А.В. Баев

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ПОГЛОЩЕНИЕМ*

При решении многих прикладных задач, [1–8], [15–17], [25–26], в том числе, обратных задач рассеяния, приходится решать дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varphi(y(x)) = f(x), \quad x \in [0, a], \tag{1}$$

где $y(x)$ — искомое решение, вообще говоря, не непрерывно дифференцируемое, $\varphi(y)$ — непрерывная на $(-\infty, \infty)$ функция, $f(x)$ — заданная правая часть. Такого рода уравнения являются типичными при обработке данных сейсмической разведки, когда функция $y(x)$ описывает упруго-плотностные свойства слоистой среды, подлежащие определению, а $f(x)$ является регистрируемой приборами записью сейсмических колебаний (сейсмограммой) в скважине или на дневной поверхности.

Независимая переменная x в этом случае играет роль пространственной переменной, имеющей физическую размерность времени, поскольку является эйконалом, т. е. временем распространения сейсмического сигнала от текущей точки до дневной поверхности. Функциональное слагаемое в левой части (1) при этом характеризует диссипативные свойства среды и в большинстве математических моделей задается априорно [5–8].

Ясно, что в общей постановке задача одновременного определения упруго-плотностных и диссипативных свойств слоистой среды, т. е. функций $y(x)$ и $\varphi(y)$, не имеет единственного решения в рамках задачи Коши для (1). Однако сама природа геологического происхождения верхних слоев земной коры позволяет сформулировать разумную математическую постановку подобной задачи. Дело в том, что толщи земной коры состоят из однородных слоев различных пород, мощность и жесткость которых различаются значимо для сейсмических наблюдений. Это приводит к тому, что в сейсморазведке, как правило, ставится задача о поиске границ слоев и коэффициентов отражения на них, что соответствует определению скачков функции $y(x)$ или, в эквивалентной постановке, интервалов ее постоянства.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 17-01-00525

Имеется еще одна веская причина, по которой разумно отказаться от классического понимания (1) как уравнения, выполняющегося во всех точках отрезка $[0, a]$. Она состоит в том, что как в процессе регистрации и обработки данных наблюдений, так и при построении алгоритмов численного решения, в подавляющем большинстве случаев используется дискретный подход. При этом интервал дискретизации отождествляется со слоем малой толщины, а разностная производная определяет коэффициент отражения на границе слоя. Очевидно, что попытка одновременного определения сеточных функций, соответствующих $y(x)$ и $\varphi(y)$, не дает сколь-нибудь разумного результата.

Причина невозможности одновременного определения функций $y(x)$ и $\varphi(y)$ состоит в использовании классического определения производной как предела разностного отношения. Действительно, пусть функция $y(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, a]$, и при этом ее производная равна нулю почти всюду [9], т. е. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ п. в. на $[0, a]$. Тогда

$$\varphi(y(x)) = f(x) \text{ п. в. на } [0, a],$$

что заведомо не определяет однозначно искомых функций. Таким образом, рассмотрение (1) на классе функций с ограниченной вариацией и классическим пониманием производной не приводит к решению поставленной задачи — одновременному определению функций $y(x)$ и $\varphi(y)$.

Целью настоящей работы является постановка и решение задачи Коши для уравнения (1) в рамках теории обобщенных функций (распределений), [10–12]. В качестве содержательного примера использования предложенного подхода и построенного на его основе численного алгоритма в статье рассмотрена обратная задача рассеяния плоских сейсмических волн в слоистой среде. Как известно, в этом случае задача рассеяния сводится к акустическому уравнению для продольных или, соответственно, поперечных упругих волн. При этом установлена единственность определения акустического импеданса и коэффициента поглощения как функций эйконала, а также связывающей их функциональной зависимости, по сейсмической трассе однократных отражений для соответствующего типа волн, [6–7].

С практической точки зрения возможность определения коэффициента поглощения и, в особенности, аномально больших его значений в рамках геофизической интерпретации говорит о наличии слоев повышенной пористости, [13]. Это, в свою очередь, позволяет на этапе геологической интерпретации делать обоснованные прогнозы о наличии в указанном горизонте коллекторов природных углеводородов, [14].

1. Обратная задача рассеяния

Рассмотрим следующую гиперболическую систему уравнений, описывающую распространение плоских волн в акустической или упругой среде при $z > 0$:

$$\rho(z)s_t = -p_z - 2\nu(z)s, \quad p_t = -\lambda(z)s_z, \tag{2}$$

где $s(z,t)$ — скорость малых смещений среды, $p(z,t)$ — давление, $\rho(z)$ — плотность, $\lambda(z)$ — упругий параметр, $\nu(z)$ — коэффициент динамической вязкости, z — пространственная переменная, t — физическое время. При этом по традиции, принятой в геофизике, z играет роль глубины, $z = 0$ — дневная поверхность. Таким образом, все свойства среды зависят лишь от глубины, т. е. среда является слоистой вертикально неоднородной.

Сделаем в (2) замену пространственной переменной, перейдя к эйконалу $x(z) = \int_0^z \mathrm{d}\zeta/c(\zeta)$, где $c(z) = \sqrt{\lambda/\rho}$ — скорость распространения колебаний в среде. В результате исключения p, приходим к уравнению акустики с диссипативным членом:

$$w_{tt} = w_{xx} + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\, w_x - 2\mu(x)w_t, \tag{3}$$

где $w(x,t) = s(z(x),t)$, $\mu(x) = \nu(z(x))/\rho(z(x))$ — коэффициент затухания (кинематическая вязкость), $\sigma(x) = c(z(x))\rho(z(x))$. Функция $\sigma(x)$ называется акустическим импедансом или жесткостью среды, а $k(x) = -0.5\,\sigma'(x)/\sigma(x)$ имеет смысл коэффициента отражения в неоднородной среде. Считаем далее величину $\sigma(0)$ известной, и, не ограничивая общности, полагаем $\sigma(0) = 1$.

