r)/(b[1 - x(t)])$$

имеют излом в точке $\tau = \tau_* \approx 0.49185$ — точке переключения оптимального управления $u(t)$. Отметим, что время решения задачи (30) намного (почти на порядок) меньше времени решения задачи (13).

Пример 3. Для набора параметров

$$a = 1, \quad b = 1/5, \quad r = 1/10, \quad T = 5, \quad x_0 = 1/5$$

выполнено решение краевой задачи (30). Функция Хевисайда была взята в сглаженной форме. На рис. 2 представлены оптимальные управление $u(t)$ и траектория $x(t)$, сопряжённая переменная $\psi(t)$ и программная функция переключения $\Pi(t) \equiv \pi(x(t), \psi(t))$. Траектория $x(t)$ и сопряжённая переменная $\psi(t) = (\Pi(t) + r)/(b[1 - x(t)])$ имеют излом в точке $\tau = \tau_* \approx 1.343540$ — точке переключения оптимального управления $u(t)$. Отметим, что время решения задачи (30) также существенно меньше времени решения задачи (13).

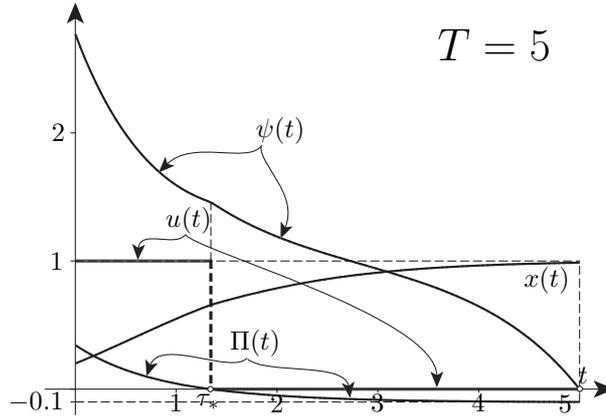


Рис. 2. Оптимальное управление $u(t)$ с точкой переключения τ_* , траектория $x(t)$, сопряжённая переменная $\psi(t)$ и программная функция переключения $\Pi(t)$

Пример 4. Для набора параметров

$$a = 1/4, \quad b = 1/4, \quad r = 4, \quad T = 3, \quad x_0 = 1/10$$

при численном решении краевой задачи (13) получен результат с отрицательной функцией переключения, чему соответствует равное нулю управление $u(t)$, см. ниже теорему 1, часть II.

2.3. Прямой поиск точки переключения оптимального управления

2.3.1. Одномерная выпуклая задача минимизации для определения точки переключения оптимального управления. Выполненный выше анализ краевой принципа максимума позволил определить структуру оптимального управления задачи (1). Показано, что оптимальное управление можно искать в форме

$$u(t, \tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau < t \leq T, \end{cases} \quad (31)$$

с точкой переключения $\tau \in [0, T)$. Случай $\tau = 0$ не исключается, при этом полагаем $u(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$. Для оптимального значения точки переключения будем использовать обозначение $\tau_* \in [0, T)$.

Далее будет показано, что точка переключения оптимального управления является решением одномерной задачи минимизации

$$\Phi(\tau) \rightarrow \min_{\tau \in [0, T)}, \quad (32)$$

где функция $\Phi(\tau)$ и её свойства описаны ниже, см. также рис. 4, 5.

2.3.2. Некоторые важные формулы.

Лемма 1. Управлению (31) отвечает траектория

$$x(t, \tau) = \begin{cases} x_+(t) & , \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ x_-(t, \tau), & \tau < t \leq T, \end{cases} \quad (33)$$

где функция $x_+(t)$ решает задачу Коши

$$\dot{x} = [ax + b][1 - x], \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

и определяется формулами

$$x_+(t) = -\frac{b}{a} + \frac{1 + b/a}{1 + \frac{1-x_0}{b/a+x_0}e^{-(a+b)t}} \quad (34)$$

и

$$x_+(t) = \frac{1 - \frac{b}{a} \frac{1-x_0}{b/a+x_0}e^{-(a+b)t}}{1 + \frac{1-x_0}{b/a+x_0}e^{-(a+b)t}}, \quad (35)$$

а функция $x_-(t, \tau)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = ax[1 - x], \quad x|_{t=\tau} = x_+(\tau), \quad \tau \leq t \leq T,$$

и имеет вид

$$x_-(t, \tau) = \frac{1}{1 + [1/x_+(\tau) - 1]e^{-a(t-\tau)}}. \quad (36)$$

Функции (34), (36) стремятся к единице при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Утверждения леммы 1 допускают непосредственную проверку, на которой мы останавливаться не будем. \square

Для любой допустимой траектории $x(t)$ выполняется двойное неравенство

$$x_-(t, 0) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \in [0, T],$$

что иллюстрирует рис. 3, на котором показаны границы вилки — графики функций $x_-(t, 0)$ и $x_+(t)$. Область, расположенная между этими линиями, закрашена серым цветом. В этой области располагаются графики любых допустимых траекторий $x(t)$. Отметим, что форма нижней границы вилки зависит от параметра a , тогда как

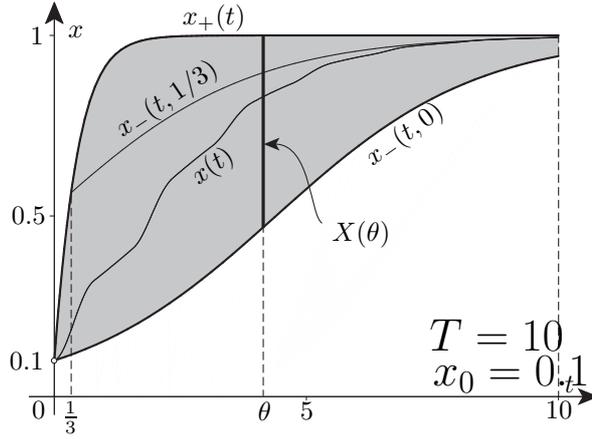


Рис. 3. Вилка для допустимых траекторий

форма верхней границы определяется двумя параметрами a и b . Отрезок $X(\theta) \equiv [x_-(\theta, 0), x_+(\theta)]$ представляет собой множество достижимости изучаемого управляемого объекта в момент времени θ . При построении рис. 3 использованы следующие значения параметров:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 2, \quad r = 2, \quad T = 10, \quad x_0 = \frac{1}{10}.$$

Зависящему от параметра $\tau \in [0, T]$ процессу (33), (31), то есть паре функций $(x(t, \tau), u(t, \tau))$, $0 \leq t \leq T$, отвечает следующее значение функционала L :

$$\Phi(\tau) \equiv \int_0^T [1 - x(t, \tau) + r u(t, \tau)] dt, \quad (37)$$

$$\Phi(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Функцию (37) можно записать в форме

$$\Phi(\tau) = T + r\tau - \int_0^\tau x_+(t) dt - \int_\tau^T x_-(t, \tau) dt. \quad (38)$$

Лемма 2. *Интегралы в правой части формулы (38) допускают следующие выражения:*

$$\int_0^\tau x_+(t) dt = -\frac{b}{a}\tau + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{(b/a + x_0)e^{(a+b)\tau} + (1 - x_0)}{1 + b/a} \right), \quad (39)$$

$$\int_\tau^T x_-(t, \tau) dt = \frac{1}{a} \ln \left(1 + x_+(\tau) \left[e^{a(T-\tau)} - 1 \right] \right). \quad (40)$$

Доказательство. Формулы (39) и (40) могут быть получены выполнением прямого интегрирования функций (34), (36). Соответствующие выкладки здесь опущены. Заметим, что правые части формул (39), (40) при $\tau = 0$ и $\tau = T$ соответственно обращаются в нуль. Производная правой части формулы (39) по аргументу τ равна $x_+(\tau)$. \square

Лемма 3. Точка переключения $\tau = \tau_* \in [0, T)$ оптимального управления (31) задачи (1) является решением одномерной задачи минимизации (32), в которой непрерывная на отрезке $[0, T]$ функция $\Phi(\tau)$ определяется соотношениями (37)–(40).

Замечание 1. Так как задача (32) одномерна, то приближённое нахождение её минимизатора τ_* можно выполнить, при заданных параметрах задачи, простым табулированием функции $\Phi(\tau)$ на мелкой сетке, введённой на отрезке $[0, T]$.

Далее будут подробно изучены свойства функции $\Phi(\tau)$, в частности, свойство выпуклости $\Phi(\tau)$, существование и единственность минимизатора $\tau_* \in [0, T)$. Для некоторых частных случаев выбора параметров a , b , x_0 найдено явное аналитическое выражение для τ_* . Указаны условия на параметры задачи (1), гарантирующие включение $\tau_* \in (0, T)$, то есть наличие активного рекламного участка $[0, \tau_*]$ в оптимальном законе управления задачи (1).

2.3.3. Исследование задачи $\Phi(\tau) \rightarrow \min$ при совпадающих параметрах a и b и нулевом начальном условии x_0 . Явная формула для точки переключения оптимального управления. В данном подразделе предполагается, что

$$a = b > 0, \quad x_0 = 0. \quad (41)$$

Теорема 1. При условии (41) функция $\Phi(\tau)$ положительна и выпукла на отрезке $[0, T]$. Задача (32) имеет единственный минимизатор

$$\tau_* \equiv \operatorname{argmin}_{\tau \in [0, T]} \Phi(\tau) \in [0, T).$$

I. При условии

$$\Phi'(0) < 0 \iff 1 + r < e^{aT}$$

точка $\tau_* \in (0, T)$ определяется следующим явным выражением

$$\tau_* = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{\xi_*} \right),$$

где

$$\xi_* = \frac{1+r}{2+r} e^{-aT} [1 + \sqrt{D}],$$

$$D = 1 + \frac{r(r+2)}{(r+1)^2} e^{2aT}.$$

II. При условии

$$\Phi'(0) \geq 0 \iff 1+r \geq e^{aT}$$

имеем:

$$\tau_* = 0.$$

Доказательство теоремы 1 излагается ниже.

Лемма 4. При условии (41) функция (38) принимает вид

$$\Phi(\tau) = T + r\tau - \ln \varphi(\tau), \quad (42)$$

где

$$\varphi(\tau) = \operatorname{ch}(a\tau) + \operatorname{sh}(a\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]. \quad (43)$$

Доказательство. Из (35), (41) получаем:

$$x_+(t) = \operatorname{th}(at). \quad (44)$$

Из (39), (41) следует, что

$$-\int_0^\tau x_+(t) dt = -\frac{1}{a} \ln \operatorname{ch}(a\tau). \quad (45)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} -\int_0^\tau x_+(t) dt &= \tau - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{e^{2a\tau} + 1}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{a} \ln \left(e^{-a\tau} \frac{e^{2a\tau} + 1}{2} \right) = -\frac{1}{a} \ln \operatorname{ch}(a\tau). \end{aligned}$$

Этот же результат сразу следует из (44). На основании (40) и (44) получаем:

$$-\int_{\tau}^T x_{-}(t, \tau) dt = -\frac{1}{a} \ln \left(1 + \operatorname{th}(a\tau) \left[e^{a(T-\tau)} - 1 \right] \right). \quad (46)$$

Наконец, используя (38), (45), (46), приходим к требуемым формулам (42), (43). \square

Из (42) следует

Лемма 5. *Первые две производные функции (42) имеют вид*

$$\Phi'(\tau) = r - \frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}, \quad (47)$$

$$\Phi''(\tau) = \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} \right)^2 - \frac{\varphi''(\tau)}{\varphi(\tau)} \right]. \quad (48)$$

Лемма 6. *Первые две производные функции (43) имеют вид*

$$\varphi'(\tau) = a e^{-a\tau} \left[e^{a(T-\tau)} - 1 \right], \quad (49)$$

$$\varphi''(\tau) = -a^2 e^{-a\tau} \left[2e^{a(T-\tau)} - 1 \right], \quad (50)$$

причём

$$\varphi'(\tau) > 0 \quad \text{при } t \in [0, T), \quad (51)$$

$$\varphi''(\tau) < 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (52)$$

$$\varphi'(0) = a \left[e^{aT} - 1 \right] > 0, \quad (53)$$

$$\varphi'(T) = 0. \quad (54)$$

Доказательство. Дифференцирование функции (43) приводит к формуле (49):

$$\begin{aligned} \varphi'(\tau) &= a \operatorname{sh}(a\tau) - a \operatorname{sh}(a\tau) e^{a(T-\tau)} + a \operatorname{ch}(a\tau) \left[e^{a(T-\tau)} - 1 \right] = \\ &= a \left[\operatorname{ch}(a\tau) - \operatorname{sh}(a\tau) \right] \cdot \left[e^{a(T-\tau)} - 1 \right] = a e^{-a\tau} \left[e^{a(T-\tau)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Из формулы (49) вытекают утверждения (51), (53), (54). Формула (50) следует из (49):

$$\begin{aligned} \varphi''(\tau) &= -a^2 e^{-a\tau} \left[e^{a(T-\tau)} - 1 \right] + a e^{-a\tau} (-a) e^{a(T-\tau)} = \\ &= -a^2 e^{a\tau} \left[2e^{a(T-\tau)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Неравенство (52) для $\varphi''(\tau)$ следует из (50). \square

Таким образом, функция $\varphi(\tau)$ при $\tau \in [0, T]$ является положительной, возрастающей и вогнутой в силу равенства $\varphi(0) = 1$ и неравенств (51), (52).

