

А. В. Баев¹

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В n -МЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ И ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^{n*}$

1. Введение

Попыткам доказать существование и единственность решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости посвящено множество работ. Подавляющее большинство этих работ использует уравнение Навье-Стокса в эйлеровых координатах, [1], в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и рассматривает вопросы существования и единственности обобщенных решений (в различном понимании) в пространствах типа L^p , H^s , а также в шкалах пространств, [2–6]. Более подробную библиографию можно найти в развернутом обзоре [7]. К настоящему времени установлена корректность обобщенных решений уравнения Навье-Стокса в малом и целом для начальных условий различной гладкости и поведения на бесконечности. Значительный интерес представляют также вопросы корректности установившихся решений, что связано с физическими приложениями стационарных задач. Здесь получены более сильные результаты, особенно для обобщенных решений на плоскости, что связано с использованием дополнительных технических возможностей, [8–13].

Однако до сих пор остаются открытыми вопросы существования и единственности классического решения уравнения Навье-Стокса в $\mathbb{R}^n$ и T^n , а также в ограниченной области с гладкой границей. Более того, до настоящего времени остается открытым вопрос: есть ли предельное конечное время существования классического решения для произвольного начального условия. Эта ситуация явилась причиной включения уравнения Навье-Стокса в список важнейших нерешенных математических проблем, [14],[15]. Целью настоящей работы является попытка дать ответ на поставленные вопросы на основе привлечения дополнительных условий, связанных с физической трактовкой уравнений Навье-Стокса и постановкой краевых условий.

Оказалось, что использование лагранжевых координат как более физических приводит к доказательству теорем существования и

¹e-mail: drbaev@mail.ru.

*Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

единственности, а также решению ряда прикладных задач. Более ранние исследования уравнения Навье-Стокса не использовали одного дополнительного условия, относящегося к постановке задачи. Это условие приводит к доказательству постоянства давления в отсутствие внешних полей, что позволяет исключить его из уравнения. При наличии внешних потенциальных полей давление их просто аннулирует. Строгое доказательство этих утверждений является содержанием Леммы 1 и Следствия 1. С физической точки зрения, такие свойства давления определяются бесконечной скоростью звука в несжимаемой жидкости, а, стало быть, мгновенным установлением давления. Следует подчеркнуть, что все доказанные утверждения относятся к замкнутым ограниченным областям и всему пространству. Результаты работы не затрагивают таких задач, как истечение струи и обтекание негладких тел.

В результате исключения давления из уравнения Навье-Стокса задача о движении жидкости сводится к решению квазилинейного уравнения параболического типа относительно скорости жидкой частицы. Нелинейность определяется зависимостью коэффициента уравнения от координаты частицы. Такая зависимость позволяет доказать существование решения в малом, а затем в целом. Существенную роль в доказательстве играет условие несжимаемости. В итоге оказывается, что решение уравнения Навье-Стокса обладает такими свойствами решений уравнений параболического типа как бесконечная гладкость и принцип максимума.

В работе установлено принципиальное свойство характера движения жидкости. Доказано, что это движение носит чисто вихревой характер, что приводит к появлению собственных состояний. Такие стационарные состояния хорошо известны в экспериментальной физике как, например, волны Тэйлора и турбулентное движение. Показано, что эти состояния являются проявлением математической неединственности, а не неустойчивости, как считалось ранее. В работе также дано правильное решение задач о течении жидкости в замкнутой трубе и точное решение задачи о турбулентном течении.

При рассмотрении математических аспектов проблемы автор опирался на результаты по теории уравнений параболического типа из [9],[16]. Следует отметить, что уравнения Навье-Стокса не были решены во многом потому, что к их решению относились как к чисто математической проблеме. На самом деле, это глубоко физическая модель. В отличие от уравнения теплопроводности, где в результате решения возникает бесконечная скорость распространения температуры, в уравнении Навье-Стокса скорость движения жидкости конечна при бесконечной скорости звука. Последнее обстоятельство объясняет мгновенное установление постоянного давления в отсутствие внешних полей.

1.1. Обозначения и основные уравнения

Модель (геометрия)

$\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство с нормой $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$, $2 \leq n \leq 3$,

$D \subset \mathbb{R}^n$ — открытая ограниченная область с замыканием $\bar{D}$ в $\mathbb{R}^n$,
 $\bar{D}_T = \bar{D} \times [0, T]$,

$S = \partial D$ — граница D класса $C^{2+\alpha}$, ν — единичная внутренняя нормаль к S ,

$\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = T^n$ — n -мерный тор, $\bar{T}^3 = D^2 \times S^1$ — сплошной тор, $\partial \bar{T}^3 = T^2$,

$(a) = (a^i)$ — контравариантные координаты Лагранжа частиц жидкости,

$(x) = (x^i)$ — декартовы координаты Эйлера в пространстве $\mathbb{R}^n$,

$x = x(a, t)$ — гладкая траектория движения точки a в D , t — время,

$J = J(x) = \mathcal{D}(x) / \mathcal{D}(a)$ — матрица преобразования $x : a \rightarrow x$, $\det J \equiv |J|$,

$g = (g^{ik}(x))$ — фундаментальный метрический тензор в контравариантных компонентах, $\det g \equiv |g|$, I — единичный тензор,

grad , $\nabla \equiv \text{grad}$, div , rot , $\Delta = \text{div grad} = \text{grad div} - \text{rot rot}$ — инвариантные дифференциальные операторы в скалярных, векторных и тензорных полях.

Модель (среда)

ε — коэффициент кинематической вязкости,

$v = v(a, t)$ — векторное поле скоростей частиц жидкости,

$p = p(a, t)$ — гидродинамическое давление в жидкости,

$u = u(a, t)$ — потенциал внешнего поля сил $f = -\nabla u$,

$j = j(a, t)$ — внешнее поле соленоидальных сил j , $\text{div } j = 0$,

$C^\alpha(D)$ — класс непрерывных по Гельдеру функций $v(a)$, $a \in D$, с показателем $\alpha \in (0, 1)$, постоянной Гельдера $H_D^\alpha(v)$,

и $\|v\|_{C^\alpha(D)} = \|v\|_{C(D)} + H_D^\alpha(v)$,

$C^{k+\alpha}(D)$ — класс функций $v(a) \in C^k(D)$ таких, что $\partial_a^k v \in C^\alpha(D)$,
 $\|v\|_{C^{k+\alpha}(D)} = \|v\|_{C^\alpha(D)} + \|\partial_a v\|_{C^\alpha(D)} + \dots + \|\partial_a^k v\|_{C^\alpha(D)}$,

$C^{2k+\alpha, k+\alpha}(D_T)$ — класс функций $v(a, t) \in C^{2k, k}(D_T)$ таких, что
 $\partial_a^{2k} v, \partial_t^k v \in C^\alpha(D_T)$, $\|v\|_{C^{2k+\alpha, k+\alpha}(D_T)} = \|v\|_{C^\alpha(D_T)} + \|\partial_a v\|_{C^\alpha(D_T)} + \dots + \|\partial_a^{2k} v\|_{C^\alpha(D_T)} + \|\partial_t^k v\|_{C^\alpha(D_T)}$.