Уравнению (3) сопоставим далее эквивалентную каноническую систему в римановых инвариантах (нестационарную систему Дирака). Для этого запишем (3) в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) w = -2k(x)w_x - 2\mu(x)w_t,$$

и введем римановы инварианты $\hat{v}(x,t), \hat{u}(x,t)$:

$$\hat{v} = w_t - w_x, \quad \hat{u} = w_t + w_x.$$

При этом получаем:

$$\begin{aligned} \hat{v}_t + \hat{v}_x + k(x)(\hat{u} - \hat{v}) + \mu(x)(\hat{u} + \hat{v}) = 0,\\ \hat{u}_t - \hat{u}_x + k(x)(\hat{u} - \hat{v}) + \mu(x)(\hat{u} + \hat{v}) = 0. \end{aligned}$$

Совершая последнюю упрощающую замену

$$\hat{v} = v\exp\left(\int\limits_0^x (k(\xi) - \mu(\xi))\,\mathrm{d}\xi\right), \quad \hat{u} = u\exp\left(\int\limits_0^x (k(\xi) + \mu(\xi))\,\mathrm{d}\xi\right),$$

окончательно приходим к следующей гиперболической системе:

$$v_t + v_x + (k(x) + \mu(x))u = 0, \quad u_t - u_x - (k(x) - \mu(x))v = 0. \qquad (4)$$

Примем далее ключевую гипотезу физического характера о том, что $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ функционально связаны, и пусть $\mu = \widetilde{\varphi}(\sigma)$. Такая гипотеза основана на том, что существует естественный аргумент, от которого зависят все рассмотренные выше свойства неоднородной упругой (акустической) среды. В качестве такого аргумента можно принять состав вещества рассматриваемой слоистой среды, которому не составляет труда сопоставить числовое значение.

Поставим теперь смешанную задачу (*прямая задача рассеяния*) для системы (4) при $x, t > 0$ со следующими начальными и краевыми условиями:

$$v(x,0) = u(x,0) = 0,\ x > 0, \quad v(0,t) = v_0(t),\ t \geq 0, \qquad (5)$$

где $v_0(t)$ — источник в граничном условии, и пусть $v_0 \in C^1[0,\infty)$.

Обратная задача рассеяния для (4–5) в T-локальной постановке состоит в определении коэффициентов $k(x)$ и $\mu(x)$, $x \in [0,T]$, системы (4) по рассеянному волновому полю, заданному при $x = 0$, т. е. по следу решения $u(0,t) = u_0(t)$ для $t \in [0,2T]$. Очевидно, что задача определения двух коэффициентов в общем случае не имеет единственного решения. Однако, как хорошо известно, [5–8], один неизвестный коэффициент (при другом известном) в такой постановке определяется однозначно при некоторых условиях на функцию $v_0(t)$ в окрестности нуля, например, $v_0(0) \neq 0$.

Поставленная выше прямая задача рассеяния хорошо изучена и в обобщенной постановке, [5–8], [18–19]. Поскольку цель работы состоит в решении задачи одновременного определения коэффициентов $k(x)$ и $\mu(x)$, а также функции $\widetilde{\varphi}(\sigma)$, то мы используем известные результаты по решению обратной задачи о восстановлении одного коэффициента.

Итак, если источник в граничном условии в (5) представляет собой δ-функцию Дирака, т. е. $v_0(t) = \delta(t)$, то след решения $u_0(0,t) = -f(t)$ непрерывен при непрерывных $k(x)$ и $\mu(x)$. Кроме того, имеет место интегро-функциональное уравнение типа Вольтерра II рода:

$$k(t) - \mu(t) + 2\int_0^t \bar{v}(x, 2t - x)(k(x) + \mu(x))\,\mathrm{d}x = -2f(2t), \quad t \in [0, T], \tag{6}$$

где $\bar{v}(x, t)$ — регулярная, а именно, непрерывная составляющая часть решения прямой задачи, представимого в виде следующего разложения по гладкости:

$$v(x, t) = \delta(t - x) + \bar{v}(x, t).$$

Заметим, что $\bar{v}$ функционально зависит от k и μ в силу системы (4).

При решении многих практических задач сейсморазведки рассматривают так называемое борновское (линеаризованное) приближение, т. е. решение задачи рассеяния с учетом лишь однократных отражений, а именно, приближенное решение уравнения (6) вида

$$k(x) - \mu(x) = -2f(2x), \quad x \in [0, T], \tag{7}$$

соответствующее малым значениям $k(x)$ и μ (в сейсморазведке, как правило, $|k| < 0.1$ и $\mu \ll 0.1$).

Покажем, что последнее уравнение является уравнением типа (1). Действительно, полагаем:

$$k(x) = -y'(x), \quad y(x) \equiv \ln\sqrt{\sigma(x)},$$
$$\mu(x) = \widetilde{\varphi}(\exp(2y(x))) \equiv \varphi(y(x)).$$

С учетом этих выражений, получаем:

$$y'(x) + \varphi(y(x)) = 2f(2x).$$

В следующем разделе будет доказано, что рассматривая это уравнение в классе функций $y(x)$ с ограниченной вариацией, мы можем определить функции $\sigma(x)$ и $\mu(x)$, а также $\widetilde{\varphi}(\sigma)$ по данным рассеяния в рамках борновского приближения единственным образом.

Более того, поскольку в [15–16] показано, что равенство (7) справедливо (в смысле теории обобщенных функций) и в случае кусочно-непрерывной функции $\sigma(x)$, имеющей конечное число точек разрыва первого рода на $[0, T]$, то уравнение (1) может содержать и сингулярные слагаемые, содержащие дельта-функции, соответствующие скачкам функции $y(x)$. Поскольку такие слагаемые отделяются по гладкости, то их наличие не влияет на общность рассмотрения.

2. Единственность обобщенного решения

Рассмотрим уравнение (1) в классе функций $y(x)$ с ограниченной вариацией и таких, что их классическая производная $y'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ равна нулю почти всюду на $[0, a]$. Допускаем, что $y(x)$ может иметь внутри $[0, a]$ конечное число точек разрыва первого рода, вообще говоря, не известных. Остальные точки $[0, a]$ являются, таким образом, точками непрерывности, а сама функция $y(x)$ постоянна почти всюду на $[0, a]$. Считаем также, что $y(x)$ и $f(x)$ непрерывно продолжены с отрезка $[0, a]$ на всю прямую $(-\infty, \infty)$ постоянными, и известно значение $y(0) = b$.