Лемма 7. *Справедливы неравенства*

$$\Phi(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0, T], \quad (55)$$

$$\Phi'(T) \equiv r > 0, \quad (56)$$

$$\Phi''(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (57)$$

Доказательство. Неравенство (55) для функции $\Phi(\tau)$ получаем из представления (37) этой функции, принимая во внимание неравенства

$$T > 0, \quad r > 0,$$

$$1 - x(t, \tau) > 0, \quad u(t, \tau) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Соотношение (56) вытекает из равенств (47), (54). Так как $\Phi'(T) > 0$, то минимизатор τ_* функции $\Phi(\tau)$ на отрезке $[0, T]$ удовлетворяет условию $\tau_* \in [0, T)$. Полагая $\tau = 0$ в (43), имеем

$$\varphi(0) = 1, \quad (58)$$

откуда в силу неравенства (51) следует, что

$$\varphi(\tau) \geq 1 \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (59)$$

Неравенство (57) для второй производной $\Phi''(\tau)$ является следствием формулы (48) и неравенств (52), (59). \square

Итак, функция $\Phi(\tau)$ положительна и выпукла на отрезке $[0, T]$. Производная $\Phi'(\tau)$ является строго возрастающей функцией аргумента $\tau \in [0, T]$ и $\Phi'(T) = r > 0$, $\Phi'(\tau) < r$ при $0 \leq \tau \leq T$. Поэтому производная $\Phi'(\tau)$ имеет не более одного корня на полуинтервале $[0, T)$. Для этой производной при $\tau = 0$ может реализоваться одна из следующих двух возможностей:

$$\Phi'(0) \geq 0 \quad (60)$$

или

$$\Phi'(0) < 0. \quad (61)$$

В случае (60) функция $\Phi(\tau)$ возрастает на отрезке $[0, T]$ и минимизатор τ_* задачи (32) равен нулю:

$$\tau_* = 0. \quad (62)$$

В случае (61) существует единственный корень $\tau_* \in (0, T)$ уравнения $\Phi'(\tau) = 0$; точка $\tau_* \in (0, T)$ является единственным минимизатором задачи (32).

Из (47), (49), (58) находим:

$$\Phi'(0) = r - [e^{aT} - 1].$$

Следовательно, условие (61) может быть выражено через параметры a , r , T :

$$\Phi'(0) < 0 \Leftrightarrow 1 + r < e^{aT}. \quad (63)$$

Таким образом, для полного доказательства теоремы 1 остаётся провести вычисление корня τ_* уравнения $\Phi'(\tau) = 0$ при условии (62). В силу (47) это уравнение принимает вид

$$r = \frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)},$$

или, с учётом формул (43) и (49),

$$r \cdot \left\{ \operatorname{ch}(a\tau) + \operatorname{sh}(a\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1] \right\} = e^{-a\tau} [e^{a(T-\tau)} - 1]. \quad (64)$$

Введём новую переменную ξ , полагая

$$\xi = e^{-a\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{\xi} \right). \quad (65)$$

Уравнение (64) после замены (65) сводится к квадратному уравнению (см. ниже Замечание 2) относительно ξ :

$$\xi^2 - 2 \frac{r+1}{r+2} e^{-aT} \xi - \frac{r}{r+2} = 0, \quad (66)$$

или

$$\left(\xi - \frac{r+1}{r+2} e^{-aT} \right)^2 = \frac{(r+1)^2}{(r+2)^2} e^{-2aT} + \frac{r}{r+2}.$$

Положительный корень ξ_* этого уравнения имеет вид:

$$\xi_* = \frac{r+1}{r+2} e^{-aT} + \sqrt{\frac{(r+1)^2}{(r+2)^2} e^{-2aT} + \frac{r}{r+2}},$$

или $\xi_* = \frac{r+1}{r+2} e^{-aT} [1 + \sqrt{D}]$, где $D = 1 + \frac{r(r+2)}{(r+1)^2} e^{2aT}$.

З а м е ч а н и е 2. Переход от уравнения (64) к (66) состоит из следующих шагов:

$$\begin{aligned} r \left\{ \operatorname{ch}(ar) - \operatorname{sh}(ar) + \operatorname{sh}(ar)e^{a(T-\tau)} \right\} &= e^{-aT} \left[e^{a(T-\tau)} - 1 \right], \\ r e^{-ar} + r \frac{1 - e^{-2ar}}{2} e^{aT} &= e^{aT} e^{-2a\tau} - e^{-a\tau}, \\ 2(r+1)e^{-a\tau} + r e^{aT} - r e^{aT} e^{-2a\tau} - 2 e^{aT} e^{-2a\tau} &= 0, \end{aligned}$$

откуда в силу (65)

$$\begin{aligned} (r+2)e^{aT}\xi^2 - 2(r+1)\xi - r e^{aT} &= 0, \\ (r+2)\xi^2 - 2(r+1)e^{-aT}\xi - r &= 0, \end{aligned}$$

что влечёт (66).

Оптимальная точка переключения при условии (63) найдена:

$$\tau_* = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{\xi_*} \right) \in (0, T). \quad (67)$$

Проверка последнего включения может быть выполнена следующими простыми рассуждениями. Обозначим левую часть уравнения (66) через $F(\xi)$ и вычислим её при $\xi = e^{-aT}$ и $\xi = 1$:

$$F(e^{-aT}) < 0, \quad F(1) > 0. \quad (68)$$

Поэтому для корня ξ_* выполняется двойное неравенство

$$e^{-aT} < \xi_* < 1,$$

которое влечёт $1 < 1/\xi_* < e^{aT}$, или $1 < e^{a\tau_*} < e^{aT}$, то есть $0 < \tau_* < T$, и включение (67) проверено. Проверим неравенства (68). Имеем:

$$\begin{aligned} F(e^{-aT}) &= e^{-2aT} - 2 \frac{r+1}{r+2} e^{-2aT} - \frac{r}{r+2} = \\ &= e^{-2aT} \left[1 - 2 \frac{r+1}{r+2} \right] - \frac{r}{r+2} = -\frac{r}{r+2} [e^{2aT} + 1] < 0, \\ F(1) &= 1 - 2 \frac{r+1}{r+2} e^{-aT} - \frac{r}{r+2} = \frac{2}{r+2} - 2 \frac{r+1}{r+2} e^{-aT} = \\ &= \frac{2}{r+2} (1 - (r+1)e^{-aT}) = \frac{2e^{-aT}}{r+2} [e^{aT} - (r+1)] > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство записано на основании (63). Итак, включение (67) при условии (63) верно. Теорема 1 доказана полностью.

Условие (63) для параметров задачи (1), (41) гарантирует наличие точки переключения оптимального управления. Это условие легко проверяется: при фиксированном $T > 0$ оно верно для достаточно малых значений параметра $r > 0$; при заданном параметре $r > 0$ оно верно для достаточно больших значений параметра $T > 0$.

Таким образом, задача (32) в частном случае (41) изучена полностью.

З а м е ч а н и е 3. В случае $a = b$, $x_0 \in (0, 1)$ точка переключения τ_* оптимального управления (при условии $\Phi'(0) < 0$) допускает вычисление по явной формуле, а именно: $\tau_* = 1/a \ln(1/\xi_*)$, при нахождении параметра ξ_* выражение для параметра D из теоремы 1 заменяется следующим

$$D = 1 + \frac{1 + x_0}{1 - x_0} \frac{r(r + 2)}{(r + 1)^2} e^{2aT}.$$

Формула (43) для функции $\varphi(\tau)$ в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & [\operatorname{ch}(a\tau) + x_0 \operatorname{sh}(a\tau)] + \\ & + [\operatorname{sh}(a\tau) + x_0 \operatorname{ch}(a\tau)] [e^{a(T-\tau)} - 1]. \end{aligned}$$

В следующем подразделе будет рассмотрен общий случай для параметров $a > 0$, $b > 0$, $x_0 \in [0, 1)$, $r > 0$, $T > 0$ задачи (1).

2.3.4. Исследование задачи $\Phi(\tau) \rightarrow \min$. Общий случай. В данном подразделе предполагается, что

$$a > 0, \quad b > 0, \quad x_0 \in [0, 1).$$

Теорема 2. *Функция $\Phi(\tau)$ положительна и выпукла на отрезке $[0, T]$. Задача (32) имеет единственный минимизатор*

$$\tau_* = \operatorname{argmin}_{\tau \in [0, T]} \Phi(\tau) \in [0, T),$$

определяющий точку переключения оптимального управления задачи (1).

I. При условии

$$\Phi'(0) < 0 \Leftrightarrow r < \frac{b}{a} \frac{(1-x_0)(e^{aT}-1)}{1+x_0(e^{aT}-1)} \Leftrightarrow \quad (69)$$

$$\Leftrightarrow e^{-aT} < \frac{1}{1-x_0} \left(\frac{b/a}{r+b/a} - x_0 \right) \quad (70)$$

точка τ_* принадлежит интервалу $(0, T)$ и может быть записана в виде

$$\tau_* = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{\xi_*} \right), \quad (71)$$

где $\xi_* \in (e^{-aT}, 1) \subset (0, 1)$ — единственный положительный корень уравнения

$$F(\xi) \equiv \xi^{1+\frac{b}{a}} - p\xi^{\frac{b}{a}} - q = 0 \quad (72)$$

с положительными коэффициентами

$$p = e^{-aT} \frac{a}{b} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \frac{r+b/a}{r+1+b/a}, \quad (73)$$

$$q = \frac{a}{b} \frac{b/a+x_0}{1-x_0} \frac{r}{r+1+b/a}. \quad (74)$$

II. При условии

$$\Phi'(0) \geq 0 \quad (75)$$

имеем:

$$\tau_* = 0. \quad (76)$$

Замечание 4. В исследованном ранее случае (41) уравнение (72) превращается в квадратное уравнение (66), положительный корень которого указан в теореме 1, а условие (69) на параметры задачи — в условие (63) более простого вида. Для приближённого вычисления корня ξ_* уравнение (72) можно записать в виде

$$f(\xi) \equiv \xi - p - q\xi^{-b/a} = 0,$$

где $f'(\xi) = 1 + q\frac{b}{a}\xi^{-b/a-1} > 0$, $f''(\xi) = -q\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}+1\right)\xi^{-b/a-2} < 0$, и применить метод Ньютона:

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad \xi_0 = p; \quad \xi_n \uparrow \xi_* \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Обоснование теоремы 2 разбивается на ряд утверждений, представленных в леммах 8–13.

Лемма 8. *Функция $\Phi(\tau)$ и её первая производная $\Phi'(\tau)$ могут быть записаны в форме*

$$\Phi(\tau) = T + r\tau - \int_0^\tau x_+(t) dt - \frac{1}{a} \ln \left\{ 1 + x_+(\tau) \left[e^{a(T-\tau)} - 1 \right] \right\}, \quad (77)$$

$$\Phi'(\tau) = r - \frac{b}{a} h(\tau), \quad (78)$$

где

$$h(\tau) = \frac{[1 - x_+(\tau)] [e^{a(T-\tau)} - 1]}{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]}, \quad (79)$$

причём справедливы соотношения

$$h(T) = 0, \quad (80)$$

$$h(\tau) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \tau < T, \quad (81)$$

$$\Phi'(T) = r > 0, \quad (82)$$

$$\Phi'(0) = r - \frac{b(1 - x_0)(e^{aT} - 1)}{a(1 + x_0)(e^{aT} - 1)}. \quad (83)$$

Доказательство. Формула (77) записана на основе (38) и (40). Дифференцирование (77) по аргументу τ даёт:

$$\Phi'(\tau) = r - x_+(\tau) - \frac{1}{a} \frac{\dot{x}_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1] - ax_+(\tau)e^{a(T-\tau)}}{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]}.$$

Записывая числитель последней дроби в виде

$$[\dot{x}_+(\tau) - ax_+(\tau)] [e^{a(T-\tau)} - 1] - ax_+(\tau),$$

из (78) получаем:

$$\Phi'(\tau) = r - \frac{[e^{a(T-\tau)} - 1] [\dot{x}_+(\tau) + ax_+^2(\tau) - ax_+(\tau)]}{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]}. \quad (84)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \dot{x}_+(\tau) + ax_+^2(\tau) - ax_+(\tau) = \\ & = [ax_+(\tau) + b] [1 - x_+(\tau)] - ax_+(\tau) [1 - x_+(\tau)] = \\ & = b [1 - x_+(\tau)], \end{aligned}$$

то из (84) очевидным образом получаем (78), (79). Соотношения (80)–(83) проверяются без труда. \square

Лемма 9. *Вторая производная*

$$\Phi''(\tau) = -\frac{b}{a} h'(\tau) \quad (85)$$

удовлетворяет неравенству

$$\Phi''(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (86)$$

Доказательство. Формула (85) вытекает из равенства (78). Действительно, дифференцируя (79), имеем

$$h'(\tau) = \frac{-\dot{x}_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1] - a[1 - x_+(\tau)] e^{a(T-\tau)}}{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]} - \frac{[1 - x_+(\tau)] [e^{a(T-\tau)} - 1] \{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]\}'_{\tau}}{\{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]\}^2},$$