Основные уравнения (справедливы в $\bar{D}$)

уравнение непрерывности (условие несжимаемости жидкости)

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (|J| = |g| = 1), \quad (1)$$

уравнение Навье-Стокса в эйлеровых координатах (x)

$$v_t + (v, \nabla)v = \varepsilon \Delta v - \nabla p - \nabla u + j, \quad v = v(x, t),$$

уравнение Навье-Стокса в лагранжевых переменных (a)

$$v_t = \varepsilon \Delta v - \nabla p - \nabla u + j, \quad v = v(a, t), \quad (2)$$

представление векторного поля v потенциалами φ , ψ (теорема Гельмгольца)

$$v = -\nabla \varphi + \operatorname{rot} \psi, \quad \operatorname{div} \psi = 0. \quad (3)$$

1.2. Постановка задачи в ограниченной области

Начальная задача состоит в нахождении достаточно гладких функций v и p , удовлетворяющих системе (1),(2) в $\bar{D}$ при $t > 0$ и следующим краевыми и начальным условиям

$$v|_S = 0, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad a \in \bar{D}. \quad (5)$$

Функции u и j считаем известными и достаточно гладкими, и пусть

$$j|_S = 0, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$u = 0, \quad j = 0, \quad t = 0, \quad (7)$$

$$u = 0, \quad j = 0, \quad t \geq t_* > 0. \quad (8)$$

Такая постановка дополнительных условий позволяет рассматривать задачу как в поле внешних сил, так и без него. Иными словами, источники создают с нуля до момента $t_* < t_0$ некое начальное состояние и выключаются. Это позволяет выяснить, какие начальные условия v_0 и p_0 при t_0 являются физически реализуемыми, полагая

$$v_0 = v(a, t_0), \quad p_0 = p(a, t_0), \quad a \in \bar{D}. \quad (9)$$

В работе установлено, что такими физически реализуемыми условиями являются

$$\operatorname{div} v_0 = 0, \quad p_0 = \operatorname{const}, \quad (10)$$

$$(v_0, \nabla)v_0 = 0, \quad (11)$$

а также $v_0 \in C^\infty(\bar{D})$, т. е. иных начальных условий за счет внешнего воздействия создать нельзя. Однако также показано, что условие гладкости функции v_0 для существования классического решения с математической точки зрения может быть ослаблено до $v_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$ в том же смысле, как это понимается в начальной задаче для уравнения теплопроводности, см. [9],[16]. Доказать это удастся за счет сведения

системы (1),(2) к квазилинейному параболическому уравнению, если при этом учесть, что условие несжимаемости в форме $|J| = |g| = 1$ выполняется $\forall t > 0$.

В то же время условия $p_0 = \text{const}$, $(v_0, \nabla)v_0 = 0$ являются необходимыми для разрешимости начальной задачи (1),(2),(4),(6), (8),(9). С физической точки зрения равенство $p_0 = \text{const}$ отражает очевидный факт бесконечной скорости звука в несжимаемой среде. Равенство (11) есть условие согласования начальных данных (10).

2. Решение задач для давления и скорости

2.1. Задача для давления

Остановимся вначале на дополнительном граничном условии $\partial^2 v_v / \partial v^2|_S = 0$, являющемся ключевым в работе при постановке краевых задач для давления. Как хорошо известно, [1], вязкие силы возникают за счет трения лишь при движении жидкости. Частицы жидкости, расположенные непосредственно у стенки, находятся в состоянии покоя (но не в результате прилипания, хотя нередко используется термин условия прилипания) и, стало быть, вязких сил в направлении нормали не испытывают.

Это означает, что в направлении нормали сумма потенциальных сил (включая давление) также равна нулю. Поскольку суммарный потенциал этих сил (с учетом условия несжимаемости) удовлетворяет уравнению Лапласа, то он, как решение соответствующей задачи Неймана, есть величина постоянная. Строгое доказательство этого утверждения является содержанием Леммы 1 и Следствия 1.

Поскольку операторы $\text{div} = 1/\sqrt{|g|} \sum_{i=1}^n \partial/\partial a^i \sqrt{|g|}$ и $\partial/\partial t$ коммутируют при $|g| = 1$, то из (1),(2) имеем

$$\Delta(p+u) = 0. \quad (12)$$

Пусть $v_v = (v, v)|_S$ есть нормальная компонента скорости v на S . Очевидно, что $v_v|_S = 0$. Справедлива лемма, ключевая для всего дальнейшего рассмотрения.

Лемма 1. *При любом $t \geq 0$ и $n \geq 2$ решение задачи (1),(2),(4),(5) удовлетворяет граничным условиям*

$$\frac{\partial^2 v_v}{\partial v^2}|_S = 0, \quad \frac{\partial(p+u)}{\partial v}|_S = 0.$$

Доказательство. Представим вектор v в некоторой окрестности фиксированной точки на S в виде $v = v_v v + v_\tau \tau$, где v_τ — компонента скорости вдоль касательного к S направления τ . Поскольку $\partial^2 v_v / \partial \tau^2|_S = 0 \forall \tau \perp v$, то из (2) имеем

$$\frac{\partial v_v}{\partial t}|_S = \varepsilon \frac{\partial^2 v_v}{\partial v^2}|_S - \frac{\partial(p+u)}{\partial v}|_S. \quad (13)$$

Но $\partial^2 v_v / \partial v^2|_S$ определяет величину вязких сил, действующих на неподвижную частицу, находящуюся у стенки, [1], и, следовательно, исходя из физики процесса и равенства (13), получаем

$$\frac{\partial^2 v_v}{\partial v^2} \Big|_S = 0 \iff \frac{\partial(p+u)}{\partial v} \Big|_S = 0. \quad (14)$$

Подчеркнем, что математически условие (14) получить невозможно, и оно принимается на основе физических рассуждений как дополнительное краевое условие.

Замечание 1. Условие (14) полностью согласуется с уравнением (1). Действительно, пусть $\tau_i \perp v$, $\tau_i \perp \tau_j$, $i \neq j$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial v_v}{\partial v} + \sum_{1 \leq i \leq n-1} \frac{\partial v_{\tau_i}}{\partial \tau_i} \right) \Big|_S = \frac{\partial^2 v_v}{\partial v^2} \Big|_S + \sum_{1 \leq i \leq n-1} \frac{\partial}{\partial \tau_i} \frac{\partial v_{\tau_i}}{\partial v} \Big|_S = 0.$$

В силу закона вязкого трения Ньютона $\partial v_{\tau_i} / \partial v|_S$ есть напряжение вязких сил вдоль направления τ_i на S , откуда следует, что последняя сумма равна нулю.

Таким образом, все производные первого и второго порядка функции v_v на S равны нулю. Более того, любая частная производная функции v_v на S равна нулю, и, тем самым, v_v имеет на S ноль бесконечного порядка.