Согласно теории функций действительной переменной функция $y(x)$ представима в виде:

$$y(x) = H(x) + \bar{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} H_j \theta(x - x_j) + \bar{y}(x), \quad 0 < x_j < a, \tag{8}$$

где $\theta(x - x_j)$ — функция единичного скачка в точке x_j (функция Хевисайда), а $\bar{y}(x)$ — непрерывная функция, для которой почти всюду на $(-\infty, \infty)$ справедливо равенство:

$$\bar{y}'(x) = 0 \ \text{ п. в. на } (-\infty, \infty).$$

Такие непрерывные и постоянные почти всюду функции в теории функций действительной переменной называются *сингулярными*, [9]. Типичным примером такой функции является канторова лестница.

В работе используется понятие обобщенной производной (в смысле распределений), [10]–[12]. В этом случае $y(x)$ понимаем как элемент функционального пространства $L_{loc}(-\infty, \infty)$ функций, локально интегрируемых по Лебегу. При этом $y(x)$ однозначно определяет обобщенную функцию y — линейный непрерывный функционал (y, ψ) на пространстве $\mathcal{D}$ основных функций $\psi(x) \in C^{\infty}(-\infty, \infty)$ с компактным носителем. Пространство обобщенных функций на $\mathcal{D}$ обозначим через $\mathcal{D}'$. В дальнейшем каждой функции $y(x)$ действительной переменной из указанного класса будем сопоставлять обобщенную функцию y, определенную равенством $(y, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$. Обобщенные функции, определенные таким образом, в теории обобщенных функций называются *регулярными*, [9], [11].

Поскольку обобщенная функция y имеет производную, также являющуюся обобщенной функцией, то, в соответствии с определением производной y' обобщенной функции y, имеем:

$$(y', \psi) = -(y, \psi') = -\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\psi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Как известно, в обобщенном смысле $\theta'(x - x_j) = \delta(x - x_j)$, где $\delta(x - x_j)$ — дельта-функция Дирака, сингулярная обобщенная функция, сосредоточенная в точке x_j. Поэтому из (8) непосредственно получаем:

$$y' = H' + \bar{y}', \quad H' = \sum_{j=1}^{n} H_j \delta(x - x_j).$$

Сопоставим (1) следующее дифференциальное уравнение в терминах обобщенных функций:

$$y' + \varphi[y] = f, \tag{9}$$

где под $\varphi[y]$ понимается регулярная обобщенная функция, определенная следующим образом. Поскольку $y(x) \in L_{loc}(-\infty, \infty)$, а $\varphi(y) \in C(-\infty, \infty)$, то на $\mathcal{D}$ определен функционал

$$(\varphi[y], \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y(x))\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Очевидно, что он линеен, непрерывен и, по определению, является регулярной обобщенной функцией.

Функции $f(x)$ из (1) поставим в соответствие обобщенную функцию $f \in \mathcal{D}'$, причем обобщенная функция f в области $\mathbb{R}_- = \{x \mid x < 0\}$ равна постоянной $f(0)$, [9], [11].

Начальному условию $y(0) = b$ в задаче Коши для (1) следует поставить в соответствие равенство обобщенной функции y постоянной b в области $\mathbb{R}_-$. Примем также соглашение в виде равенства $y' = 0$ в $\mathbb{R}_-$, что влечет следующее равенство: $\varphi[y] = \mathrm{const} = \varphi(b)$ в $\mathbb{R}_-$.

Следующая лемма устанавливает некоторые свойства обобщенной задачи для (9) с условием $\varphi[y] = f$ в области $\mathbb{R}_-$. Положим в функциональном слагаемом в уравнении (9) $y = y_0$, где $y_0 \in \mathcal{D}'$ — фиксированная функция, и рассмотрим следующую задачу в обобщенных функциях:

$$y' + \varphi[y_0] = f, \quad \varphi[y_0] = \varphi(b) = f \text{ в } \mathbb{R}_-. \tag{10}$$

Лемма. *Обобщенная задача* (10) *имеет в* $\mathcal{D}'$ *единственное решение для любой* $f \in \mathcal{D}'$, *причем* $y = \mathrm{const} = b$ *в* $\mathbb{R}_-$.

Доказательство. Положим $g = f - \varphi[y_0]$. Тогда для уравнения $y' = g$ при любой $\psi \in \mathcal{D}$ имеем:

$$(y', \psi) = (g, \psi) = -(y, \psi'). \tag{11}$$

Правая часть этого равенства определяет линейный непрерывный функционал на подпространстве $\mathcal{D}_0$ тех основных функций из $\mathcal{D}$, каждая из которых представляет собой производную какой-либо основной функции. Положим далее $\psi_0(x) = -\psi'(x)$. Нетрудно убедиться, что основная функция $\psi(x)$ принадлежит $\mathcal{D}_0$ тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, т. е. $\mathcal{D}_0$ — ядро функционала $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x$, и, тем самым, подпространство $\mathcal{D}_0$ имеет коразмерность 1.

Очевидно, что любую основную функцию из $\mathcal{D}$ можно представить в виде

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \alpha\psi_1(x), \quad \psi_0 \in \mathcal{D}_0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

где $\psi_1(x)$ — фиксированная основная функция, не принадлежащая $\mathcal{D}_0$. Для этого достаточно положить:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \psi_0(x) = \psi(x) - \alpha\psi_1(x).$$

Равенство (11) определяет значение функционала y на любой основной функции $\psi_0 \in \mathcal{D}_0$:

$$(y, \psi_0) = -(g, \int\limits_{-\infty}^{x} \psi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi).$$

Поскольку любая основная функция $\psi \in \mathcal{D}$ представима в виде $\psi = \psi_0 + \alpha\psi_1$, то положив $(y, \psi_1) = 0$, мы доопределяем функционал y на всем $\mathcal{D}$ следующим образом:

$$(y, \psi) = (y, \psi_0) = -(g, \int\limits_{-\infty}^{x} \psi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi).$$

Очевидно, что этот функционал линеен и непрерывен. Кроме того, он удовлетворяет условиям (10), так как для основной функции $\psi \in \mathcal{D}$ справедливы равенства:

$$(y', \psi) = -(y, \psi') = (g, \int\limits_{-\infty}^{x} \psi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi) = (g, \psi),$$

и, поскольку $g = f - \varphi[y_0] = 0$ в $\mathbb{R}_-$, имеем:

$$(y', \psi)_{\mathbb{R}_-} = -(y, \psi')_{\mathbb{R}_-} = (g, \int\limits_{-\infty}^{x} \psi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi)_{\mathbb{R}_-} = 0,$$

где $(y,\psi)_{\mathbb{R}_-}$ — функционал, рассматриваемый на пространстве основных функций из $\mathcal{D}$ с носителем в $\mathbb{R}_-$. $\square$

Наряду с (9) рассмотрим уравнение для первообразных $y, \Phi[y], F$ обобщенных функций $y', \varphi[y], f$, соответственно. Поскольку эти первообразные определены с точностью до постоянной, выберем такие из них, что $\Phi[y] = F = \mathrm{const} = 0$ в области $\mathbb{R}_-$, и, следовательно, $y = \mathrm{const} = b$ в $\mathbb{R}_-$. В соответствии с представлением (8) имеем

$$H + \bar{y} + \Phi[H + \bar{y}] = F,$$

причем обобщенная функция $\Phi[H + \bar{y}]$ является регулярной. Это утверждение вытекает из следующего рассмотрения.