откуда, полагая $\tau = T$, находим

$$h'(T) = -a[1 - x_+(T)],$$

что, в силу (85), влечёт

$$\Phi''(T) = b[1 - x_+(T)] > 0.$$

Поэтому для доказательства неравенства (86) остаётся показать, в силу (85), что

$$h'(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Логарифмическое дифференцирование функции (79) даёт:

$$\begin{aligned} \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} &= -\frac{\dot{x}_+(\tau)}{1 - x_+(\tau)} - \\ &- \frac{\dot{x}_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1] - ax_+(\tau)e^{a(T-\tau)}}{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]} - \\ &- \frac{ae^{a(T-\tau)}}{e^{a(T-\tau)} - 1}. \end{aligned} \quad (87)$$

Формулу (87) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} = & - [ax_+(\tau) + b] - \\ & - \frac{[\dot{x}_+(\tau) - ax_+(\tau)] [e^{a(T-\tau)} - 1] - ax_+(\tau)}{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]} - \\ & - \frac{ae^{a(T-\tau)}}{e^{a(T-\tau)} - 1}. \end{aligned} \quad (88)$$

Так как последнее слагаемое

$$-\frac{ae^{a(T-\tau)}}{e^{a(T-\tau)} - 1} < 0 \quad \forall \tau \in [0, T),$$

то из (88) отбрасыванием последнего члена получаем неравенство

$$\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} < G(\tau), \quad (89)$$

правая часть которого

$$G(\tau) = -[ax_+(\tau) + b] - \frac{[\dot{x}_+(\tau) - ax_+(\tau)] [e^{a(T-\tau)} - 1] - ax_+(\tau)}{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]}$$

может быть записана в форме

$$G(\tau) = -\frac{g(\tau)}{1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1]} \quad (90)$$

с числителем

$$\begin{aligned} g(\tau) = & [ax_+(\tau) + b] \left\{ 1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1] \right\} + \\ & + [\dot{x}_+(\tau) - ax_+(\tau)] [e^{a(T-\tau)} - 1] - ax_+(\tau). \end{aligned} \quad (91)$$

Преобразуем функцию (91):

$$\begin{aligned} g(\tau) = & ax_+(\tau) + b + [ax_+(\tau) + b] x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)} - 1] - \\ & - ax_+(\tau) + [\dot{x}_+(\tau) - ax_+(\tau)] [e^{a(T-\tau)} - 1] = \\ = & b + [e^{a(T-\tau)} - 1] [\dot{x}_+(\tau) - ax_+(\tau) + ax_+^2(\tau) + bx_+(\tau)]. \end{aligned} \quad (92)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_+(\tau) - ax_+(\tau) + ax_+^2(\tau) + bx_+(\tau) &= \\ = [ax_+(\tau) + b][1 - x_+(\tau)] - ax_+(\tau)[1 - x_+(\tau)] + bx_+(\tau) &= \\ = b[1 - x_+(\tau)] + bx_+(\tau) = b > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вместе с (92) влечёт неравенство

$$g(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0, T],$$

из которого, в силу (90), получаем:

$$G(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (93)$$

Неравенства (89) и (93) дают:

$$\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} < 0 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Здесь $\tau = T$ исключено в силу (80). Из неравенства (89), принимая во внимание (81), получаем:

$$h'(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (94)$$

Очевидно, наконец, что равенство (85) и неравенство (94) приводят к неравенству (86) при $0 \leq \tau < T$. Его справедливость при $\tau = T$ проверена выше. \square

Лемма 10. *Условие (69) на параметры задачи (1) равносильно условию (70).*

Доказательство. При обосновании леммы 10 следует иметь в виду неравенства

$$1 - x_0 > 0, \quad e^{aT} - 1 > 0.$$

Равносильность двух условий в строке (69) следует из формулы (83). Запишем цепочку неравенств, равносильных неравенству (69):

$$\begin{aligned} r + rx_0(e^{aT} - 1) &< \frac{b}{a}(1 - x_0)(e^{aT} - 1), \\ r &< (e^{aT} - 1) \left(\frac{b}{a} - \frac{b}{a}x_0 - rx_0 \right), \\ \frac{1}{e^{aT} - 1} &< \frac{b/a - (r + b/a)x_0}{r}. \end{aligned} \quad (95)$$

Так как $1/(e^{aT} - 1) = -1 + 1/(1 - e^{-aT})$, то из (95) получаем

$$\frac{1}{1 - e^{-aT}} < \frac{(r + b/a)(1 - x_0)}{r},$$

или

$$1 - e^{-aT} > \frac{r}{(1 - x_0)(r + b/a)},$$

откуда

$$e^{-aT} < 1 - \frac{r}{(1 - x_0)(r + b/a)},$$

и, наконец, выполнив простые преобразования правой части последнего неравенства, приходим к (70):

$$e^{-aT} < \frac{1}{1 - x_0} \left(\frac{b/a}{r + b/a} - x_0 \right).$$

Установленная равносильность условий (69) и (70) доказывает лемму 10. \square

Итак, непрерывная и выпуклая (лемма 9) на отрезке $[0, T]$ функция $\Phi(\tau)$ достигает своего минимального значения в точке τ_* , причём $\tau_* \neq T$ в силу неравенства (82).

При выполнении условия (75) в силу (86) имеем

$$\Phi(\tau) - \Phi(0) = \Phi'(0)\tau + \frac{1}{2}\Phi''(\theta)\tau^2 > 0 \quad \forall \tau \in (0, T],$$

где $\theta \in [0, \tau]$; следовательно, $\tau_* = 0$, и часть II теоремы 2 доказана. Поэтому сосредоточим внимание на части I теоремы 2.

Лемма 11. При условии (69) уравнение $\Phi'(\tau) = 0$ имеет единственный корень τ_* на отрезке $[0, T]$, причём

$$\tau_* = \operatorname{argmin}_{\tau \in [0, T]} \Phi(\tau) \in (0, T).$$

Доказательство. Утверждение леммы 11 является следствием условий

$$\Phi'(0) < 0, \quad \Phi'(T) > 0, \quad \Phi''(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Таким образом, лемма 11 доказана. \square

Лемма 12. Уравнение

$$\Phi'(\tau) = 0 \quad (96)$$

при введении новой переменной

$$\xi = e^{-a\tau} > 0 \quad (97)$$

принимает вид (72)–(80).

Доказательство. Уравнение (96) в силу (78), (79) принимает вид

$$1 + x_+(\tau) [e^{a(T-\tau)-1}] = \frac{b}{ar} [1 - x_+(\tau)] [e^{a(T-\tau)-1}],$$

или

$$1 = [e^{a(T-\tau)} - 1] \left[\frac{b}{ar} - \left(\frac{b}{ar} + 1 \right) x_+(\tau) \right]. \quad (98)$$

Введём обозначения:

$$A = \frac{1 - x_0}{b/a + x_0}, \quad B = \frac{b}{ar} (r + 1 + b/a) A. \quad (99)$$

Параметры (99) связаны с параметрами (73), (74) соотношениями

$$e^{-aT} \left(1 + \frac{A}{B} \right) = p, \quad \frac{1}{B} = q. \quad (100)$$

Ниже будет доказано, что

$$\frac{b}{ar} - \left(\frac{b}{ar} + 1 \right) x_+(\tau) = \frac{-1 + B\xi^{1+\frac{b}{a}}}{1 + A\xi^{1+\frac{b}{a}}}. \quad (101)$$

В силу (101) и (96) уравнение (98) можно записать в форме

$$1 + A\xi^{1+\frac{b}{a}} = [e^{aT}\xi - 1] [-1 + B\xi^{1+\frac{b}{a}}],$$

или

$$1 + A\xi^{1+\frac{b}{a}} = -e^{aT}\xi + 1 + Be^{aT}\xi^{2+\frac{b}{a}} - B\xi^{1+\frac{b}{a}}.$$

Устранение единиц и почленное деление на ξ позволяет привести последнее уравнение к виду

$$A\xi^{\frac{b}{a}} = -e^{aT} + Be^{aT}\xi^{1+\frac{b}{a}} - B\xi^{\frac{b}{a}},$$

или

$$Be^{aT}\xi^{1+\frac{b}{a}} - (A+B)\xi^{\frac{b}{a}} - e^{aT} = 0,$$

или

$$\xi^{1+\frac{b}{a}} - e^{-aT} \left(\frac{A}{B} + 1 \right) \xi^{\frac{b}{a}} - \frac{1}{B} = 0. \quad (102)$$

Уравнение (102) в силу (100) совпадает с уравнением (72).

Для завершения доказательства леммы 12 остаётся обосновать равенство (101). Используя (34), (97), (99), имеем:

$$x_+(\tau) = -\frac{b}{a} + \frac{1+b/a}{1+A\xi^{1+\frac{b}{a}}}.$$

Отсюда для левой части равенства (101) получаем

$$\begin{aligned} \frac{b}{ar} - \left(\frac{b}{ar} + 1 \right) x_+(\tau) &= \frac{b}{ar} - \left(\frac{b}{ar} + 1 \right) \left(-\frac{b}{a} + \frac{1+b/a}{1+A\xi^{1+\frac{b}{a}}} \right) = \\ &= \frac{b}{ar} - \left(\frac{b}{ar} + 1 \right) \frac{b}{a} - \frac{\left(\frac{b}{ar} + 1 \right) (1+b/a)}{1+A\xi^{1+\frac{b}{a}}} = \frac{-1+B\xi^{1+\frac{b}{a}}}{1+A\xi^{1+\frac{b}{a}}}, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{b}{ar} + \left(\frac{b}{ar} + 1 \right) \frac{b}{ar} - \left(\frac{b}{ar} + 1 \right) \left(1 + \frac{b}{a} \right) &= \\ = \frac{b}{ar} + \frac{b}{ar} \frac{b}{a} + \frac{b}{a} - \frac{b}{ar} - 1 - \frac{b}{ar} \frac{b}{a} - \frac{b}{a} &= -1, \end{aligned}$$

и

$$\left[\frac{b}{ar} + \left(\frac{b}{ar} + 1 \right) \right] A = \frac{b}{a} \frac{1+r+b/a}{r} A \stackrel{(99)}{=} B.$$

Равенство (101) проверено. Лемма 12 доказана. \square

Лемма 13. Уравнение (72) с положительными коэффициентами (73), (74) имеет единственный положительный корень ξ_* , удовлетворяющий неравенству

$$e^{-aT} < \xi_*. \quad (103)$$

При условии (69) корень ξ_* допускает оценку сверху

$$\xi_* < 1. \quad (104)$$

Таким образом, при условии (69) верно двойное неравенство

$$e^{-aT} < \xi_* < 1,$$

которое равносильно неравенству

$$0 < \tau_* < T$$

для корня τ_* уравнения $\Phi'(\tau) = 0$.

Доказательство. Уравнение (72) на отрезке $[0, p]$ корней не имеет, так как

$$F(\xi) = \xi^{\frac{b}{a}}(\xi - p) - q \leq -q < 0 \quad \forall \xi \in [0, p].$$

Функция $F(\xi)$ возрастает при $\xi \geq p$, так как

$$F'(\xi) = \frac{b}{a} \xi^{\frac{b}{a}-1}(\xi - p) + \xi^{\frac{b}{a}} > 0 \quad \forall \xi \geq p.$$

Поэтому в силу соотношений

$$F(p) = -q < 0, \quad F(+\infty) = +\infty$$

уравнение (72) имеет единственный положительный корень ξ_* , удовлетворяющий неравенству

$$p < \xi_*. \tag{105}$$

Проверим, что

$$e^{-aT} < p. \tag{106}$$

Действительно, в силу (73)

$$\begin{aligned} p - e^{-aT} &= e^{-aT} \left[\left(\frac{a}{b} + 1 \right) \frac{r + b/a}{r + 1 + b/a} - 1 \right] = \\ &= e^{-aT} \frac{a}{b} \frac{r}{r + 1 + b/a} > 0. \end{aligned}$$

Неравенство (106) и (105) влекут (103).