Из условия (14) вытекают важные следствия.

Следствие 1. Пусть $n \geq 2$. Тогда $\forall t \geq 0$ справедливо равенство

$$p + u = \text{const}. \quad (15)$$

Доказательство. Из (13),(14) при $t \geq 0$ получаем задачу Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta(p+u) = 0, \quad \frac{\partial(p+u)}{\partial v} \Big|_S = 0 \implies p+u = \Phi(t).$$

Функция Φ является произвольной функцией времени, далее полагаем $\Phi = \text{const}$. Таким образом, давление устанавливается в (15) в соответствии с потенциалом внешних сил. Очевидно, что при $u = 0$ без ограничения общности можно полагать $p = 0$.

Физическим подтверждением постоянства давления при $u = 0$ является тот факт, что в несжимаемой жидкости скорость звука бесконечна, что влечет мгновенное установление барического равновесия. Казалось бы, такой вывод противоречит известным решениям стационарных задач, в частности, о течении жидкости в трубе. Правильное решение задачи о стационарном течении жидкости в трубе приводится в п.3.4. Это решение еще раз подтверждает известный факт, отмеченный в [1], что скорость стационарного течения жидкости не зависит от давления.

Следствие 2. Пусть решение задачи (1),(2),(4)–(8) существует. Тогда $\forall t \geq 0$ справедливо равенство $(v, \nabla)v = 0$.

Доказательство. Из равенства $\Delta(p + u) = 0$ следует выполнение равенства $\operatorname{div}(v, \nabla)v = 0$ в эйлеровых координатах (x) . Так как $v(a, t) = v(x, t)$ в точке $x = x(a, t)$, то

$$(v, \nabla)v = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{v(x + \delta v, t) - v(x, t)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{v(a + \delta v, t) - v(a, t)}{\delta} = (v, \nabla)v.$$

Поскольку производная по направлению и дивергенция инвариантны относительно выбора системы координат, то $\operatorname{div}(v, \nabla)v = 0$.

Покажем, что $\operatorname{rot}(v, \nabla)v = 0$. В силу известных формул векторного анализа имеем

$$\operatorname{rot}(v, \nabla)v = -[\nabla, [v, \operatorname{rot} v]] = (\nabla, v) \operatorname{rot} v - (\nabla, \operatorname{rot} v) v = 0.$$

Поскольку дивергенция и ротор вектора равны нулю, то $(v, \nabla)v = (\nabla, v)v = 0$.

Далее в работе всюду полагаем выполнения условий (10),(11).

2.2. Задачи для скорости

Предположим вначале, что решение задачи (1),(2),(4)–(8) существует. Положим $v = c + \omega$ и будем искать v в представлении (3), где

$$c = -\nabla \phi, \quad \omega = \operatorname{rot} \psi, \quad \operatorname{div} \psi = 0, \quad c|_S = \omega|_S = 0.$$

Из (1),(3),(12) получаем задачу для потенциала ϕ :

$$\Delta \phi = 0, \quad \nabla \phi|_S = 0, \quad t \geq 0, \quad (16)$$

откуда находим, что в $\bar{D}$

$$\phi = \Phi(t) \implies c = 0, \quad t \geq 0. \quad (17)$$

Для вихревой части скорости имеем

$$\omega_t = \varepsilon \Delta \omega + j, \quad \operatorname{div} \omega = 0, \quad \omega|_S = 0, \quad t \geq 0, \quad (18)$$

где векторный потенциал ψ является решением задачи

$$\Delta \psi = -\operatorname{rot} v, \quad \psi|_S = 0.$$

Из (16)–(18) следует, что движение жидкости в ограниченном объеме представляет собой чистый вихрь.

Если метрический тензор $g = g(x)$ известен в точке $x = x(a, t)$, то задачу для уравнения (2) можно считать линейной и имеющей единственное классическое решение, поскольку

$$\Delta = \Delta(x) \equiv \frac{\partial}{\partial a^i} g^{ik}(x(a, t)) \frac{\partial}{\partial a^k},$$

где учтено условие несжимаемости в форме $|g| = 1$. На самом деле тензор g не известен, и задача при $t \geq 0$ сводится к начально-краевой задаче для квазилинейной системы параболического типа

$$\begin{aligned} v_t = \varepsilon \Delta(x)v - \nabla p - \nabla u + j, \quad v|_S = 0, \quad v(a, 0) = 0, \\ x_t = v, \quad x|_S = a, \quad x(a, 0) = a. \end{aligned} \quad (19)$$

Если же рассматриваются $t \geq t_0$, то задача приобретает вид

$$\begin{aligned} v_t &= \varepsilon \Delta(x)v - \nabla p, \quad v|_S = 0, \quad v(a, t_0) = v_0(a), \\ x_t &= v, \quad x|_S = a, \quad x(a, t_0) = a, \end{aligned} \quad (20)$$

где граничные и начальные условия согласованы.

Нетрудно видеть, что существование решения задач (19),(20) полностью определяется изменением тензора g вдоль траекторий x . При этом проблема разрешимости целиком переходит в область существования решений квазилинейных уравнений параболического типа, правда, с принципиальным условием $|g| = 1$.

Может возникнуть ощущение, что перейдя к описанию движения жидкости в переменных Лагранжа и избавившись, таким образом, от нелинейного слагаемого $(v, \nabla)v$ в субстанциональной производной dv/dt , мы существенно линеаризовали задачу. Разумеется, это не так.

Если в исходной задаче нелинейность, а точнее, квазилинейность, была квадратичной, то в лагранжевых координатах она переместилась в метрический тензор $g(x)$, где x , в свою очередь, функционально зависит от g через (19),(20). Тем самым, нелинейность исходной задачи сохранилась, однако при этом удалось использовать условие несжимаемости $|g| = 1$. Как выясняется в Теоремах 1,2, это обстоятельство является весьма важным при доказательстве существования решения.

2.3. Существование решения

Положим $\bar{D}_t = \bar{D} \times [t_0, t]$, и пусть $v(t) = v$ как элемент функционального пространства $L_2(\bar{D})$ либо $C^{2+\alpha}(\bar{D})$. Пусть для v_0 выполнено условие (11). Справедлива следующая теорема существования и единственности начальной задачи (20).

Теорема 1. *Задача (20) $\forall v_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$ имеет единственное классическое решение $v, x \in C^\infty(\bar{D} \times (t_0, \infty))$, $p = 0$. При этом $\forall t \geq t_0$ справедлива оценка $\|v\|_{C(\bar{D})} \leq \|v_0\|_{C(\bar{D})}$ и тождество $\|v(t)\|_{L_2(\bar{D})}^2 = \|v_0\|_{L_2(\bar{D})}^2 - 2\varepsilon \|\nabla v\|_{L_2(\bar{D}_t)}^2$.*

Доказательство. Разобьем доказательство на два этапа, а именно, доказательство теоремы в малом по t и затем доказательство в целом.