По определению $\Phi'[y] = \varphi[y]$. Это означает, что

$$(\Phi'[y], \psi) = -(\Phi[y], \psi') = (\varphi[y], \psi)$$

для любой основной функции ψ из $\mathcal{D}$. Последнее равенство определяет значение функционала $\Phi[y]$ на всех основных функциях $\psi_0 \in \mathcal{D}_0$.

Доопределим теперь $\Phi[y]$ на все $\mathcal{D}$. Используем представление произвольного элемента $\psi \in \mathcal{D}$ в виде $\psi = \psi_0 + \alpha\psi_1$. Положив $(\Phi[y], \psi_1) = c$, мы, таким образом, доопределим функционал $\Phi[y]$ на всем $\mathcal{D}$:

$$(\Phi[y], \psi) = (\Phi[y], \psi_0) + \alpha(\Phi[y], \psi_1) = -(\varphi[y], \int\limits_{-\infty}^{x} \psi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi) + c(1, \psi). \quad (12)$$

Очевидно, что при этом он является регулярным в силу непрерывности функции $\varphi(y)$.

Поскольку представление обобщенной функции в виде суммы сингулярного и регулярного слагаемых по определению однозначно (с точностью до const), то из (8) следует, что обобщенная функция H однозначно определяется как первообразная H' при условии $H = 0$ в области $\mathbb{R}_-$. Считая далее H известной функцией, мы можем перейти к уравнению вида

$$\bar{y} + \Phi[H + \bar{y}] = F - H = \bar{F}, \quad (13)$$

где $\bar{y}, \Phi[H+\bar{y}], \bar{F}$ — регулярные обобщенные функции. Уравнению (13) однозначно соответствует следующее дифференциальное уравнение в обобщенных функциях:

$$\bar{y}' + \varphi[H + \bar{y}] = \bar{f}, \quad (14)$$

где $\bar{f} = \bar{F}'$. Исключение из (8) δ-слагаемых позволяет провести дальнейшее исследование уравнения (13) в рамках теории функции действительного переменного.

Теорема (единственности). *Обобщенное дифференциальное уравнение* (8) *с условием* $\bar{y} = \mathrm{const} = b$ *в области* $\mathbb{R}_-$ *имеет единственное решение, однозначно определяющее функцию* $\varphi(y)$ *на области значений функции* $y(x) = H(x) + \bar{y}(x)$ *при* $x \in [0, a]$.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы от противного, допустив существование двух различных обобщенных решений $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. В силу эквивалентности (13) и (14) для разности $\bar{y} = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$ имеем:

$$\bar{y} = \Phi_2[y_2] - \Phi_1[y_1] = \Phi_2[H + \bar{y}_2] - \Phi_1[H + \bar{y}_1].$$

Это означает, что для локально интегрируемой функции $\bar{y}(x)$ и любой $\psi \in \mathcal{D}$ справедливо равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{y}(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\Phi_2(y_2(x)) - \Phi_1(y_1(x)))\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Воспользуемся представлением (12) для записи последнего равенства, при этом для любой основной функции $\psi(x)$ из $\mathcal{D}$ находим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{y}(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1(y_1(x)) - \varphi_2(y_2(x))) \int\limits_{-\infty}^{x} \psi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x + c,$$

причем из условия теоремы следует, что $\bar{y}(0) = 0$, $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$, и, таким образом, $c = 0$.

Интегрируя последнее равенство по частям, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{y}(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{x} (\varphi_2(y_2(\xi)) - \varphi_1(y_1(\xi)))\,\mathrm{d}\xi\,\psi_0(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Поскольку в представлении основной функции $\psi = \psi_0 + \psi_1$ выбор ψ_1 при условии $(1, \psi_1) = 1$ произволен, то выберем ψ_1 так, что $\operatorname{supp}\psi_1 \subset \mathbb{R}_-$. При этом равенство (15) становится справедливым на всем $\mathcal{D}$, откуда вытекает, что

$$\bar{y}(x) = \int\limits_{0}^{x} (\varphi_2(H(\xi) + \bar{y}_2(\xi)) - \varphi_1(H(\xi) + \bar{y}_1(\xi)))\,\mathrm{d}\xi$$

почти всюду на $(-\infty, \infty)$. Но поскольку $\bar{y}(x)$ является постоянной почти всюду на $[0, a]$ сингулярной непрерывной функцией, а в правой части равенства стоит абсолютно непрерывная функция действительной переменной, то $\bar{y}(x) = \mathrm{const} = 0$, т. е. $\bar{y}_1(x) = \bar{y}_2(x) = \bar{y}(x)$.