Для доказательства неравенства (104) при условии (69) проверим, что

$$F(1) = 1 - p - q > 0. \tag{107}$$

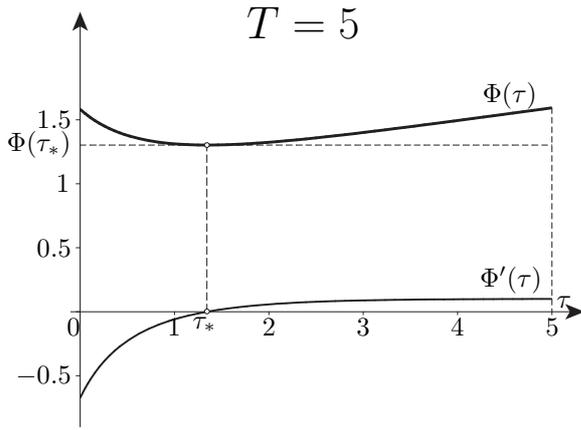


Рис. 4. Одномерная задача минимизации (32):
графики функций $\Phi(\tau)$ и $\Phi'(\tau)$,
 $\tau_* \in (0, T)$

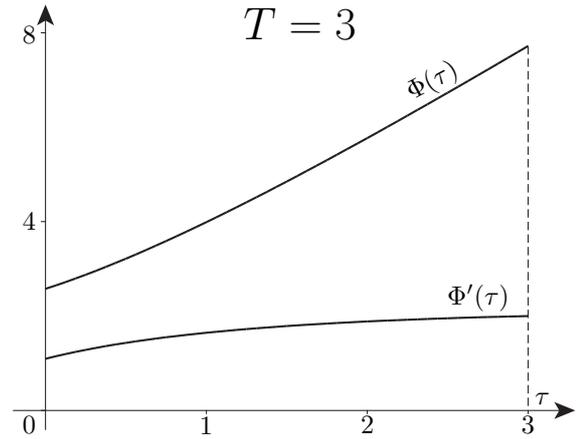


Рис. 5. Одномерная задача минимизации (32):
графики функций $\Phi(\tau)$ и $\Phi'(\tau)$,
 $\tau_* = 0$

Неравенство (107) равносильно неравенству

$$p + q < 1. \quad (108)$$

Используя (73), (74), (70), получаем

$$\begin{aligned} p + q &< \frac{1}{1 - x_0} \left(\frac{b/a}{r + b/a} - x_0 \right) \frac{a}{b} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \frac{r + b/a}{r + 1 + b/a} + \\ &+ \frac{a}{b} \frac{b/a + x_0}{1 - x_0} \frac{r}{r + 1 + b/a} = \\ &= \frac{a}{b} \frac{1}{(1 - x_0)(r + 1 + b/a)} \times \\ &\times \left\{ \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left[\frac{b}{a} - x_0 \left(r + \frac{b}{a} \right) \right] + r \left(\frac{b}{a} + x_0 \right) \right\} = \\ &= \frac{a}{b} \frac{1}{(1 - x_0)(r + 1 + b/a)} \cdot (1 - x_0) \frac{b}{a} (r + 1 + b/a) = 1. \end{aligned}$$

Неравенство (108) проверено. Установленное неравенство (107) влечёт (104). Остальные утверждения леммы 13 проверяются без труда. Лемма 13 доказана. \square

Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

В заключение подраздела 2.3.4, приведём примеры, иллюстрирующие свойства функции (37). На рис. 4 показан график функции $\Phi(\tau)$ при $\Phi'(0) < 0$, когда $\tau_* \in (0, T)$; рис. 4 выполнен в случае параметров

$$a = 1, \quad b = 1/5, \quad r = 1/10, \quad T = 5, \quad x_0 = 1/5.$$

На рис. 5 показан график функции $\Phi(\tau)$ в случае $\Phi'(0) > 0$, когда $\tau_* = 0$; рис. 5 выполнен при наборе параметров

$$a = 1/4, \quad b = 1/4, \quad r = 4, \quad T = 3, \quad x_0 = 1/10.$$

Заметим, что построенное оптимальное решение (траектория, оптимальное значение функционала и точка переключения оптимального управления) мало изменяются при малых вариациях параметров задачи (1).

З а м е ч а н и е 5. Для построения оптимального решения задачи (1) можно использовать «альтернативный подход» (без применения необходимых условий оптимальности), см. [10]. Такой способ рассуждений сразу приводит к построению *оптимального* решения и излагается в подразделе 2.3.5.

2.3.5. Альтернативный подход к решению задачи оптимального управления (1).

Изложим сейчас *альтернативный подход* (без использования условий оптимальности) для построения решения одномерной нелинейной задачи оптимального управления (1) на основе специального представления функционала L (с исключённым управлением) и анализа множеств достижимости, которые не зависят от функционала. Множество достижимости

$$X(t) = [x_-(t), x_+(t)], \quad x_{\pm}(0) = x_0,$$

объекта (1) в момент времени $t \in [0, T]$ есть отрезок с концами $x_-(t)$, $x_+(t)$, которые определяются задачей Коши

$$\dot{x} = [ax + bu(t)](1 - x), \quad x(0) = x_0, \quad \text{при } u(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 1$$

соответственно, причём

$$\begin{cases} x_-(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)e^{-at}}, \\ x_+(t) = -\frac{b}{a} + \left(1 + \frac{b}{a}\right) / \left(1 + \frac{1 - x_0}{b/a + x_0} e^{-(a+b)t}\right). \end{cases} \quad (109)$$

При условии $x(T) = x_1 \in X(T)$ допустимые траектории $x(t)$ удовлетворяют двойному неравенству

$$y_-(t) \leq x(t) \leq y_+(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad y_{\pm}(T) = x_1.$$

Функции $y_+(t)$ и $y_-(t)$ допускают аналитическое описание, аналогичное (109). Множество

$$Y(t) = [y_-(t), y_+(t)]$$

— множество достижимости (в обратном времени) в момент времени $t \in [0, T]$. Для допустимых траекторий $x(t)$, удовлетворяющих одновременно двум условиям $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1 \in X(T)$, имеет место включение

$$x(t) \in Z(t), t \in [0, T], \quad \text{где} \quad Z(t) \equiv X(t) \cap Y(t) \neq \emptyset.$$

При этом график траектории $x(t)$ расположен в области

$$\{0 \leq t \leq T, z_-(t) \leq x \leq z_+(t)\};$$

на рис. 6 соответствующая область заштрихована. Верхняя часть границы этой области описывается уравнением

$$x = z_+(t, \tau) \equiv \begin{cases} x_+(t), & t \in [0, \tau], \\ x_-(t, \tau), & t \in (\tau, T], \end{cases} \quad (110)$$

при некотором $\tau \in [0, T]$;

$$x_-(t, \tau) \equiv \frac{x_+(\tau)}{x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)] e^{-a(t-\tau)}}. \quad (111)$$

Параметр τ определяется значением $x_1 = x(T) \equiv x_-(T, \tau)$ однозначно. При изменении точки переключения $\tau \in [0, T]$ правый конец траектории x_1 пробегает множество достижимости $X(T)$. Нижняя часть границы заштрихованного множества (рис. 6) определяется уравнением

$$x = z_-(t, \theta), \quad 0 \leq t \leq T, \quad z_-(0, \theta) = x_0, \quad z_-(T, \theta) = x_1,$$

где функция $z_-(t, \theta)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = [ax + bh(t - \theta)](1 - x), \quad x|_{t=0} = x_0,$$

причём параметр θ определяется значением x_1 однозначно.

Рис. 6 выполнен при

$$a = b = 1, \quad T = 3, \quad x_0 = 1/10, \quad \tau = 3/10;$$

для этого набора параметров $x_1 \approx 0.901273$, $\theta \approx 2.009887$.

2.3.6. Исследование характера зависимости точек переключения оптимального управления от параметров задачи. Задача (1) содержит положительные параметры a, b, r, T и параметр $x_0 \in [0, 1)$. Выше проведён полный анализ оптимального решения задачи (1) и точки переключения оптимального управления. Дополним этот анализ проведением ряда расчётов для получения наглядного представления о характере зависимости точки переключения оптимального управления от параметров задачи. Схема дальнейших рассуждений состоит в следующем:

- выбирается некоторый «базовый» набор параметров; положим для определённости

$$a = b = r = T = 1, \quad x_0 = 0 \quad (114)$$

- изучается зависимость точки переключения оптимального управления от каждого из параметров задачи при неизменных значениях остальных параметров.

Для этого изучается поведение величины τ_* , указанной в теореме 2, формулы (71)–(74). Фактически точка переключения оптимального управления существует при $\tau_* \in (0, T)$, или при $\tau_* > 0$, так как τ_* всегда меньше T . Если $\tau_* \leq 0$, то оптимальное управление не имеет точек переключения.

Для набора параметров (114) на основании формулы теоремы 1 имеем $\tau_* \approx 0.14$, то есть рекламную акцию целесообразно проводить в самом начале горизонта планирования и её длительность занимает примерно седьмую часть длительности этого горизонта.

Итак, величина τ_* вычисляется на основе формул (71)–(74), а в частных случаях $a = b, x_0 = 0$ и $a = b, x_0 \in (0, 1)$ можно пользоваться формулами из теоремы 1 и Замечания 3 соответственно.

2.3.6.1. Вариация параметра x_0 . Полагаем

$$f_{x_0}(x_0) = \tau_*|_{a=b=r=T=1}. \quad (115)$$

График функции (115) показан на рис. 7. Эта функция является монотонно убывающей,

$$\lim_{x_0 \rightarrow 1-0} f_{x_0}(x_0) = -\infty, \quad (116)$$

существует единственный корень

$$\bar{x}_0 = \frac{e - 2}{2(e - 1)} \approx 0.21, \quad f_{x_0}(0) = \frac{\ln(3e)}{\ln(2 + \sqrt{4 + 3e^2})} \approx 0.14.$$

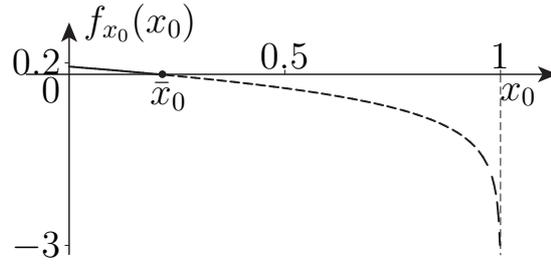


Рис. 7. График функции $f_{x_0}(x_0)$, см. (115)

Часть графика этой функции в области её отрицательных значений отмечена штриховой линией. Если $x_0 \in [\bar{x}_0, 1)$, то активная рекламная акция в оптимальной программе отсутствует, а само оптимальное управление равно нулю. При достаточно малых начальных значениях x_0 , $x_0 \in [0, \bar{x}_0)$, оптимальная программа содержит активный участок длительности $f_{x_0}(x_0)$, расположенный в начале горизонта планирования. Напомним, что качественный вывод относится к изучаемому базовому набору параметров (114), см. (115). При построении графика функции (115) можно использовать общую схему (71)–(74) или явные формулы из Замечания 3:

$$\tau_* = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{\xi_*} \right), \quad \xi_* = \frac{1+r}{2+r} e^{-aT} [1 + \sqrt{D}],$$

$$D = 1 + \frac{1+x_0}{1-x_0} \frac{r(r+2)}{(r+1)^2} e^{2aT}.$$

В силу предельного равенства (116) ясно, что в оптимальной программе для значений x_0 , близких к единице, активный рекламный участок отсутствует.

2.3.6.2. Вариация параметра T . Полагаем

$$f_T(T) = \tau_*|_{a=b=r=1, x_0=0}. \quad (117)$$

График функции (117) показан на рис. 8. Эта функция является возрастающей, имеет единственный корень $\bar{T} = \ln 2 \approx 0.70$, отрицательна при $T \in [0, \bar{T})$, положительна при $T > \bar{T}$, имеет положительный предел при $T \rightarrow +\infty$: $\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(T) = \ln \sqrt{3} \approx 0.55$.

Так как сейчас $a = b$, $x_0 = 0$, то при вычислении функции (117) можно пользоваться формулами из Теоремы 1:

$$\tau_* = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{\xi_*} \right), \quad \xi_* = \frac{1+r}{2+r} e^{-aT} [1 + \sqrt{D}], \quad D = 1 + \frac{r(r+2)}{(r+1)^2} e^{2aT}. \quad (118)$$

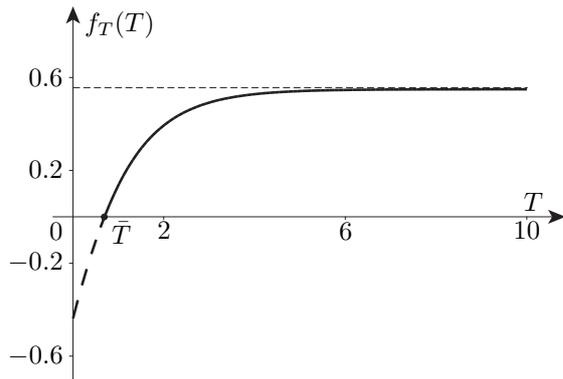


Рис. 8. График функции $f_T(T)$, см. (117)

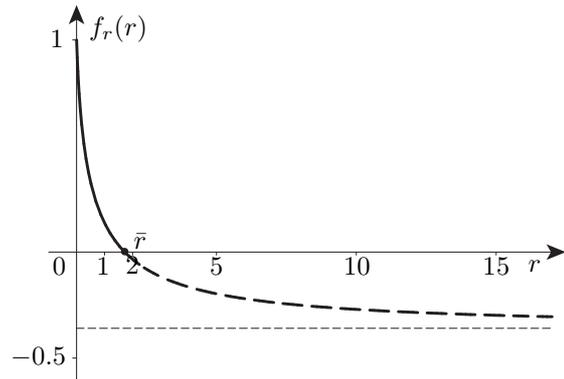


Рис. 9. График функции $f_r(r)$, см. (119)

Предел $\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(T)$ найден на основе формул (118). Часть графика функции (117), лежащая ниже оси Ot , показана штриховой линией. Таким образом, при коротких горизонтах планирования ($T \leq \bar{T}$) оптимальная программа не содержит активного рекламного участка (точка переключения оптимального управления отсутствует); при $T > \bar{T}$ активный участок появляется, его длительность возрастает с ростом T , но остаётся ограниченной и стабилизируется.

2.3.6.3. Вариация параметра r . Полагаем

$$f_r(r) = \tau_* |_{a=b=T=1, x_0=0}. \quad (119)$$

График функции (119) показан на рис. 9. Эта функция является убывающей функцией весового множителя $r > 0$, имеет единственный корень $\bar{r} = 1/e \approx 1.79$, положительна при $0 < r < \bar{r}$, $f_r(0) = 1$, отрицательна при $r > \bar{r}$ (соответствующая часть графика показана на рис. 9 штриховой линией),

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} f_r(r) = \ln \left(\sqrt{1 + e^2} - 1 \right) - 1 \approx -0.36.$$

Качественный вывод: при достаточно больших значениях r ($r \geq \bar{r}$) оптимальная программа не имеет точек переключения, другими словами, при «высоких ценах» на рекламу активный рекламный участок в оптимальной программе отсутствует. При умеренных значениях $r \in (0, \bar{r})$ активный участок в оптимальной программе имеется и его длительность определяется выражением (119). Таким образом, сказанное выше в подразделе 2.3.6.3 свидетельствует о важной роли параметра r при решении задачи (1).