Докажем, что $\forall v_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$ найдется такое число $\delta > 0$, что в области $\bar{D}_\delta = \bar{D} \times [t_0, t_\delta]$, $t_\delta = t_0 + \delta$, существует классическое решение задачи (20). Пусть далее $\|v_0\|_{C(\bar{D})} \leq M$. Представим задачу (20) в виде

$$v_t = \varepsilon \Delta(a)v + \varepsilon (\Delta(x) - \Delta(a))v \quad v|_S = 0, \quad v(a, t_0) = v_0(a), \quad (21.1)$$

$$x_t = v, \quad x|_S = a, \quad x(a, t_0) = a. \quad (21.2)$$

Вычислим $\Delta(x) - \Delta(a)$. Вспомним, что

$$g(x) = J^T(x)J(x),$$

где J^T — транспонированная к J матрица Якоби. Получим для $\xi = x - a$

$$g(a + \xi) - g(a) = J^T(a + \xi)J(a + \xi) - J^T(a)J(a) = P(\xi, a).$$

Форма $P(\xi, a)$ определяется исключительно начальными данными задачи (20).

Таким образом, задача (21.1) принимает вид

$$\begin{aligned} v_t &= \varepsilon \Delta(x)v = \varepsilon \sum_{i=k} \frac{\partial}{\partial a^i} \frac{\partial v}{\partial a^k} + \varepsilon \sum_{i,k} \left[\frac{\partial}{\partial a^i} P(x - a, a) \right] \frac{\partial v}{\partial a^k}, \\ v|_S &= 0, \quad v(a, t_0) = v_0(a). \end{aligned}$$

При заданной функции $x(a, t)$ эта задача имеет единственное классическое решение, и выполняется принцип максимума.

Рассмотрим для задачи (21) в области $\bar{D}_\delta$ итерационный процесс для $m = 1, 2, \dots$

$$x_t^m = v^{m-1}, \quad x^m|_S = a, \quad x^m(a, t_0) = a, \quad v^0(a) = v_0(a), \quad (22.1)$$

$$v_t^m = \varepsilon \Delta(x^m)v^m, \quad v^m|_S = 0, \quad v^m(a, t_0) = v_0(a). \quad (22.2)$$

Нетрудно видеть, что $\forall m \in \mathbb{N} \ \& \ \forall \delta > 0$ задача (22.2) имеет единственное решение $v^m \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)$, и на множестве $X = \{x^m \mid \|x^m - a\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)} \leq M_0\}$ справедлива равномерная оценка

$$\|v^m\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)} \leq M_1(M_0)\|v_0\|_{C(\bar{D})} \leq M_2.$$

При этом из (22.1) следует неравенство

$$\|x^m - a\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)} \leq M_2\delta.$$

Очевидно, что найдется δ_0 такое, что при $\delta < \delta_0$ справедливо

$$\|x^m - a\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)} \leq M_0.$$

Заметим, что δ_0 зависит лишь от M_0 и M_2 .

Каждое решение v^m непрерывно зависит от коэффициентов уравнения (22.2), и $\forall x^m \in X$ справедлива, [9],[16], равномерная по m оценка

$$\|v^{m+1} - v^m\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)} \leq M_3\|x^{m+1} - x^m\|_{C^\alpha(\bar{D}_\delta)},$$

где M_3 зависит лишь от M_0 .

Из первого уравнения системы (22) при $t - t_0 \leq \delta$ следует

$$\|x^{m+1} - x^m\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)} \leq \delta \|v^m - v^{m-1}\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)}.$$

Таким образом, получаем

$$\|v^{m+1} - v^m\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)} \leq q \|v^m - v^{m-1}\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)},$$

где выполнения неравенства $q < 1$ можно добиться при достаточно малом $\delta < \delta_0$. Отсюда следует, что последовательность v^m фундаментальна в $C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)$ и, в силу полноты пространства $C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)$, [16],

$$v^m \xrightarrow{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta)} v \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\delta), \quad m \rightarrow \infty.$$

При этом последовательность $x^m \xrightarrow{C^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{D}_\delta)} x \in C^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{D}_\delta)$ при $m \rightarrow \infty$, и мы вновь приходим к задаче (20) для параболического уравнения с гладкой главной частью. Непосредственной подстановкой функций v^m, x^m в (20) и последующим предельным переходом при $m \rightarrow \infty$ доказываем, что v, x являются решением задачи (20). Бесконечная гладкость решения определяется видом уравнения, т. е. наличием переменных коэффициентов, зависящих лишь от самого решения.

Из сказанного следует, что задача (20) имеет решение $v \in C^\infty(\overline{D}_\delta)$ и $\|v\|_{C(\overline{D}_\delta)} \leq \|v_0\|_{C(\overline{D})}$, [9],[16]. Число δ определяется постоянными M, M_0 и геометрией D . Доказательство теоремы в малом завершено.

Положим $t_1 = t_0 + \delta$ и выберем $b = x_1(a)$, $x_1(a) \equiv x(a, t_1)$, в качестве новых лагранжевых переменных. Поскольку отображение $x_1(a) : a \rightarrow b$ взаимно-однозначно и $x_1 \in C^\infty(\overline{D})$, то задача (20) в новых координатах b для скорости $w(b, t)$ и траектории движения $y(b, t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} w_t &= \varepsilon \Delta(y) w, \quad w|_S = 0, \quad w(b, t_1) = w_1(b) = v(x_1^{-1}(b), t_1), \\ y_t &= w, \quad y|_S = b, \quad y(b, t_1) = x(x_1^{-1}(b), t_1) = b, \end{aligned} \quad (23)$$

где x_1^{-1} есть функция, обратная к x_1 , с такой же гладкостью, что у x_1 , причем $g = J = I$ при $t = t_1$, и $\|w_1\|_{C(\overline{D})} \leq M$ в силу принципа максимума.

Очевидно, что задачи (23) и (20) совпадают с точностью до обозначений. Таким образом, задача (23), как и (20), является стандартной, т. е. не зависит от $t_0, t_1, \dots$, и имеет классическое решение на любом отрезке $[t_k, t_k + \delta]$, $t_k = t_0 + k\delta$, $k = 1, 2, \dots$. Гладкость сшивки при $t = t_k$ обеспечивается выполнением условий (23) с учетом гладкости отображения $x_k(a, t)$. Ясно, что для любого $t > t_0$ решение задачи (20) можно построить за конечное число решений задачи (23).

Докажем единственность решения. Не ограничивая общности рассмотрения, допустим, что на отрезке $[t_0, t_1]$ существует два решения $v_1 \neq v_2$. Тогда из полученных выше оценок следует

$$\|v_1 - v_2\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{D}_t)} \leq M_3 \left\| \int_{t_0}^t (v_1(\tau) - v_2(\tau)) d\tau \right\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{D}_t)},$$

где $\overline{D}_t = \overline{D} \times [t_0, t]$. Из интегрального неравенства

$$\|v_1 - v_2\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{D}_t)} \leq M_3 \int_{t_0}^t \|v_1 - v_2\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{D}_\tau)} d\tau$$

и леммы Гронуолла следует, что $v_1 = v_2$.