Далее, поскольку $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$, то справедливы равенства:

$$\int\limits_0^x \varphi_1(H(\xi) + \bar{y}(\xi))\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^x \varphi_2(H(\xi) + \bar{y}(\xi))\,\mathrm{d}\xi = \bar{F}(x) - \bar{y}(x) \equiv \Phi(x),$$

где функция $\Phi(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0, a]$, и, тем самым, дифференцируема в классическом смысле. Дифференцируя последние равенства, находим:

$$\varphi_1(y(x)) = \varphi_2(y(x)) = \Phi'(x).$$

Таким образом, функция $\varphi(y)$ однозначно определяется на области значений функции $y : [0, a] \to E(y)$. $\square$

3. Алгоритм численного решения

Для построения численного решения используем метод конечных разностей на равномерной сетке $\{x_i = ih\}_{i=0}^N$ с шагом h таким, что $hN = a$. Введем сеточные функции $y = \{y_i\}_{i=0}^N$, $f = \{f_i\}_{i=0}^N$, $\mu = \{\mu_i\}_{i=0}^N$, $\varphi(y) = \{\varphi(y_i)\}_{i=0}^N$, и определим разностную производную $y' = \{y_i'\} = \{(y_{i+1} - y_i)/h\}_{i=0}^N$, полагая $y_{N+1} = y_N$. Сопоставим (1) разностное уравнение

$$y' + \mu = f, \quad \text{где} \quad \mu = \varphi(y), \tag{16}$$

а сеточная функция f задается с локальной относительной погрешностью r, т. е. известна функция

$$f_\varepsilon = (1 + r)f, \quad r = \{r_i\}_{i=0}^N, \quad |r_i| \le \varepsilon.$$

Требуется по функции f_ε построить приближенное решение y_ε уравнения (16) такое, что

$$\|y_\varepsilon - y\|_{C_h[0,a]} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Введем разностные δ-функцию, сосредоточенную в узле x_j, и соответствующую ей функцию единичного скачка в точке x_j:

$$\delta_h(x_j) = \{\delta_{ij}/h\}_{i=0}^N, \quad \theta_h(x_j) = \{\theta(x_i - x_j)\}_{i=0}^N,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. При этом из (8) непосредственно получаем:

$$y' = \sum_{j=1}^{n} H_j \delta_h(x_j) + \bar{y}'.$$

где сеточная функция $\bar{y}$ соответствует $\bar{y}(x)$ — непрерывной постоянной почти всюду функции. Обозначим модуль непрерывности $\bar{y}(x)$ через $\omega(h)$. Тогда уравнение (16) условно разложимо по малому параметру h следующим образом:

$$\mathcal{O}(h^{-1}) + \mathcal{O}(h^{-1}\omega(h)) + \mathcal{O}(1) = (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))f. \tag{17}$$

Очевидно, что функция f представима таким же разложением.

Алгоритм решения задачи основан на разделении слагаемых функции f по порядку h. Сначала выделяются слагаемые порядка h^{-1}, соответствующие скачкам первого рода функции $y(x)$, затем слагаемые порядка $h^{-1}\omega(h)$, соответствующие непрерывной сингулярной составляющей, в результате чего остается слагаемое порядка единицы. Вычислительно этот процесс реализуется с помощью фильтрации через неравенства для функции f.

Нетрудно видеть, что предложенный алгоритм неустойчив, поскольку f_ε содержит слагаемые порядка εh^{-1} и $\varepsilon h^{-1}\omega(h)$, которые могут превосходить по порядку $\mathcal{O}(1)$. В соответствии с концепцей регуляризации [20–24], следует согласовать параметр метода h и погрешность входных данных ε. С помощью предельных переходов в (17) доказываем, что описанный выше алгоритм обеспечивает сходимость к точному решению при следующих условиях:

$$h(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon/h(\varepsilon) \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Заметим, что указанный выбор параметра метода h носит асимптотический характер, и, следовательно, алгоритм требует определенной «тонкой» априорной настройки при задании фильтра второго уровня порядка $h^{-1}\omega(h)$. Например, чтобы выделить производную канторовой лестницы надо задать фильтр порядка $h^{-1/3}$, поскольку для этой функции, как известно, $\omega(h) = \mathcal{O}(h^{2/3})$.

Перейдем к построению функции $\varphi(y)$ по найденным выше сеточным функциям y и μ. Функция $\varphi(y)$ ищется в параметрической форме

$$\varphi(y, \mathbf{b}) = b_0 + b_1 Y + \cdots + b_m Y^m, \quad Y = 1/(\beta + y), \ \beta > 0,$$

как минимум по $\mathbf{b} = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ функционала невязки

$$\Phi(\mathbf{b}) = \|\varphi(y, \mathbf{b}) - \mu\|^2_{L_{2,h}[0,a]}$$

на компакте. Решение этой задачи не вызывает затруднений, [22–24]. Ограниченность обратного отображения гарантирует погрешность решения порядка $\varepsilon/h(\varepsilon)$.

На рис. 1 представлены графики функций f: исходная (тонкая линия) и рассчитанная по результатам решения задачи (толстая линия) для разреза № 1. Ввиду их близости последний график сдвинут влево и вверх. Подобные графики являются типичными в обработке сейсмической информации и представляют собой сейсмические трассы (сейсмограммы) однократных отражений.

На рис. 2–4 представлены функции $y(x)$, $\mu(x)$ и $\varphi(y)$ для разреза № 1 (для y, μ, φ изображение исходных данных — тонкая линия, результаты решения для y, μ — толстая линия, для φ — штриховая линия, аппроксимированная по точкам).

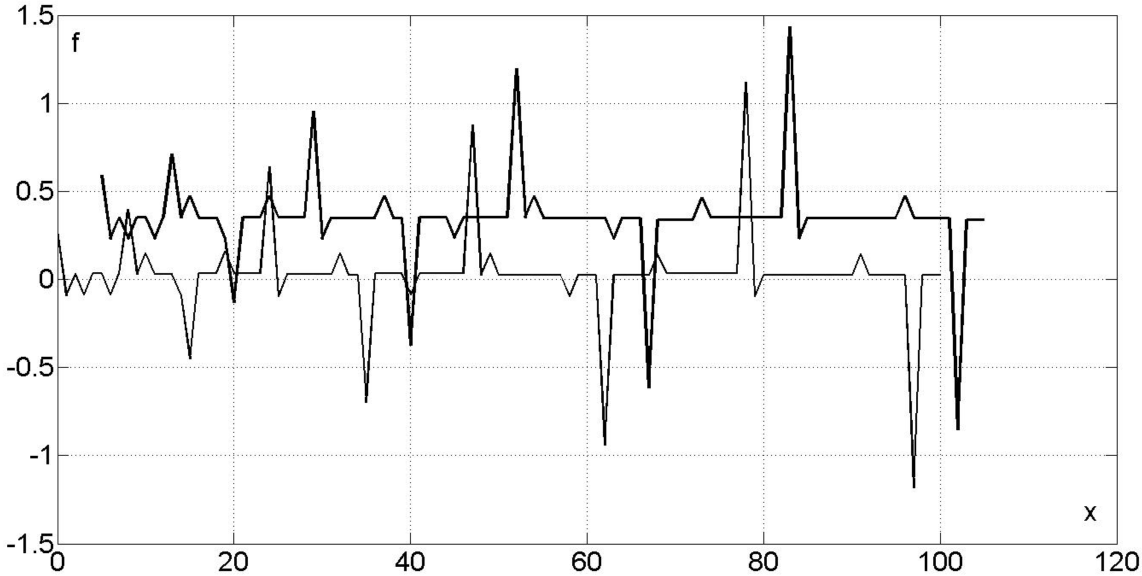

Рис. 1. Сейсмотрассы однократных отражений: входные (тонкие линии) и синтезированные по решению