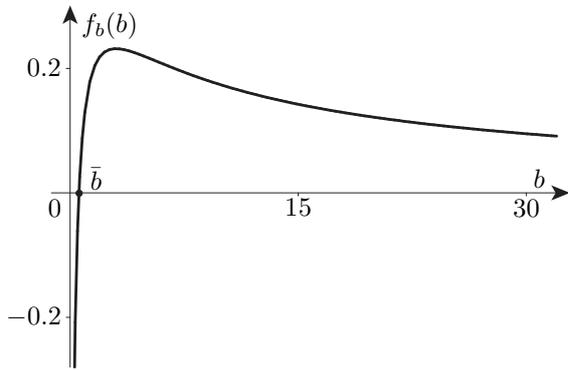


Рис. 10. График функции $f_b(b)$, см. (120)

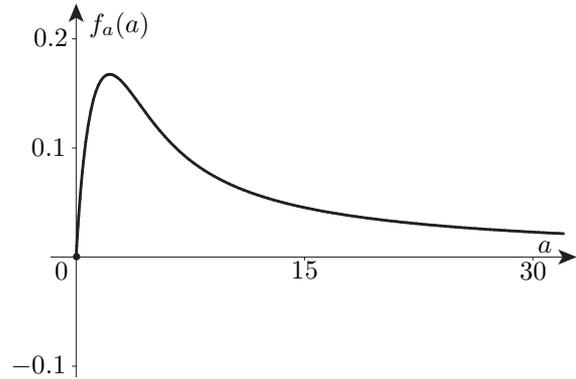


Рис. 11. График функции $f_a(a)$, см. (121)

2.3.6.4. Вариация параметра b . Полагаем

$$f_b(b) = \tau_*|_{a=r=T=1, x_0=0}. \quad (120)$$

Параметр b можно назвать коэффициентом эффективности рекламных акций. График функции (120) показан на рис. 10. Эта функция является возрастающей, при достаточно малых b имеет положительный корень $\bar{b} \approx 0.58$, отрицательна при $b \in (0, \bar{b})$, положительна при $b > \bar{b}$.

2.3.6.5. Вариация параметра a . Полагаем

$$f_a(a) = \tau_*|_{b=r=T=1, x_0=0}. \quad (121)$$

Напомним, что параметр a в модели (1) был назван «коэффициентом межличностного общения». График функции (121) показан на рис. 11.

3. Исследование модели II

3.1. Краткое описание полученных результатов

В данном разделе построена краевая задача принципа максимума в исходной и модифицированной формах. Установлен качественный характер оптимальной программной функции управления, которая имеет не более одной точки переключения. В задаче (7), в отличие от задачи (1), возможно оптимальное управление вида $u(t) \equiv 1$ (для некоторых наборов параметров задачи). Оптимальное решение задачи (7) можно найти с помощью модифицированной краевой задачи

принципа максимума. При известной точке переключения решение краевой задачи допускает описание в аналитической форме. Для нахождения точки переключения $\tau = \tau_*$ получено скалярное уравнение

$$\frac{b}{a} \frac{x_-(T, \tau) [1 - x_-(T, \tau)]}{x_+(\tau)} = 1, \quad (122)$$

имеющее на интервале $(0, T)$ не более одного корня; при отсутствии этого корня оптимальное управление $u(t) \equiv 0$ либо $u(t) \equiv 1$. Для нахождения точки переключения τ_* оптимального управления построена одномерная выпуклая задача минимизации

$$\tilde{\Phi}(\tau) \rightarrow \min_{\tau \in [0, T]}, \quad \tau_* = \operatorname{argmin}_{\tau \in [0, T]} \tilde{\Phi}(\tau),$$

где минимизируемая функция

$$\tilde{\Phi}(\tau) = r \cdot \tau + [1 - x_-(T, \tau)]$$

является гладкой и выпуклой. В случае $\tau_* \in (0, T)$ вычисление этой точки переключения можно выполнить, решая скалярное уравнение

$$\tilde{\Phi}'(\tau) = 0. \quad (123)$$

При этом имеем

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau], \\ 0, & t \in (\tau, T]. \end{cases} \quad (124)$$

Уравнение (123) равносильно полученному из других соображений уравнению (122). Если минимизатор τ_* совпадает с концами отрезка $[0, T]$, то для оптимального управления $u(t)$

- при $\tau_* = 0$ полагаем: $u(t) \equiv 0$,
- при $\tau_* = T$ полагаем: $u(t) \equiv 1$.

Выполнен ряд численных экспериментов, иллюстрирующих излагаемый материал.

3.2. Краевая задача принципа максимума: основная и модифицированная формы. Обоснование качественного характера оптимального управления

Функцию Гамильтона-Понтрягина в задаче оптимального управления (7)

$$K(x, \psi, u) = [ax + bu](1 - x) - ru + \psi[ax + bu](1 - x)$$

можно представить в форме

$$K = u \cdot \pi + ax(1 - x)(1 + \psi),$$

где множитель при управлении

$$\pi = \pi(x, \psi) = K'_u \equiv -r + b(1 - x)(1 + \psi) \quad (125)$$

— *функция переключения*. Из условия максимума $K \rightarrow \max_{u \in [0,1]}$ находится максимизатор функции K

$$u_*(x, \psi) = \operatorname{argmax}_{u \in [0,1]} K(x, \psi, u) = \begin{cases} 1, & \pi > 0, \\ 0, & \pi < 0, \end{cases}$$

или, в более краткой форме,

$$u_*(x, \psi) = h(\pi), \quad \pi \neq 0, \quad (126)$$

где $h(\cdot)$ — функция Хевисайда. В задаче (7), как и в задаче (1), особые режимы отсутствуют. Сопряжённое уравнение $\dot{\psi} = -K'_x$ может быть записано в форме

$$\dot{\psi} = (1 + \psi)[bu - a(1 - 2x)], \quad \psi(T) = 0. \quad (127)$$

Таким образом, в силу (125)–(127) краевая задача принципа максимума для задачи (7) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = [ax + bu](1 - x) & , \quad x(0) = x_0, \\ \dot{\psi} = (1 + \psi)[-a(1 - 2x) + bu], & \psi(T) = 0, \\ u = h(\pi), & \pi(x, \psi) = -r + b(1 - x)(1 + \psi). \end{cases} \quad (128)$$

Отметим, что оба уравнения краевой задачи (128) содержат функцию Хевисайда.

Перейдём к построению модифицированной формы краевой задачи принципа максимума. Вводя новую переменную

$$p = b(1 - x)(1 + \psi) \quad (129)$$

— модифицированную сопряжённую переменную — приходим к дифференциальному уравнению

$$\dot{p} = -a(1 - x)p, \quad p(T) = b[1 - x(T)] > 0. \quad (130)$$

Модифицированное сопряжённое уравнение (130) имеет более простой вид по сравнению с сопряжённым уравнением (127), в частности, уравнение (130) не содержит управления. Краевое условие в (130) связывает $p(T)$ с правым концом траектории $x(T)$. В результате замены (129) от краевой задачи принципа максимума (128) переходим к следующей модифицированной краевой задаче принципа максимума

$$\begin{cases} \dot{x} = [ax + bu](1 - x), & x(0) = x_0 > 0, \\ \dot{p} = -a(1 - x)p, & p(T) = b[1 - x(T)] > 0, \\ u = h(p - r). \end{cases} \quad (131)$$

Пусть

$$(x(t), p(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (132)$$

— решение краевой задачи (131). Тогда первая компонента $x(t)$ решения (132) определяет оптимальную траекторию, а функция времени

$$u(t) = h[p(t) - r], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (133)$$

где $p(t)$ — вторая компонента решения (132), является оптимальным управлением задачи (7).

Лемма 14. *Функция $p(t)$ является положительной убывающей функцией времени $t \in [0, T]$.*

Доказательство. Решение $p(t)$ задачи (130) на основании формулы Коши можно представить в виде

$$p(t) = p(T) e^{\int_t^T a[1-x(s)] ds}, \quad p(T) > 0. \quad (134)$$

Из (134) следует, что

$$p(t) > 0. \quad (135)$$

Из (130), (135) следует неравенство

$$\dot{p}(t) < 0,$$

так как $1 - x(t) > 0$, $a > 0$. Следовательно, лемма 14 доказана. \square

Справедливо неравенство

$$p(0) > p(t) > p(T) > 0 \quad \forall t \in (0, T).$$

В силу леммы 14 уравнение

$$p(t) = r \tag{136}$$

имеет не более одного корня на отрезке $[0, T]$. Корень $\tau \in (0, T)$ уравнения (136), если он существует, является точкой переключения управления $u(t)$, см. (133), (124).

Таким образом, возможны только следующие три случая:

- **Случай 1:** при условии

$$r \in (p(T), p(0)) \tag{137}$$

уравнение (136) имеет единственный корень $\tau \in (0, T)$, оптимальное управление

$$u(t) \equiv u(t, \tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau < t \leq T, \end{cases} \tag{138}$$

имеет одну точку переключения τ

- **Случай 2:** при условии

$$r \geq p(0) \tag{139}$$

имеем

$$p(t) - r < 0 \quad \forall t \in (0, T]$$

и управление

$$u(t) = 0$$

- **Случай 3:** при условии

$$p(T) \geq r \tag{140}$$

имеем

$$p(t) - r > 0 \quad \forall t \in [0, T)$$

и управление

$$u(t) = 1.$$

З а м е ч а н и е 6. Условия (137), (139), (140) могут быть выражены в терминах параметров a , b , r , T , x_0 задачи (7).

3.3. Построение решения модифицированной краевой задачи принципа максимума. Случай 1

В этом (основном) случае для точки переключения $\tau \in (0, T)$ в силу равенства $\pi|_{t=\tau} = 0$ имеем

$$p(\tau) = r \quad (141)$$

и управление (133) имеет вид (138) с одной точкой переключения τ .

На начальном отрезке времени $0 \leq t \leq \tau$, где управление $u = 1$, дифференциальные уравнения задачи (131) принимают вид

$$\dot{x} = [ax + b](1 - x), \quad x(0) = x_0, \quad (142)$$

$$\dot{p} = -a(1 - x)p. \quad (143)$$

Задача Коши (142) имеет решение

$$x(t) = x_+(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (144)$$

определяемое формулой (34). Соотношения (141)–(144) влекут равенства

$$\begin{aligned} p(t) &= p(\tau)e^{\int_{\tau}^t -a[1-x_+(s)]ds}, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ p(t) &= r e^{\int_t^{\tau} a[1-x_+(s)]ds}, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ p(0) &= r e^{\int_0^{\tau} a[1-x_+(s)]ds}. \end{aligned} \quad (145)$$

На финальном участке времени $\tau < t \leq T$ имеем: управление $u = 0$, дифференциальные уравнения задачи (131) принимают вид

$$\dot{x} = ax(1 - x), \quad x|_{t=\tau} = x_+(\tau), \quad (146)$$

$$\dot{p} = -a(1 - x)p, \quad p|_{t=\tau} = r. \quad (147)$$

Задача Коши (146) имеет решение

$$x(t) = x_-(t, \tau), \quad \tau \leq t \leq T, \quad (148)$$

определяемое формулой (36), которая может быть записана в форме (111).

Из (147), (148) следуют равенства

$$\begin{aligned} p(t) &= p(\tau)e^{\int_{\tau}^t -a[1-x_-(s, \tau)]ds}, \quad \tau \leq t \leq T, \\ p(t) &= r e^{-\int_{\tau}^t a[1-x_-(s, \tau)]ds}, \quad \tau \leq t \leq T, \\ p(T) &= r e^{-\int_{\tau}^T a[1-x_-(s, \tau)]ds}. \end{aligned} \quad (149)$$

Лемма 15. На отрезке $[0, \tau]$ компоненты решения $(x(t), p(t))$ уравнений (142), (143) связаны зависимостью

$$p(t) = \frac{C_1}{b/a + x(t)}, \quad x(t) = x_+(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (150)$$

где C_1 — положительная константа.

Действительно, из (142), (143) получаем

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{ax + p}{ap} \Rightarrow \frac{dx}{b/a + x} + \frac{dp}{p} = 0,$$

что влечёт (150).

Лемма 16. На отрезке $[\tau, T]$ компоненты решения $(x(t), p(t))$ уравнений (146), (147) связаны зависимостью

$$p(t) = \frac{C_0}{x(t)}, \quad x(t) = x_-(t, \tau), \quad \tau \leq t \leq T, \quad (151)$$

где C_0 — положительная константа.

Действительно, из (146), (147) получаем

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{x}{p} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dp}{p} = 0,$$

что влечёт (151).

Лемма 17. Постоянные C_1 и C_0 в формулах (150) и (151) связаны зависимостью

$$\frac{C_1}{b/a + x_+(\tau)} = \frac{C_0}{x_+(\tau)} \Rightarrow$$

$$C_0 = C_1 \frac{x_+(\tau)}{b/a + x_+(\tau)}, \quad C_1 = C_0 \frac{b/a + x_+(\tau)}{x_+(\tau)}.$$

Для обоснования леммы 17 следует положить $t = \tau$ в формулах (150) и (151).