Оценка в L_2 вытекает из очевидной цепочки равенств

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D |v|^2 da = \varepsilon \int_D (v, \Delta v) da = -\varepsilon \int_D |\nabla v|^2 da.$$

Последнее выражение определяет потерю энергии за счет вязкости и обратится в ноль, только когда жидкость прекратит движение. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь начальную задачу в торе $\bar{T}^3 \subset \mathbb{R}^3$ без точек самопересечения поверхности $\partial\bar{T}^3 = T^2$ (так называемый, сплошной тор). Тогда, поскольку в этом случае $\partial\bar{T}^3 \in C^\infty$, то в $\bar{T}^3$ справедливо

Следствие 3. *Задача (20) $\forall v_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{T}^3)$ имеет единственное классическое решение $v, x \in C^\infty(\bar{T}^3 \times (t_0, \infty))$, $p = 0$. При этом $\forall t \geq t_0$ справедливы оценки $\|v\|_{C(\bar{T}^3)} \leq \|v_0\|_{C(\bar{T}^3)}$ и $\|v\|_{L_2(\bar{T}^3)} \leq \|v_0\|_{L_2(\bar{T}^3)}$.*

Остановимся на задаче с силовым членом в правой части (19). Сразу отметим, что для доказательства существования решения используется тот же подход, что применен выше в Теореме 1, поэтому результат приводится без доказательства и основан на априорных оценках для квазилинейных уравнений параболического типа, [9],[16]. Положим $f = -\nabla u$, $\bar{D}_T = \bar{D} \times [0, T]$.

Теорема 2. *Задача (19) $\forall f, j \in C^\alpha(\bar{D}_T)$ и $\forall T > 0$ имеет единственное классическое решение $v, x \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_T)$, $p + u = \text{const}$.*

2.4. Начальная задача в $\mathbb{R}^n$

Постановка задачи для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ содержит краевые условия при $|a| \rightarrow \infty$, которые мы полагаем для скорости v нулевыми исходя из физики процесса. Пусть для v_0 выполнено условие (11).

Поставим начальную задачу

$$\begin{aligned} v_t &= \varepsilon \Delta v - \nabla p, \quad v|_\infty = 0, \quad v(a, t_0) = v_0(a), \\ x_t &= v, \quad x|_\infty = a, \quad x(a, t_0) = a, \quad t_0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (24)$$

где функции v_0, v для $m, l \geq 1$, $\alpha \in (0, 1)$ и любого $r > 0$ удовлетворяют следующим условиям убывания при $|a| \rightarrow \infty$:

$$\|v_0\|_{C^{2l+\alpha}(\bar{\Omega})} \leq K_{lm\alpha} / (1+r)^m \quad \forall \bar{\Omega} \subset \{|a| > r\}, \quad (25.1)$$

$$\|v\|_{C^{2l+\alpha, l+\alpha}(\bar{\Omega})} \leq K_{lm\alpha} / (1+r)^m \quad \forall \bar{\Omega} \subset \{|a| > r\} \text{ и } \forall t \in (t_0, T]. \quad (25.2)$$

Пространства таких функций v_0, v обозначим, соответственно, как $\mathcal{E}_m^{2l, \alpha}, \mathcal{E}_{T, m}^{2l, \alpha}$. Очевидно, что условия (25) являются аналогом краевого условия $v|_S = 0$ для случая ограниченной области в $\mathbb{R}^n$.

Если условия (25) выполняются для любых $m, l \geq 1$, $\alpha \in (0, 1)$, то такие пространство обозначим, соответственно, как $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_T$. Как известно, все эти пространства можно снабдить топологией счетно-нормированного пространства, [17]. Указанное выше поведение решений на бесконечности установлено также в [18].

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ последовательность n -шаров $D^k = \{\xi \mid |\xi| < k\}$, $k = 1, 2, \dots$, и пусть $S^k = \partial D^k$, $\bar{D}^k = D^k \cup S^k$. Положим $\bar{D}_T^k = \bar{D}^k \times [t_0, T]$. Тогда последовательность норм

$$\|v\|_k = \sup_{\bar{D}_T^k} \|(1 + |a|)^m v\|_{C^{2l+\alpha, l+\alpha}(\bar{D}_T^k)}$$

вводит в $\mathcal{E}_{T,m}^{2l,\alpha}$ структуру счетно-нормированного пространства. Аналогичное введение норм имеет место в $\mathcal{E}_T$.

В $\mathcal{E}_{T,m}^{2l,\alpha}$ можно определить понятие сходимости последовательности, что позволяет рассматривать это пространство как полное. Будем говорить, что последовательность $\{v^s\}$ сходится в $\mathcal{E}_{T,m}^{2l,\alpha}$, если $\{v^s\}$ сходится равномерно в любой ограниченной подобласти $\mathbb{R}^n \forall t \in [t_0, T]$. Полнота счетно-нормированного пространства означает, что в нем всякая последовательность, фундаментальная по каждой из норм $\|\cdot\|_k$, сходится, [17].

Пусть далее $\|v_0\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq M$, $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times (t_0, T]$, где $\bar{\Omega}$ — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса $C^{2+\alpha}$.

Теорема 3. Задача (24), (25) $\forall v_0 \in \mathcal{E}_m^{2l,\alpha}$ и $\forall T > t_0$ имеет единственное классическое решение $v, x \in \mathcal{E}_{T,m}^{2l,\alpha}$, $p = 0$. При этом $\forall t \geq t_0$ справедливы оценка $\|v\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq \|v_0\|_{C(\mathbb{R}^n)}$ и, при $m > n$, тождество $\|v(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|v_0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 - 2\varepsilon \int_{t_0}^t \|\nabla v(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau$.

Доказательство. Поскольку $\|v\|_{C^{2l+\alpha, l+\alpha}(|a| \geq r)} \rightarrow 0$ при $|r| \rightarrow \infty$ в рассматриваемом классе решений, то из (2) следует, что $\nabla p \rightarrow 0$ при $|a| \rightarrow \infty$. Тогда для задачи Неймана имеем

$$\Delta p = 0, \quad \nabla p|_{\infty} = 0 \implies p = \text{const.}$$

Таким образом, слагаемое ∇p в уравнении (24) исчезает. Без ограничения общности полагаем $p = 0$.

Введем в $\mathbb{R}^n$ лагранжевы координаты (a) и поставим при $t \geq t_0$ начальную задачу

$$v_t = \varepsilon \Delta(x)v, \quad v|_{S^k} = v_0|_{S^k}, \quad v(a, t_0) = v_0(a). \quad (26.1)$$

$$x_t = v, \quad x|_{S^k} = a, \quad x(a, t_0) = a. \quad (26.2)$$

Эта задача имеет единственное решение $v^k, x^k \in C^\infty(\bar{D}^k \times (t_0, T])$, и, стало быть, справедливы равномерные оценки

$$\|v^k\|_{C(\bar{\Omega}_T)} \leq M, \quad \|v^k\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{\Omega}_T)} \leq M_0 \quad \forall \bar{\Omega} \in D^k. \quad (27)$$

Доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство Теоремы 1 для ограниченной области $D = D^k$.