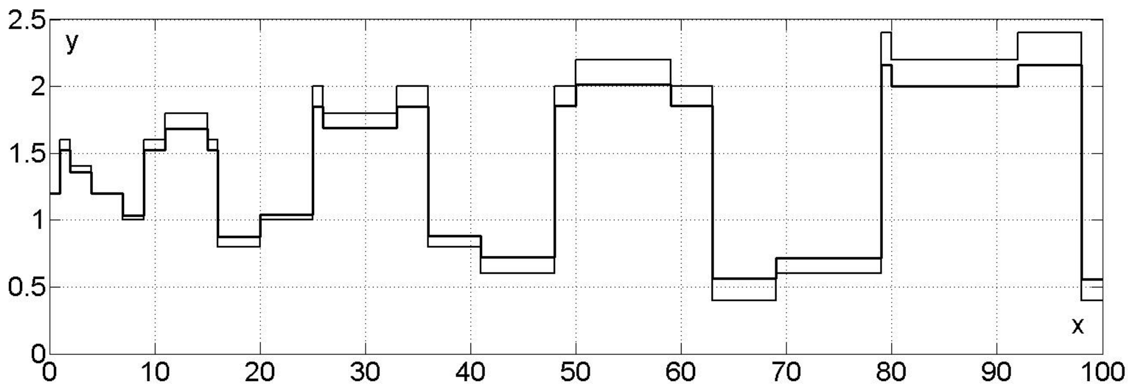

Рис. 2. Разрез № 1 акустических жесткостей $y(x)$

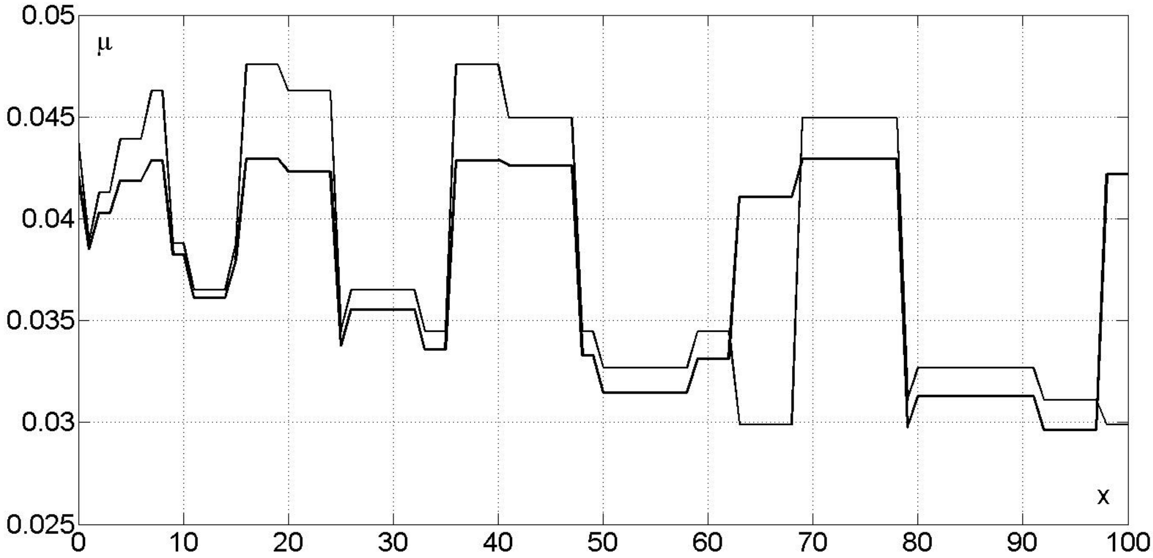

Рис. 3. Разрез №1 коэффициентов поглощения $\mu(x)$

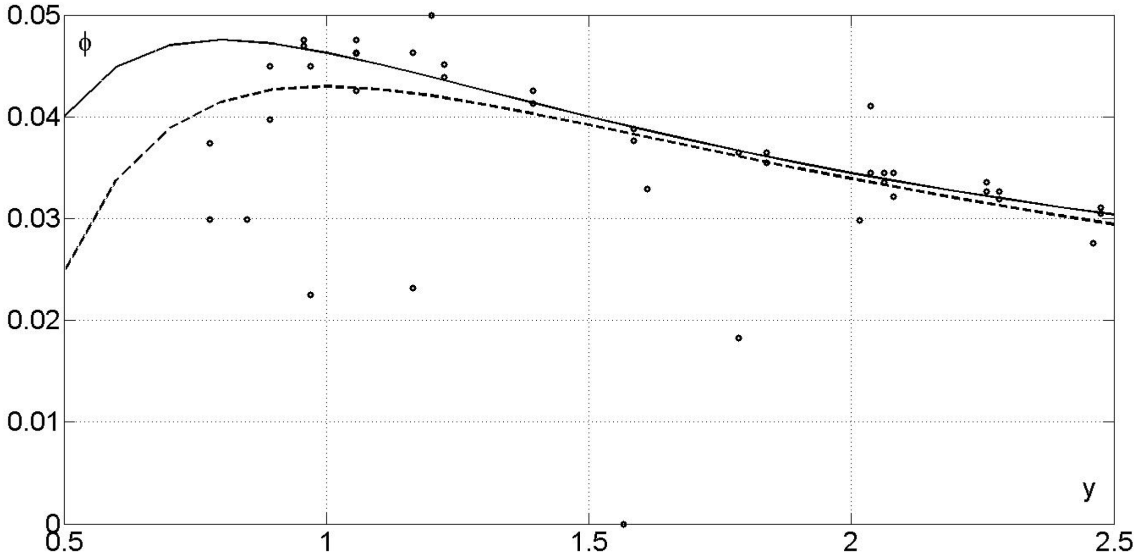

Рис. 4. Зависимость $\varphi(y)$ коэффициента поглощения μ от акустической жесткости y для разреза №1