Лемма 18. Граничные значения (145), (149) функции $p(t)$ могут быть представлены в виде

$$p(0) = r \frac{b/a + 1}{(b/a + x_0) + (1 - x_0) e^{-(a+b)\tau}}, \quad (152)$$

$$p(T) = r \left[x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)] e^{-a(T-\tau)} \right], \quad (153)$$

или, в более компактной форме,

$$p(0) = r \frac{b/a + x_+(\tau)}{b/a + x_0}, \quad (154)$$

$$p(T) = r \frac{x_+(\tau)}{x_-(T, \tau)}. \quad (155)$$

Доказательство. Используя (34), имеем

$$1 - x_+(s) = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{(1 - x_0)/(b/a + x_0)e^{-(a+b)s}}{1 + (1 - x_0)/(b/a + x_0)e^{-(a+b)s}},$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \int_0^\tau a[1 - x_+(s)] ds &= - \int_0^\tau d \left[\frac{1 + \frac{1-x_0}{b/a+x_0}e^{-(a+b)s}}{1 + \frac{1-x_0}{b/a+x_0}e^{-(a+b)s}} \right] = \\ &= \ln \left[1 + \frac{1-x_0}{b/a+x_0}e^{-(a+b)s} \right] \Big|_{s=\tau}^{s=0} = \ln \left[\frac{1 + \frac{1-x_0}{b/a+x_0}}{1 + \frac{1-x_0}{b/a+x_0}e^{-(a+b)\tau}} \right] = \\ &= \ln \left[\frac{b/a + 1}{(b/a + x_0) + (1 - x_0)e^{-(a+b)\tau}} \right], \end{aligned}$$

откуда в силу (145) вытекает формула (152).

Аналогичным образом проверяется формула (153). Используя формулу (111), имеем

$$1 - x_-(s, \tau) = \frac{[1 - x_+(\tau)]e^{-a(s-\tau)}}{x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)]e^{-a(s-\tau)}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} - \int_\tau^T a[1 - x_-(s, \tau)] ds &= \\ &= \int_\tau^T d \left[\frac{x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)]e^{-a(s-\tau)}}{x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)]e^{-a(s-\tau)}} \right] = \\ &= \ln \left[x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)]e^{-a(s-\tau)} \right] \Big|_{s=\tau}^{s=T} = \\ &= \ln \left[x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)]e^{-a(T-\tau)} \right], \end{aligned}$$

откуда в силу (149) следует формула (153). Переход от формул (152), (153) к (154), (155) происходит очевидным образом с привлечением формул (34), (111). Лемма 18 доказана. \square

В лемме 18 для правого граничного значения $p(T)$ получено выражение (155):

$$p(T) = r \frac{x_+(\tau)}{x_-(T, \tau)}.$$

С другой стороны, полагая $t = T$ в формуле (151), находим:

$$p(T) = \frac{C_0}{x_-(T, \tau)}.$$

Из двух последних представлений граничного значения $p(T)$ находим константу C_0 :

$$C_0 = r x_+(\tau). \quad (156)$$

Отсюда, привлекая лемму 17, находим параметр C_1 :

$$C_1 = r [b/a + x_+(\tau)]. \quad (157)$$

Таким образом, имеет место

Лемма 19. *При известной точке переключения τ решение краевой задачи (131) допускает следующее аналитическое описание:*

$$x(t) = \begin{cases} x_+(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ x_-(t, \tau), & \tau < t \leq T, \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} \frac{C_1}{b/a + x_+(t)}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{C_0}{x_-(t, \tau)}, & \tau < t \leq T, \end{cases}$$

где положительные постоянные C_1 , C_0 определяются формулами (157), (156).

В заключение подраздела 3.3 обсудим основной вопрос о вычислении точки переключения. Это можно сделать, используя правое краевое условие (условие трансверсальности) краевой задачи (131), которое запишем в форме

$$p(T) = b [1 - x_-(T, \tau)]. \quad (158)$$

На основании (155) и (158) приходим к уравнению для определения точки переключения τ :

$$r \frac{x_+(\tau)}{x_-(T, \tau)} = b [1 - x_-(T, \tau)]. \quad (159)$$

Уравнение (159) перепишем в следующей равносильной форме

$$\frac{b x_-(T, \tau) [1 - x_-(T, \tau)]}{r x_+(\tau)} = 1. \quad (160)$$

В этом уравнении участвуют известные функции $x_+(\tau)$, $x_-(T, \tau)$, определяемые формулами (34), (111). К уравнению (160) мы вернёмся в конце следующего подраздела. Если уравнение (160) имеет корень на интервале $(0, T)$, то реализуется **Случай 1**, см. подраздел 3.2, иначе реализуется **Случай 2** или **Случай 3**, среди которых несложно выбрать лучший результат.

3.4. Прямой поиск точки переключения оптимального управления. Одномерная выпуклая задача минимизации для нахождения точки переключения оптимального управления

Выполненный выше анализ позволил установить качественный характер оптимального управления задачи (7) и наметить следующие подходы к его вычислению: а) на основе краевой задачи принципа максимума, б) на основе модифицированной краевой задачи, в) на основе скалярного уравнения (159). Здесь будет рассмотрен прямой поиск точки переключения оптимального управления задачи (7), которое имеет вид (138), где $\tau \in (0, T)$ (**Случай 1**). Для включения **Случаев 2** и **3** следует только разрешить параметру τ принимать крайние значения $\tau = 0$ и $\tau = T$.

Управлению (138), где $\tau \in [0, T]$, отвечает следующее (зависящее от r) значение функционала J :

$$\tilde{\Phi}(\tau) = r\tau + [1 - x_-(T, \tau)], \quad (161)$$

где функция $x_-(t, \tau)$ определяется формулой (111), так что

$$x_-(T, \tau) = \frac{x_+(\tau)}{x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)]e^{-a(T-\tau)}}, \quad (162)$$

и

$$1 - x_-(T, \tau) = 1 / \left(\frac{x_+(\tau)}{1 - x_+(\tau)} e^{a(T-\tau)} + 1 \right). \quad (163)$$

Таким образом, функцию (161) можно определить формулой

$$\tilde{\Phi}(\tau) = r\tau - \frac{1}{\frac{x_+(\tau)}{1-x_+(\tau)} e^{a(T-\tau)} + 1}, \quad (164)$$

где функция $x_+(t)$, напомним, определяется формулой (34), см. лемму 1. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 20. *Точка переключения $\tau = \tau_* \in [0, T]$ оптимального управления*

$$u(t, \tau) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau], \\ 0, & t \in (\tau, T], \end{cases}$$

задачи (7) является решением следующей одномерной задачи минимизации

$$\tilde{\Phi}(\tau) \rightarrow \min_{\tau \in [0, T]}, \quad (165)$$

$$\tau_* = \operatorname{argmin}_{\tau \in [0, T]} \tilde{\Phi}(\tau), \quad (166)$$

где минимизируемая функция $\tilde{\Phi}(\tau)$ определяется равенствами (161) или (164).

Изучим свойства функции $\tilde{\Phi}(\tau)$.

Лемма 21. *Функция $\tilde{\Phi}(\tau)$ непрерывна вместе с производными $\tilde{\Phi}'(\tau)$, $\tilde{\Phi}''(\tau)$ на отрезке $[0, T]$, причём*

$$\tilde{\Phi}'(\tau) = r - b \frac{x_-(T, \tau) [1 - x_-(T, \tau)]}{x_+(\tau)}, \quad (167)$$

$$\tilde{\Phi}''(\tau) > 0, \quad \tau \in [0, T]. \quad (168)$$

Доказательство. Дифференцирование функции (164) по аргументу τ даёт:

$$\tilde{\Phi}'(\tau) = r - \frac{1}{\left[\frac{x_+(\tau)}{1-x_+(\tau)} e^{a(T-\tau)} + 1 \right]^2} \cdot \sigma(\tau), \quad (169)$$

где множитель

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) &= \frac{\dot{x}_+(\tau)}{[1-x_+(\tau)]^2} e^{a(T-\tau)} - \frac{x_+(\tau)}{1-x_+(\tau)} a e^{a(T-\tau)} = \\ &= \frac{e^{a(T-\tau)}}{1-x_+(\tau)} \left[\frac{\dot{x}_+(\tau)}{1-x_+(\tau)} - a x_+(\tau) \right] \end{aligned}$$

в силу равенства $\dot{x}_+(\tau)/[1 - x_+(\tau)] = ax_+(\tau) + b$ принимает вид

$$\sigma(\tau) = \frac{b e^{a(T-\tau)}}{1 - x_+(\tau)}. \quad (170)$$

Из (169), (170) получаем

$$\tilde{\Phi}'(\tau) = r - \frac{[1 - x_+(\tau)]^2}{[x_+(\tau)e^{a(T-\tau)} + [1 - x_+(\tau)]]^2} \cdot \frac{b e^{a(T-\tau)}}{[1 - x_+(\tau)]},$$

или, после очевидных преобразований,

$$\tilde{\Phi}'(\tau) = r - \frac{b e^{-a(T-\tau)} [1 - x_+(\tau)]}{[x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)]e^{-a(T-\tau)}]^2}. \quad (171)$$

В силу (162), (163) имеем:

$$\frac{1}{x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)]e^{-a(T-\tau)}} = \frac{x_-(T, \tau)}{x_+(\tau)}, \quad (172)$$

$$\frac{[1 - x_+(\tau)]e^{-a(T-\tau)}}{x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)]e^{-a(T-\tau)}} = [1 - x_-(T, \tau)]. \quad (173)$$

Из (171)–(173) следует, что производная $\tilde{\Phi}'(\tau)$ может быть записана в форме

$$\tilde{\Phi}'(\tau) = r - b \frac{x_-(T, \tau) [1 - x_-(T, \tau)]}{x_+(\tau)}. \quad (174)$$

Формула (167) доказана.

Обратимся к обоснованию неравенства (168) для второй производной. Из (174) следует:

$$\tilde{\Phi}'(\tau)x_+(\tau) = rx_+(\tau) - bx_-(T, \tau)[1 - x_-(T, \tau)]. \quad (175)$$

Почленное дифференцирование (175) по τ позволяет записать равенство

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}''(\tau)x_+(\tau) &= [r - \tilde{\Phi}'(\tau)]\dot{x}_+(\tau) - \\ &\quad - b \frac{\partial x_-(T, \tau)}{\partial \tau} [1 - x_+(\tau)] + \\ &\quad + b \frac{\partial x_-(T, \tau)}{\partial \tau} x_-(T, \tau). \end{aligned} \quad (176)$$

Из (176) в силу (174) получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}''(\tau)x_+(\tau) &= b \frac{\dot{x}_+(\tau)}{x_+(\tau)}x_-(T, \tau)[1 - x_-(T, \tau)] - \\ &\quad - b \frac{\partial x_-(T, \tau)}{\partial \tau}[1 - x_-(T, \tau)] + \\ &\quad + b \frac{\partial x_-(T, \tau)}{\partial \tau}x_-(T, \tau).\end{aligned}\tag{177}$$

Почленное деление (177) на

$$bx_-(T, \tau)[1 - x_-(T, \tau)]$$

приводит к равенству

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}''(\tau) \frac{x_+(\tau)}{bx_-(T, \tau)[1 - x_-(T, \tau)]} &= \\ &= \left(\frac{\dot{x}_+(\tau)}{x_+(\tau)} - \frac{1}{x_-(T, \tau)} \frac{\partial x_-(T, \tau)}{\partial \tau} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{1 - x_-(T, \tau)} \frac{\partial x_-(T, \tau)}{\partial \tau}.\end{aligned}\tag{178}$$

Запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}_+(\tau)}{x_+(\tau)} - \frac{1}{x_-(T, \tau)} \frac{\partial x_-(T, \tau)}{\partial \tau} &= \\ &= \frac{d}{d\tau} \ln \left(\frac{x_+(\tau)}{x_-(T, \tau)} \right) = \\ &= \frac{x_-(T, \tau)}{x_+(\tau)} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x_+(\tau)}{x_-(T, \tau)} \right) \stackrel{(172)}{=} \\ &= \frac{x_-(T, \tau)}{x_+(\tau)} \frac{d}{d\tau} [x_+(\tau) + [1 - x_+(\tau)] e^{-a(T-\tau)}] = \\ &= \frac{x_-(T, \tau)}{x_+(\tau)} \left[\dot{x}_+(\tau) [1 - e^{-a(T-\tau)}] + \right. \\ &\quad \left. + [1 - x_+(\tau)] ae^{-a(T-\tau)} \right].\end{aligned}\tag{179}$$

Так как

$$1 - e^{-a(T-\tau)} \geq 0 \quad \text{при} \quad \tau \in [0, T]$$

и

$$x_+(\tau) > 0, \quad \dot{x}_+(\tau) > 0, \quad 1 - x_+(\tau) > 0,$$

то выражение (179) положительно. Последнее слагаемое в правой части формулы (178) также положительно, так как

$$\frac{\partial x_-(T, \tau)}{\partial \tau} = \frac{b e^{a(T-\tau)}}{\left[\frac{x_+(\tau)}{1-x_+(\tau)} e^{a(T-\tau)} + 1 \right]^2} \cdot \frac{1}{[1-x_+(\tau)]} > 0.$$

Поэтому правая часть формулы (178) положительна, что очевидным образом влечёт положительность $\tilde{\Phi}''(\tau)$. Лемма 21 доказана. \square

Следствие 1. Функция $\tilde{\Phi}(\tau)$ выпукла на отрезке $[0, T]$.