Докажем, что последовательность $\{v^k\}$ сходится равномерно в любой ограниченной области $\bar{\Omega}_T$. Из оценки (27) вытекают неравенства

$$\|v^k\|_{C^{2,1}(\bar{\Omega}_T)} \leq M_0, \quad \|\partial_a^2 v^k\|_{C^{\alpha,1}(\bar{\Omega}_T)} \leq M_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, множество $\{v^k \mid \|v^k\|_{C^{2,1}(\bar{\Omega}_T)} \leq M_0\}$ равномерно ограничено и равномерно непрерывно. По теореме Арцела отсюда следует, что существует подпоследовательность $\{v^{k'}\}$ такая, что $\{\partial_a^2 v^{k'}\}$ равномерно сходится в $\bar{\Omega}_T$. Точно также мы найдем подпоследовательность из $\{v^{k'}\}$, равномерно сходящуюся в $\bar{\Omega}_T$ вместе с

ее производными по a до второго порядка включительно и по t до первого порядка. Обозначая эту подпоследовательность через $\{v^{k''}\}$, а ее предел через v , получим

$$v^{k''} \rightharpoonup v, \quad \partial_a v^{k''} \rightharpoonup \partial_a v, \quad \partial_a^2 v^{k''} \rightharpoonup \partial_a^2 v, \quad \partial_t v^{k''} \rightharpoonup \partial_t v, \quad k'' \rightarrow \infty.$$

Подробное доказательство сходимости $\|v^{k''} - v\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{\Omega}_T)} \rightarrow 0$ при $k'' \rightarrow \infty$ имеется в [16]. Таким образом, v удовлетворяет уравнению (26.1) в $\bar{\Omega}_T$ и, тем самым, является искомым решением для любого T . Соответствующая гладкость решения следует из Теоремы 1.

Доопределим теперь каждую функцию v^k вне D^k как v_0 , сохранив обозначение v^k . Поскольку $\operatorname{div} v^k = \operatorname{div} v_0 = 0$, то $\partial^i v / \partial v^i|_{S^k} = \partial^i v_0 / \partial v^i|_{S^k} \forall i \geq 1$. Действительно, поскольку по любому касательному к S^k направлению τ_j выполняется равенство $\partial v / \partial \tau_j|_{S^k} = \partial v_0 / \partial \tau_j|_{S^k}$, то $\partial v / \partial v|_{S^k} = \partial v_0 / \partial v|_{S^k}$ и т.д. $\forall i$. При этом $\{v^k\} \in \mathcal{E}_{T,m}^{2l,\alpha}$. Отсюда, в силу полноты $\mathcal{E}_{T,m}^{2l,\alpha}$, следует, что $v \in \mathcal{E}_{T,m}^{2l,\alpha}$.

Докажем единственность решения. Допустим, что существуют решения $v_1 \neq v_2$, и пусть $\sup_{\bar{D}_T^k} \|v_j\|_{C^{2+\alpha,\alpha}(\bar{D}_T^k)} \leq M_1, j = 1, 2, \forall k \in \mathbb{N}$. Кроме того, поскольку $v_j \in \mathcal{E}_{T,m}^{2l,\alpha}$, то $\sup_{\bar{\Omega}_T} \|v_j\|_{C^{2+\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_T)} \leq M_2/k, \bar{\Omega} \notin D^k$, где M_2 не зависит от k . Тогда, повторяя для области D^k рассуждения Теоремы 1, на основе априорных оценок из [14] получаем неравенство

$$\|v_1 - v_2\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_T^k)} \leq M_3 \int_{t_0}^t \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_\tau^k)} d\tau + \frac{M_4}{k},$$

где $M_3 = M_3(M_1), M_4 = M_4(M_3)$. Из этого интегрального неравенства, пользуясь леммой Гронуолла, находим

$$\|v_1 - v_2\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\bar{D}_T^k)} \leq M_5/k.$$

В силу произвольности $k \rightarrow \infty$ получаем, что $v_1 = v_2$. Теорема доказана.

Полагаем, что частная задача при $n = 3$ представляет отдельный интерес в астрономии и астрофизике. Из Теоремы 3 вытекает

Следствие 4. Задача (24),(25) $\forall v_0 \in \mathcal{E}$ и $\forall T > t_0$ имеет единственное классическое решение $v, x \in \mathcal{E}_T, p = 0$. При этом $\forall t \geq t_0$ справедливы оценки $\|v\|_{C(\mathbb{R}^3)} \leq \|v_0\|_{C(\mathbb{R}^3)}$ и $\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|v_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2$.

3. Решение прикладных задач

3.1. Установившийся режим

Рассмотрим уравнение Навье-Стокса в лагранжевых координатах (a) с режимом в правой части. Поскольку в п. 2.1 доказано, что $\nabla(p+u) = 0$, то этот член исключен из уравнения

$$v_t = \varepsilon \Delta v + j e^{\lambda t}, \quad (28)$$

где $v = v(a, t)$ — скорость частицы жидкости в лагранжевых координатах, $x = x(a, t)$ — траектория ее движения, $j = j(x)$ — вихревая сила в каждой точке с декартовыми координатами x .

Имеет место лемма, важная при решении задач с установившимся режимом, в том числе стационарных, т. е. при $\lambda = 0$.

Лемма 2. В установившемся режиме уравнение (28) в декартовой системе координат (x) имеет вид

$$\lambda V = \varepsilon \Delta V + j, \quad (29)$$

где $V = V(x)$ — скорость в точке x , и $v(x, t) = V(x)e^{\lambda t}$.

Доказательство. Рассмотрим установившееся решение уравнения (28) в некоторый момент времени $t = t_0$ и введем лагранжевы переменные (a) как положение частиц жидкости при $t = t_0$, т. е. $a = x$. Далее решение (28) проведем в этих переменных. Представим его в виде $v(a, t) = V(a)e^{\lambda t}$. Из (28) имеем

$$\lambda V = \varepsilon \Delta(x(a, t))V + j(x(a, t)).$$

Это уравнение справедливо при $x(a, t_0) = a$, где $\Delta(a)$ является оператором Лапласа $\sum_{1 \leq i \leq n} \partial^2 / \partial a_i^2$. В силу произвольности t_0 справедливо $v(x, t) = V(x)e^{\lambda t}$ в любой точке $x \in \bar{D}$. Лемма доказана.

Лемма 2 имеет вполне прозрачный смысл. Действительно, в силу однородного изменения установившегося решения во времени, в качестве начального момента можно выбрать любой. В этот момент времени лагранжевы и эйлеровы переменные совпадают, и система координат (a) совпадает с декартовой (x) .