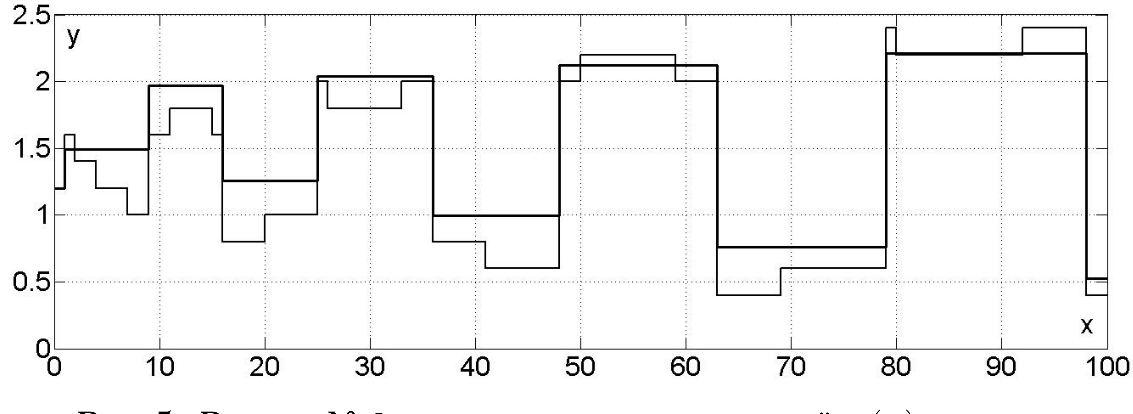

Рис. 5. Разрез №2 акустических жесткостей $y(x)$

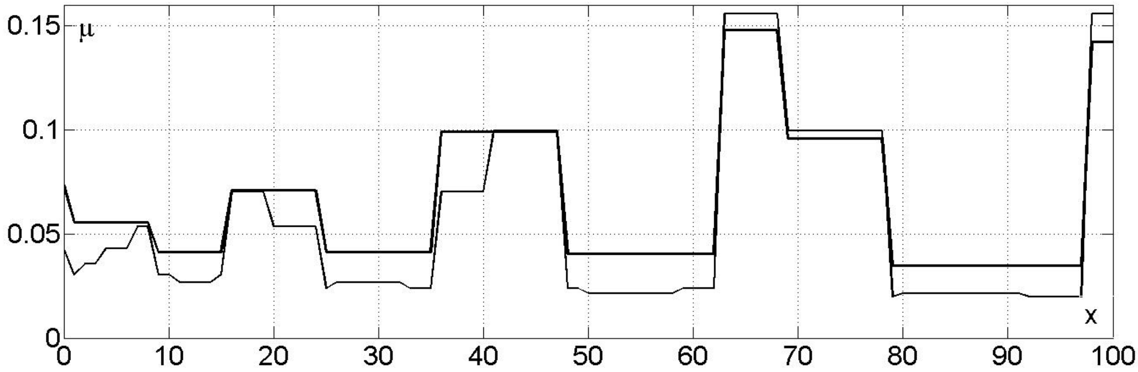

Рис. 6. Разрез №2 коэффициентов поглощения $\mu(x)$

На рис. 5–7 представлены функции $y(x)$, $\mu(x)$ и $\varphi(y)$ для разреза №2 (для y, μ, φ изображение исходных данных — тонкая линия, результаты решения для y, μ — толстая линия, для φ — штриховая линия).

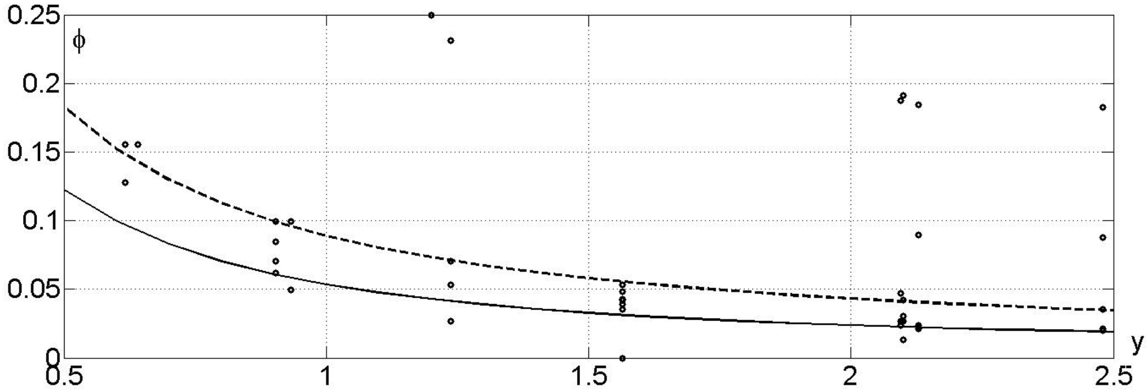

Рис. 7. Зависимость $\varphi(y)$ коэффициента поглощения μ от акустической жесткости y для разреза №2