Лемма 22. Минимизатор (166) в одномерной выпуклой задаче минимизации (165) существует и определяется единственным образом.

1. При выполнении неравенств

$$\tilde{\Phi}'(0) < 0, \quad \tilde{\Phi}'(T) > 0, \quad (180)$$

минимизатор

$$\tau_* \in (0, T)$$

и является корнем уравнения

$$\tilde{\Phi}'(\tau) = 0 \quad (181)$$

(Случай 1).

2. При выполнении неравенства

$$\tilde{\Phi}'(0) \geq 0 \quad (182)$$

минимизатор $\tau_* = 0$ (Случай 2).

3. При выполнении неравенства

$$\tilde{\Phi}'(T) \leq 0 \quad (183)$$

минимизатор $\tau_* = T$ (Случай 3).

Замечание 7. Уравнение (181) равносильно полученному в подразделе 3.3 уравнению (159).

Замечание 8. Условия (180), (182), (183) в силу формулы (167) могут быть выражены в терминах параметров задачи (7).

3.5. Численные эксперименты

В этом подразделе рассмотрены иллюстрирующие примеры решения задачи (7) для некоторых наборов исходных данных на основе подхода, изложенного в предыдущем подразделе. Поиск оптимальной точки переключения допускает простую наглядную интерпретацию.

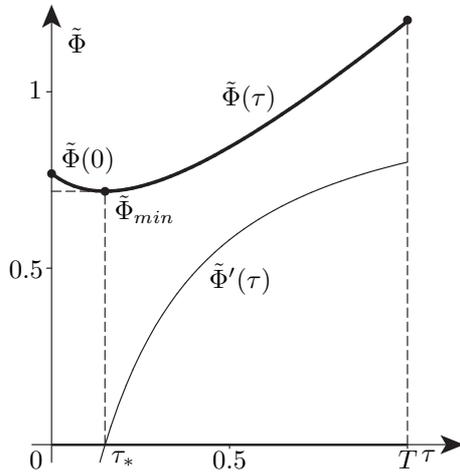


Рис. 12. Пример 5: $r = 1$

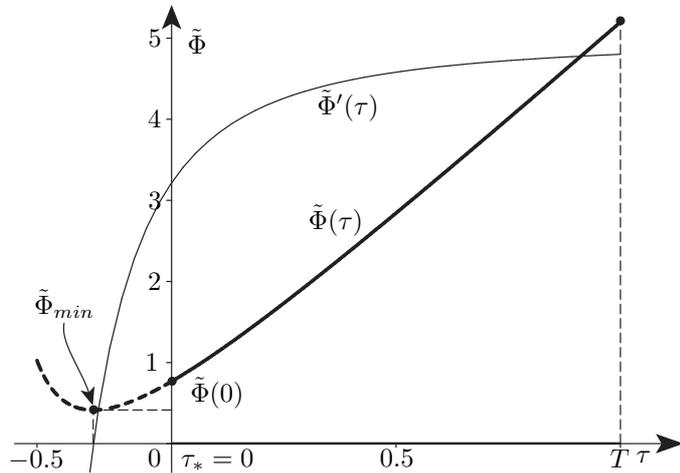


Рис. 13. Пример 6: $r = 5$

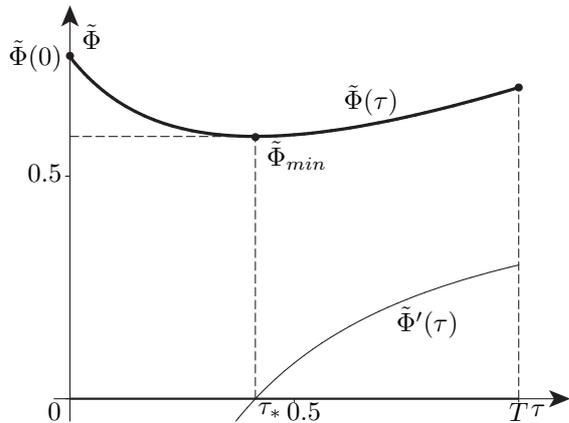


Рис. 14. Пример 7: $r = 1/2$

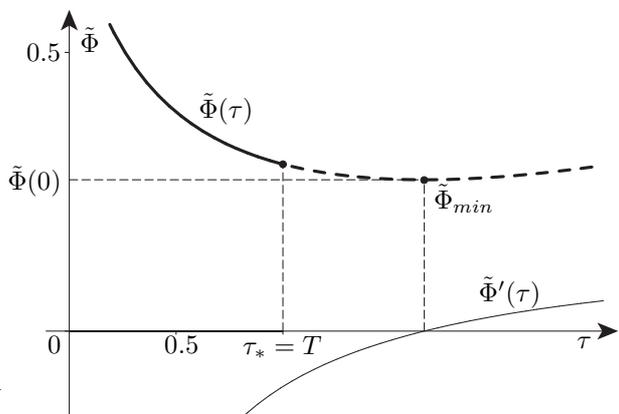


Рис. 15. Пример 8: $r = 0.1$

Пример 5. При параметрах

$$a = 1, \quad b = 1, \quad r = 1, \quad T = 1, \quad x_0 = 0.1$$

получаем

$$\tau_* \approx 0.15016.$$

На рис. 12 показаны графики функции $\tilde{\Phi}(\tau)$ и её производной $\tilde{\Phi}'(\tau)$. Реализуется **Случай 1**. Параметр $\tau_* \in (0, T)$ может быть найден как корень уравнения $\tilde{\Phi}'(\tau) = 0$, или как минимизатор $\tau_* = \operatorname{argmin}_{\tau \in [0, T]} \tilde{\Phi}(\tau)$.

Пример 6. При параметрах

$$a = 1, \quad b = 1, \quad r = 5, \quad T = 1, \quad x_0 = 0.1$$

получаем $\tau_* = 0$. На рис. 13 показаны графики функции $\tilde{\Phi}(\tau)$ и её производной $\tilde{\Phi}'(\tau)$. Реализуется **Случай 2**. Корень $\tau'_* \approx -0.17469$ уравнения $\tilde{\Phi}'(\tau) = 0$ расположен левее основного отрезка $[0, T]$. Функция $\tilde{\Phi}(\tau)$ возрастает на отрезке $[0, T]$. В этом случае оптимальное управление $u(t) \equiv 0$.

Пример 7. При параметрах

$$a = 1, \quad b = 1, \quad r = 1/2, \quad T = 1, \quad x_0 = 1/10$$

получаем $\tau_* \approx 0.41306$. На рис. 14 представлен график функции $\tilde{\Phi}(\tau)$ и её производной $\tilde{\Phi}'(\tau)$. Реализуется **Случай 1**.

Пример 8. При параметрах

$$a = 1, \quad b = 1, \quad r = 1/10, \quad T = 1, \quad x_0 = 1/10$$

находим $\tau_* = T$. Графики функции $\tilde{\Phi}(\tau)$ и её производной $\tilde{\Phi}'(\tau)$ показаны на рис. 15. Реализуется **Случай 3**. Корень $\tau'_* \approx 1.66133$ уравнения $\tilde{\Phi}'(\tau) = 0$ расположен правее основного отрезка $[0, T]$. Оптимальное управление $u(t) \equiv 1$. Функция $\tilde{\Phi}(\tau)$ убывает на отрезке $[0, T]$.

В этих примерах можно проследить зависимость точки переключения τ_* от параметра r . При уменьшении r точка τ_* движется слева направо.

З а м е ч а н и е 9. Задачу (7) можно решать на основе краевых задач (128), (131). Привлечение экстремального представления точки переключения τ_* и уравнения $\tilde{\Phi}'(\tau) = 0$ значительно упрощает процесс вычисления оптимального решения.

4. Построение оптимальных законов управления в форме обратной связи для моделей I и II

4.1. Теоремы о синтезе

Анализ программных функций управления $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, для модели I (раздел 2) и для модели II (раздел 3) позволяет построить

синтезирующее управление $U(t, x)$, которое обеспечивает оптимальный закон управления в режиме обратной связи.

Программное управление $u_I(t)$, $0 \leq t \leq T$, для модели I в начальный момент времени $t = 0$ принимает значение, которое определяется знаком величины (83):

$$\Phi'(0) = r - \frac{b(1-x_0)(e^{aT}-1)}{a(1+x_0 \cdot (e^{aT}-1))}, \quad (184)$$

$$u_I(t)|_{t=0} = h(-\Phi'(0)). \quad (185)$$

Программное управление $u_{II}(t)$, $0 \leq t \leq T$, для модели II в начальный момент времени $t = 0$ принимает значение, определяемое знаком производной (171)

$$\tilde{\Phi}'(\tau) = r - b \frac{e^{-a(T-\tau)}[1-x_+(\tau)]}{[x_+(\tau) + [1-x_+(\tau)]e^{-a(T-\tau)}]^2}$$

при $\tau = 0$, то есть знаком выражения

$$\tilde{\Phi}'(0) = r - b \frac{e^{-aT}[1-x_0]}{[x_0 + [1-x_0]e^{-aT}]^2}, \quad (186)$$

при этом

$$u_{II}(t)|_{t=0} = h(-\tilde{\Phi}'(0)). \quad (187)$$

Предполагая, что оптимальная траектория управляемой системы в момент времени $t = s$ принимает значение $x(s)$, можно поставить вопрос о нахождении оптимального управляющего сигнала в момент времени $t = s$. Хвост оптимальной траектории оптимален. Введением нового времени $t' = t - s \in [0, T - s]$ задачи (1), (7) приводятся к задачам на отрезке времени $t' \in [0, T']$, $T' \equiv T - s$, и значения оптимальных управлений можно найти по формулам вида (185) и (187) с заменой в формулах (184) и (186)

$$\boxed{T \rightarrow T - s, \quad x_0 \rightarrow x(s), \quad s \rightarrow t.}$$

Эти рассуждения конкретизируются в следующих двух теоремах.

Теорема 3. *Оптимальная синтезирующая функция $U_I(t, x)$ для задачи оптимального управления (1) (модель I) имеет вид сложной функции*

$$u = U_I(t, x) \equiv h(g_I(t, x)), \quad (188)$$

где внешняя функция $h(\cdot)$ — функция Хевисайда, а внутренняя — определяется равенством

$$g_I(t, x) = -r + \frac{b}{a} \frac{(1-x)(e^{a(T-t)} - 1)}{1 + x \cdot (e^{a(T-t)} - 1)}. \quad (189)$$

Замкнутая управляемая система для модели I

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [ax(t) + bU_I(t, x(t))] [1 - x(t)], \\ x(0) = x_0 \in [0, 1), \end{cases} \quad (190)$$

определяет оптимальную траекторию задачи (1) в режиме обратной связи.

Теорема 4. Оптимальная синтезирующая функция $U_{II}(t, x)$ для задачи оптимального управления (7) (модель II) имеет вид

$$u = U_{II}(t, x) \equiv h(g_{II}(t, x)), \quad (191)$$

где $h(\cdot)$ — функция Хевисайда, а

$$g_{II}(t, x) = -r + b \frac{(1-x)e^{a(t-T)}}{[x + (1-x)e^{a(t-T)}]^2}. \quad (192)$$

Замкнутая управляемая система для модели II

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [ax(t) + bU_{II}(t, x(t))] [1 - x(t)], \\ x(0) = x_0 \in [0, 1), \end{cases} \quad (193)$$

определяет оптимальную траекторию задачи (7) в режиме обратной связи.

З а м е ч а н и е 10. Вид функций (189) и (192) определяется выражениями (184) и (186), взятыми с обратным знаком и с формальными заменами $T \rightarrow T - t$, $x_0 \rightarrow x$. Аргументы функции Хэвисайда в формулах (188) и (191) вдоль оптимального процесса обращаются в нуль не более одного раза.

З а м е ч а н и е 11. Важную роль в рамках изучаемой темы играют кривые

$$\begin{aligned} S_I : g_I(t, x) &= 0 \quad (\text{для модели I}), \\ S_{II} : g_{II}(t, x) &= 0 \quad (\text{для модели II}), \end{aligned}$$

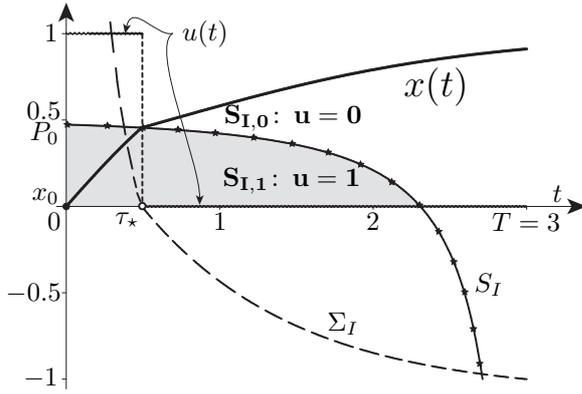


Рис. 16. Модель I, пример 9

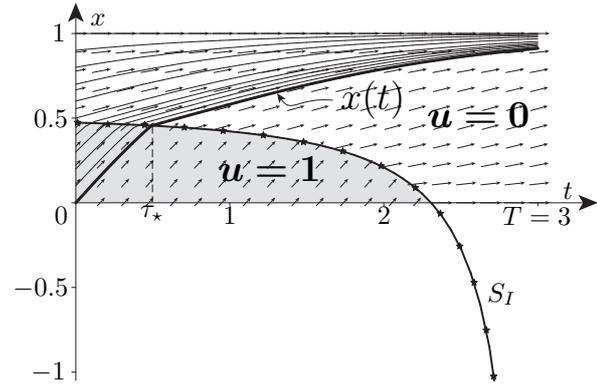


Рис. 17. Модель I, пример 9. Несколько оптимальных траекторий

определяемые неявными уравнениями с участием функций (189), (192) при $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x < 1$. Эти кривые, рассматриваемые на прямоугольнике $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$, разделяют прямоугольник на части, где функции $g_I(t, x)$, $g_{II}(t, x)$ имеют разные знаки, либо не проходят через внутренность этого прямоугольника. Оптимальные траектории при переходе из одной области в другую протыкают кривые S_I и S_{II} , что соответствует скачку управления, либо, оставаясь в одной из упомянутых областей, движутся при постоянном граничном управлении. Изучение свойств этих кривых делает наглядным протекание оптимального процесса и обсуждается ниже при решении конкретных примеров. Эти линии можно было бы назвать *линиями переключения в плоскости* (t, x) .