3.2. Вихри Тэйлора

Рассмотрим задачу об установившемся движении жидкости в сплошном топологическом торе $\bar{T}^3$ с круговым поперечным сечением. Такое движение получило название вихрей Тэйлора. Их происхождение приписывалось неустойчивости вращательного движения жидкости и они рассматривались как возмущение регулярного режима, [1]. На самом деле это движение является проявлением неединственности решения.

Приведем решение, воспользовавшись Леммой 2. Введем для $\bar{T}^3$ в $\mathbb{R}^3$ цилиндрические координаты (ρ, θ, z) с периодическим условием по переменной z . Тогда задача с установившимся режимом возбуждений для вихревой компоненты скорости $w = w(\rho, \theta, z)$, представленной в декартовых компонентах, принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda w - \varepsilon \Delta w &= j(\rho, \theta, z), \quad |w(0, \theta, z)| < \infty, \quad w(r, \theta, z) = 0, \\ w(\rho, \theta, z) &= w(\rho, \theta + 2\pi, z), \quad w_\theta(\rho, \theta, z) = w_\theta(\rho, \theta + 2\pi, z), \\ w(\rho, \theta, 0) &= w(\rho, \theta, 2\pi R), \quad w_z(\rho, \theta, 0) = w_z(\rho, \theta, 2\pi R), \end{aligned} \quad (30)$$

где λ — свободный параметр, $0 < \rho < r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2\pi R$, $\Delta = \Delta_\rho + 1/\rho^2 \partial^2 / \partial \theta^2 + \partial^2 / \partial z^2$, $\Delta_\rho = \partial^2 / \partial \rho^2 + 1/\rho \partial / \partial \rho$.

Покажем, что при $j = 0$ задача (30) имеет собственные состояния, т. е. нетривиальные решения. Подставим такое решение

$w = A(\rho)B(z)\{-\sin m\theta, \cos m\theta, 0\}$, $m \in \mathbb{Z}$, в (30). Получим, разделяя переменные,

$$\frac{\lambda A - \varepsilon \Delta_\rho A + \varepsilon m^2 A / \rho^2}{A} = \varepsilon \frac{B''}{B} = -\varepsilon \mu^2.$$

Из условия периодичности по z имеем $\mu = \mu_k = k/R$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда

$$\lambda \rho^2 A - \varepsilon \rho (\rho A')' + \varepsilon m^2 A = -\varepsilon \mu_k^2 \rho^2 A, \quad |A(0)| < \infty, \quad A(r) = 0, \quad B = e^{ikz/R}.$$

Будем искать допустимые λ в виде $\lambda = -\varepsilon \mu_k^2 - \varepsilon \alpha^2$. Тогда для $A(\rho)$ получаем задачу

$$A'' + \frac{A'}{\rho} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) A = 0, \quad |A(0)| < \infty, \quad A(r) = 0,$$

решение которой существует и выражается функцией Бесселя $J_m(\alpha_{lm}\rho)$, где $\alpha_{lm} > 0$, $l \in \mathbb{N}$, есть корни уравнения $J_m(\alpha r) = 0$. В результате находим допустимые собственные состояния вихревой компоненты скорости

$$w(\rho, \theta, z) = J_m(\alpha_{lm}\rho)\{-\sin m\theta, \cos m\theta, 0\} e^{ikz/R}.$$

Поскольку $\alpha_{lm} > 0$, то все моды асимптотически устойчивы.

Окончательно находим, что установившиеся собственные состояния вихревой составляющей скорости ω , удовлетворяющие условию $\operatorname{div} \omega = 0$, существуют лишь при $m = 1$ и в компонентах цилиндрической системы координат имеют вид

$$\omega_{kl}(\rho, z, t) = \omega^o J_1(\alpha_l \rho) e^{ikz/R - \varepsilon(\alpha_l^2 + \mu_k^2)t}, \quad \alpha_l = \alpha_{l1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad l \in \mathbb{N},$$

где $\omega^o = \{0, 1, 0\}$ есть такой вектор, что $\operatorname{div} \omega_{kl} = 0$. Этот вектор направлен вдоль образующих тора, что соответствует замкнутости линий тока жидкости.

3.3. Течение по трубе

Рассмотрим трубу как сплошной топологический тор $\bar{T}^3$ с боковой поверхностью T^2 и постоянным поперечным сечением Σ . Очевидно, что для поддержания движения жидкости необходимо прилагать силу $f = -\nabla u$, по крайней мере, в относительно "малой" области. Положим $j = 0$.

Поставим задачу о стационарном движении жидкости в трубе. Поскольку в таком режиме в лагранжевых координатах $v_t = 0$, то согласно Лемме 2 уравнение Навье-Стокса приобретает вид

$$\varepsilon \Delta v = \nabla(p + u).$$

В п. 2.1 установлено, что $p + u = \text{const} \implies \Delta v = 0$. Представляя v в виде суммы $v = c + \omega$, где $c = -\nabla \varphi$, $\omega = \operatorname{rot} \psi$, из (1), (2) получаем

$$\Delta \varphi = 0, \quad \varphi|_S = 0, \quad \Delta \omega = 0, \quad \omega|_S = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = 0 \implies c = 0.$$

Таким образом, движение жидкости в трубе представляет собой чистый вихрь.

Уравнение $\Delta\omega = 0$ имеет решением такой вектор-функцию $\omega \neq 0$, что $\operatorname{div} \omega = 0$. Кроме того, в стационарном случае должно выполняться еще условие постоянства потока скорости жидкости в любом сечении трубы. Для формулировки этого условия сделаем следующее замечание.

Замечание 2. *Поскольку уравнение Навье-Стокса в установившемся режиме есть вариационное уравнение Эйлера для функционала энергии, то можно рассматривать решение исходной задачи в вариационной форме. В частности, при этом возникают задачи на условный экстремум с изопериметрическими условиями.*

Найдем ω в соответствии с Замечанием 3. Получаем следующую задачу на условный экстремум

$$\int_{\Sigma} |\nabla \omega|^2 d\sigma \rightarrow \min_{\omega}, \quad \omega|_S = 0, \quad \operatorname{div} \omega = 0, \quad \int_{\Sigma} (\omega, \tau) d\sigma = q,$$

где τ — нормаль к поперечному сечению Σ , q — расход жидкости.

Метод Лагранжа на поиск условного экстремума дает

$$\Delta\omega - \alpha\tau = 0, \quad \omega|_S = 0, \quad \operatorname{div} \omega = 0, \quad \int_{\Sigma} (\omega, \tau) d\sigma = q,$$

где α — неопределенный множитель, определяемый интегральным условием.

Будем искать однородное вдоль τ решение этой задачи в декартовых координатах таких, что плоскость (x, y) совмещена с Σ , а ось $z \uparrow \tau$. Полагая $\omega = \{0, 0, \alpha w\}$, получаем задачу для уравнения Пуассона в плоской области Σ с границей Γ

$$\Delta w = 1, \quad w|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \int_{\Sigma} w d\sigma = q.$$

Явное решение удастся получить лишь в областях специального вида.