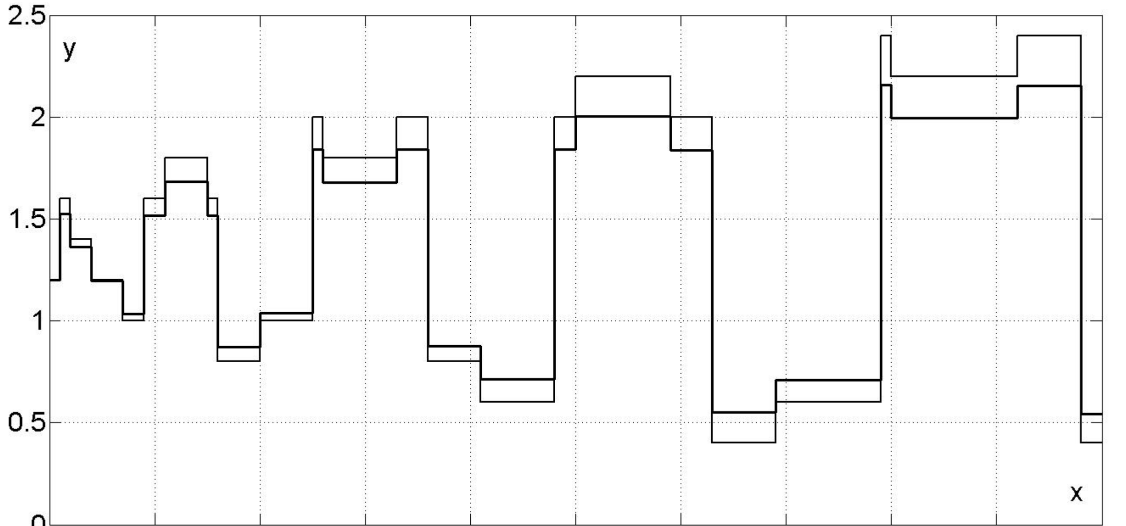

Рис. 8. Разрез №3 акустических жесткостей $y(x)$

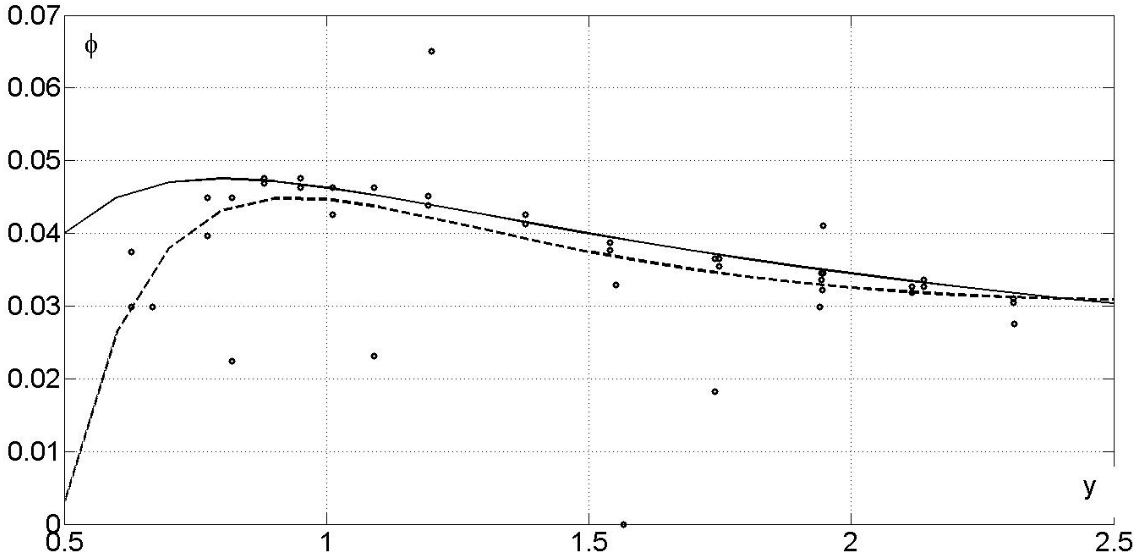

Рис. 9. Зависимость $\varphi(y)$ коэффициента поглощения μ от акустической жесткости y для разреза № 3

Литература

1. *Dmitriev V. I.* Inverse Problems in the Optics of Layered Media. Computational Mathematics and Modeling. 2015. Iss. 26. № 4. P. 546–554.
2. *Dmitriev V. I., Berdichevsky M. N.* A generalized impedance model. Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2002. V. 38. № 10. P. 897–903.
3. *Tikhonravov A. V., Trubetskov M., Gorokh A. et al.* Advantages and challenges of optical coating production with indirect monochromatic monitoring. Applied optics. 2015. V. 54. № 11. P. 3433–3439.
4. *Тихонравов А. В.* Обратные задачи оптики слоистых сред. Вестн. Моск. ун-та. Сер 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 2006. № 3. С. 66–76.
5. *Baev A. V.* On local solvability of inverse dissipative scattering problems. J. Inverse Ill-Posed Problems. 2001. V. 9. № 4. P. 227–247.
6. *Baev A. V., Kutsenko N. V.* Solving the Inverse Generalized Problem of Vertical Seismic Profiling. Computational Mathematics and Modeling. 2004. Iss. 15. № 1. P. 1–18.
7. *Баев А. В., Куценко Н. В.* Решение задачи восстановления коэффициента диссипации вариационным методом. Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2006. Т. 46. № 10. С. 1895–1906.

8. *Baev A. V., Mel'nikov G. Yu.* Inverse dissipative problems in vertical seismic profiling. J. Inverse Ill-Posed Problems. 1999. V. 7. № 3. P. 201–220.

9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

10. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции, вып. 1,2. М.: Физматгиз, 1958.

11. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.

12. *Шварц Л.* Математические методы в физических науках. М.: Мир, 1965.

13. *Молотков Л. А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001.

14. *Баюк И. О.* Теоретические основы определения эффективных свойств коллекторов углеводородов. Ежегодник РАО. Изд-во ГЕОС. 2011. Вып. 12. С. 107–120.

15. *Баев А. В.* О решение обратной задачи рассеяния плоской волны на слоисто-неоднородной среде. Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 2. С. 328–333.

16. *Баев А. В.* О решении обратной краевой задачи для волнового уравнения с разрывным коэффициентом. Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1988. Т. 28. № 11. С. 1619–1633.

17. *Баев А. В.* О локальной разрешимости обратных задач рассеяния для уравнения Клейна-Гордона и системы Дирака. Матем. заметки. 2014. Т. 96. Вып. 2. С. 306–309.

18. *Благовещенский А. С.* О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. Сб.: Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова, CXV. Л.: Наука, 1971. С. 28–38.

19. *Белишев М. И., Благовещенский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1999.

20. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.

21. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.

22. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.

23. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М: Наука, 1990.

24. *Гончарский А. В., Степанов В. В.* Алгоритмы приближенного решения некорректных задач на компактных множествах. Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 6. С. 1296–1299.

25. *Dmitriev V. I., Ingtem J. G.* Numerical differentiation using spline functions. Computational Mathematics and Modeling. 2012. V. 23. № 3. P. 312–318.

26. *Dmitriev V. I., Dmitrieva I. V., Ingtem J. G.* Integral form of the spline function in approximation problems. Computational Mathematics and Modeling. 2013. V. 24. № 4. P. 488–497.