З а м е ч а н и е 12. При численном решении задачи Коши (190), (193) функции Хевисайда $h(s)$ можно аппроксимировать сглаженной функцией Хевисайда $\tilde{h}(s, \mu)$:

$$h(s) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(s)), \quad \tilde{h}(s, \mu) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{\mu + s^2}} \right).$$

Здесь $\mu > 0$ — малый параметр сглаживания. Выполненные численные эксперименты со сглаженной функцией Хевисайда (при параметре сглаживания $\mu = 10^{-8}$) показывают хорошее совпадение результатов расчётов с точными решениями.

4.2. Примеры

Проиллюстрируем применение теорем 3 и 4 в конкретных случаях. Примеры 9, 10 относятся к модели I, примеры 11–13 — к модели II.

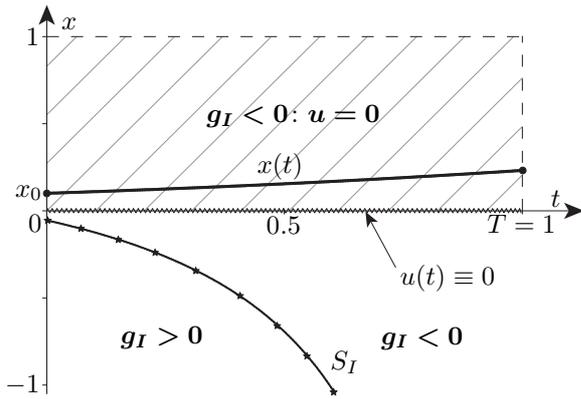


Рис. 18. Модель I, пример 10

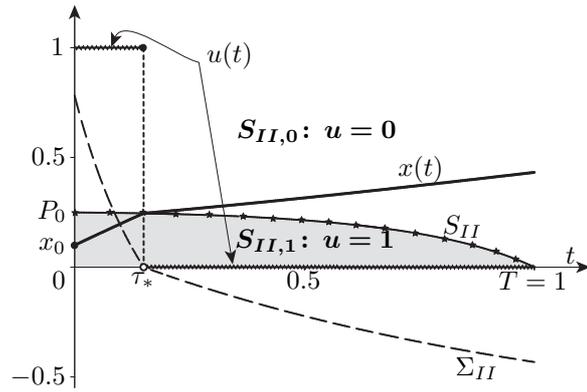


Рис. 19. Модель II, пример 11

Пример 9. Для исходных данных из примера 1 (модель I)

$$a = 1, \quad b = 1, \quad r = 1, \quad T = 3, \quad x_0 = 0$$

обсудим порядок нахождения решения на основе теоремы 3. Решая задачу Коши (190) для замкнутой системы численными средствами, находим траекторию $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, график которой показан на рис. 16. Этот график имеет излом при $t = \tau_* \approx 0.49185$, где τ_* — точка переключения оптимального управления (программы). На этом же рис. 16 показан график оптимальной программы $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, имеющий форму ступеньки. Точка излома графика траектории $x(t)$ расположена на линии переключения S_I , см. замечание 11. На рис. 16 кривая S_I отмечена звёздочками. Область $S_{I,1}$ под кривой S_I (при $0 \leq t \leq T$) показана заливкой. Пока траектория остаётся в области $S_{I,1}$, оптимальный управляющий сигнал равен 1. При протыкании траекторией $x(t)$ (в момент времени $t = \tau_*$) кривой S_I и переходе в область $S_{I,0}$ (над кривой S_I) оптимальный управляющий сигнал становится равным 0. Изображённая на рис. 16 кривая Σ_I (штриховая линия) показывает характер изменения функции $\gamma_I(t) \equiv g_I(t, x)|_{x=x(t)}$ (аргумент функции Хевисайда в формуле (188) для обратной связи U_I) вдоль оптимального процесса. Функция $\gamma_I(t)$ обращается в нуль при $t = \tau_*$, убывая с ростом времени $t \in [0, T]$. Поведение оптимальных траекторий данной задачи при других начальных значениях $x(0) = x_0$ показано на рис. 17.

Пример 10. Для набора исходных данных

$$a = 1, \quad b = 1, \quad r = 2, \quad T = 1, \quad x_0 = 1/10$$

в модели I на основном прямоугольнике $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$, который на рис. 18 показан штриховкой, функция $g_I(t, x(t))$ отрицательна; кривая S_I отмечена звёздочками, расположена в области $x < 0$, ниже кривой S_I выполняется неравенство $g_I > 0$. Таким образом, оптимальная траектория при любом начальном значении $x_0 \in [0, 1)$ соответствует оптимальному управлению $u(t) \equiv 0$. Оптимальная траектория при $x_0 = 0.1$ показана на рис. 18. Соответствующий график не имеет изломов.

Пример 11. Для исходных данных из примера 5 (модель II)

$$a = b = r = T = 1, \quad x_0 = 0.1$$

обсудим порядок нахождения оптимального решения на основе теоремы 4. Решая задачу Коши (193) для замкнутой системы численными средствами, находим оптимальную траекторию $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, график которой показан на рис. 19. График траектории $x(t)$ имеет излом при $t = \tau_* \approx 0.15016$, где τ_* — точка переключения оптимального управления (программы). На рис. 19 изображён график оптимальной программы $u(t)$, имеющий форму ступеньки. Кривая S_{II} (см. замечание 11) показана на рис. 19 звёздочками. Точка излома траектории $x(t)$ лежит на кривой S_{II} . Область $S_{II,1}$ под кривой S_{II} (при $0 \leq t \leq 1$) показана на рис. 19 заливкой. Пока траектория $x(t)$ остаётся в области $S_{II,1}$, оптимальный управляющий сигнал равен 1. При протыкании траекторией $x(t)$ (в момент времени $t = \tau_*$) кривой S_{II} и переходе в область $S_{II,0}$ (над кривой S_{II}) оптимальный управляющий сигнал становится равным 0. Траектории с другими начальными условиями ведут себя аналогичным образом. Для начальных точек $x_0 = x(0)$, расположенных выше точки $P_0 \in S_{II}$, $t = 0$, траектории остаются в незакрашенной области $S_{II,0}$ (выше кривой S_{II}) и там управление равно нулю. Построенная на рис. 19 кривая Σ_{II} (штриховая кривая) показывает характер изменения функции $\gamma_{II}(t) = g_{II}(t, x)|_{x=x(t)}$ (аргумент функции Хевисайда в формуле (191) для обратной связи U_{II}) вдоль оптимального процесса. Функция $\gamma_{II}(t)$ обращается в нуль при $t = \tau_*$, убывая с ростом времени $t \in [0, T]$, что соответствует значениям оптимальной программы $u(t)$ до и после точки переключения τ_* .

Пример 12. Для набора параметров

$$a = 1, \quad b = 1/10, \quad r = 1, \quad T = 1, \quad x_0 = 1/10$$

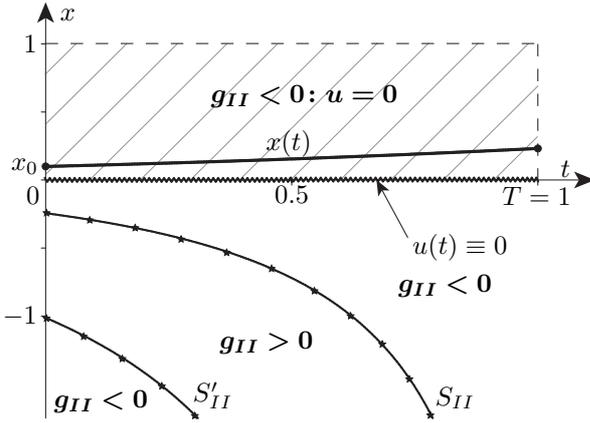


Рис. 20. Модель II, пример 12

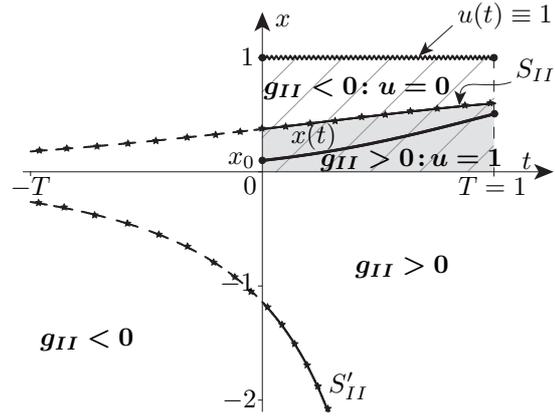


Рис. 21. Модель II, пример 13

в модели II на основном прямоугольнике $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$, который на рис. 20 показан штриховкой, функция $g_{II}(t, x)$ отрицательна. Следовательно, оптимальное управление $u(t) \equiv 0$ для любого начального состояния $x_0 \in [0, 1)$. Уравнение $g_{II}(t, x) = 0$, $0 \leq t \leq T$, определяет две кривые S_{II} и S'_{II} , расположенные в области $x < 0$. Знаки функции $g_{II}(t, x)$ показаны на рис. 20. Оптимальная траектория $x(t)$ отвечает управлению $u(t) = 0$ и не имеет изломов.

Пример 13. Для набора параметров

$$a = 2, \quad b = 1/20, \quad r = 1/50, \quad T = 1, \quad x_0 = 1/10$$

(модель II) уравнение $g_{II}(t, x) = 0$ определяет две кривые S_{II} и S'_{II} , которые на рис. 21 отмечены звёздочками и построены при $t \in [-T, T]$. Часть основного прямоугольника $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$, расположенная ниже кривой S_{II} , показана заливкой, там $g_{II}(t, x) > 0$. График оптимальной траектории $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, расположен в закрашенной области, отвечает управлению $u = 1$ и не имеет изломов. «Линия переключения» S'_{II} , расположенная в области $x < 0$, и часть линии переключения S_{II} , $t \in [-T, 0)$, расположенная за пределами основного прямоугольника, на оптимальное решение не влияют и построены для удобства исследования знака функции $g_{II}(t, x)$. Функция $\gamma_{II}(t) > 0$, $0 \leq t \leq T$.

Замечание 13. Построение оптимальных решений для моделей I и II на основе численного интегрирования задач Коши для замкнутых дифференциальных уравнений (190), (193) является экономным с точки зрения времени счёта по сравнению с другими алгоритмами решения этих задач, рассмотренных в разделах 2 и 3.

Литература

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М. 1961.
2. *Измоденова К. В., Михайлов А. П.* Об оптимальном управлении процессом распространения информации // Математическое моделирование. 2005 год, том 17, номер 5, С. 67–76.
3. *Аввакумов С. Н., Киселёв Ю. Н.* Исследование модели диффузии информации // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XX» — Воронеж: ВГУ, 2009. С. 6–8.
4. *Аввакумов С. Н., Киселёв Ю. Н.* Диффузия информации в социальной группе // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XXI» — Воронеж: ВГУ, 2010. С. 11–14.
5. *С. Н. Аввакумов, Ю. Н. Киселёв* Построение оптимальных законов управления для модели диффузии информации в социальной группе // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов ф-та ВМиК МГУ, под редакцией Ю. С. Осипова, А. В. Кряжимского. МАКС Пресс. 2009. – Вып. 4. С. 3–33.
6. *С. Н. Аввакумов, Ю. Н. Киселёв* Модели диффузии информации в социальной группе: построение оптимальных программ // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов ф-та ВМиК МГУ, под редакцией Ю. С. Осипова, А. В. Кряжимского. МАКС Пресс. 2010. – Вып. 5. С. 3–31 (в печати).
7. *Винников Е. В.* Задача оптимального распределения ресурсов в модели диффузии информации // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 16. Вып. 5. 2009. С. 823–824.
8. *Аввакумов С. Н., Киселёв Ю. Н.* Задача диффузии инноваций: качественное исследование и алгоритмический аспект // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2002. N3, С. 24–29.
9. *S. N. Avvakumov, Yu. N. Kiselev.* Qualitative study and algorithms in the mathematical model of innovation diffusion // Journal of

Mathematical Sciences. Springer New York, August, 2003. V. 116. №6. P. 3657–3672.

10. *Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В.* Задача оптимального распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с особыми режимами // Прикладная математика и информатика. № 33, М.: МАКС Пресс. 2009. С. 13–68.
11. *Киселёв Ю. Н., Орлов М. В.* Задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба-Дугласа // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения – XX». Воронеж. 2009. С. 85–86.
12. *Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В.* Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М.: МАКС Пресс. 2007.