Решим классическую задачу для трубы круглого сечения радиуса r в полярных координатах (ρ, θ) . Имеем для $w = w(\rho, \theta)$

$$\Delta w = 1, \quad |w(0, \theta)| < \infty, \quad w(r, \theta) = 0, \\ w(\rho, \theta) = w(\rho, \theta + 2\pi), \quad w_{\theta}(\rho, \theta) = w_{\theta}(\rho, \theta + 2\pi),$$

откуда, полагая $w = R(\rho)e^{in\theta}$, получаем

$$\rho(\rho R')' - n^2 R = \rho^2, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(r) = 0.$$

Это задача имеет решение лишь при $n = 0$,

$$R = \frac{\rho^2 - r^2}{4}, \quad 2\pi \int_0^r R(\rho) \rho d\rho = -\frac{\pi r^4}{8}.$$

В итоге получаем известную формулу

$$w = \frac{2q}{\pi r^4} (r^2 - \rho^2), \quad 0 \leq \rho \leq r.$$

3.4. Турбулентное движение

Наряду со стационарным движением жидкости представляет интерес так называемое турбулентное возмущение регулярного течения. На самом деле такое движение жидкости является не проявлением неустойчивости стационарного режима ($\lambda = 0$), а реализацией неединственности решения задач (28),(29) в установившемся режиме ($\lambda \neq 0$).

Рассмотрим задачу об установившемся движении жидкости в топологическом торе $\bar{T}^3$ с круговым поперечным сечением радиуса r и радиусом направляющей окружности R . Приведем решение, воспользовавшись постановкой и обозначениями задачи (30). Для вихревой компоненты скорости $\omega = \{0, 0, w(\rho, \theta, z)\} e^{\lambda t}$ как следствие возникает условие для потока q через поперечное сечение трубы Σ с границей Γ

$$\lambda w - \varepsilon \Delta w = 0, \quad |w(0, \theta, z)| < \infty, \quad w(r, \theta, z) = 0, \quad \int_{\Sigma} (\omega, \tau) d\sigma = q,$$

$$w(\rho, \theta, z) = w(\rho, \theta + 2\pi, z), \quad w_{\theta}(\rho, \theta, z) = w_{\theta}(\rho, \theta + 2\pi, z), \\ w(\rho, \theta, 0) = w(\rho, \theta, 2\pi R), \quad w_z(\rho, \theta, 0) = w_z(\rho, \theta, 2\pi R),$$

где $\Delta = \partial^2/\partial \rho^2 + 1/\rho \partial/\partial \rho + 1/\rho^2 \partial^2/\partial \theta^2 + \partial^2/\partial z^2$, $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2\pi R$. Поиск условного экстремума приводит к следующей задаче в плоской области Σ

$$\lambda w - \varepsilon \Delta w = \alpha, \quad w|_{\Gamma} = 0, \quad \int_{\Sigma} w d\sigma = q, \quad (31)$$

где α — неизвестный пока множитель Лагранжа и q — искомый поток.

Покажем, что задача (31) имеет собственные состояния, т. е. нетривиальные решения при $\alpha = 0$. Найдем решение однородного уравнения в виде $w = A(\rho, \theta)B(z)$. Получим, разделяя переменные,

$$\frac{\lambda A - \varepsilon \Delta A}{A} = \varepsilon \frac{B''}{B} = -\varepsilon \mu^2.$$

Полагая $A = e^{iv\theta}C(r)$, из условия периодичности по θ и z имеем $v = n$, $\mu = \mu_k = k/R$, $n, k \in \mathbb{Z}$, откуда

$$\lambda \rho^2 C - \varepsilon \rho (C')' + \varepsilon n^2 C = -\varepsilon \mu_k^2 \rho^2 C, \quad B = e^{ikz/R}.$$

Ограниченные решения этой задачи существуют лишь при действительных λ . Будем искать допустимые λ в виде $\lambda = -\varepsilon \mu_k^2 - \varepsilon \beta^2 \neq 0$. Тогда для $C(\rho)$ получаем уравнение

$$C'' + \frac{C'}{\rho} + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) C = 0,$$

решение которого выражается функцией Бесселя $J_n(\beta \rho)$, откуда находим решение однородного уравнения (31)

$$w = J_n(\beta \rho) e^{i(n\theta + kz/R)}.$$

Условие $\text{div } \omega = 0$ удовлетворяется лишь при $k = 0$.

Таким образом, для решения уравнения (31) возникает задача о поиске β , обеспечивающего выполнение дополнительных условий

$$w(r, \theta, z) = 0, \quad 2\pi \int_0^r w \rho d\rho = q.$$

Отсюда находим, что β принимает счетное число значений β_{ln} таких, что $\beta_{ln}r = x_{ln}$, где x_{ln} являются положительными корнями уравнения $J_n(x_l) = 0$, $l \in \mathbb{N}$. Собственные состояния в компонентах цилиндрической системы координат имеют вид

$$\omega_{ln} = \{0, 0, 1\} J_n(\beta_{ln} \rho) e^{in\theta}.$$

Рассмотрим случай $n = 0$, единственный, при котором $q \neq 0$. Простые вычисления интеграла дают

$$\int_0^r J_0(\beta \rho) \rho d\rho = \frac{r}{\beta} J_1(\beta r),$$

откуда получаем уравнения для определения β и q

$$J_0(\beta r) = 0, \quad r J_1(\beta r) = \beta q.$$

Отсюда находим, что β принимает счетное число значений β_l таких, что $\beta_l r = x_l$, где x_l являются положительными корнями уравнения

$$J_0(x_l) = 0, \quad l \in \mathbb{N}, \quad x_1 = 2.40, \quad x_2 = 5.52, \quad \dots$$

Окончательно, собственное состояние $\omega_l(\rho, \theta, z, t)$ задачи о турбулентном движении жидкости при $n = 0$ и ненулевом расходе принимает вид

$$\omega_l = \omega^0 J_0(\beta_l r) e^{-\varepsilon \beta_l^2 t}, \quad \omega^0 = \{0, 0, 1\}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\beta_l > 0$, то все моды асимптотически устойчивы.

Рассмотрим турбулентное движение в трубе внутреннего радиуса r [см]. Наиболее долгоживущая мода имеет место при $l = 1$, что при кинематической вязкости воды $\varepsilon = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$ дает коэффициент затухания $0.058/r^2 [\text{с}^{-1}]$. Для трубы $r = 1$ биения, вызванные турбулентностью, исчезают практически за 40 секунд.

Заключение

Полученные выше результаты показывают, что скорость движения вязкой несжимаемой жидкости носит чисто вихревой характер и никакого отношения к давлению не имеет. Скорость движения жидкости является бесконечно гладкой функцией, подчиняющейся принципу максимума с тенденцией стремления к нулю в силу диссипации энергии.

Давление p в жидкости лишь компенсирует внешнее потенциальное поле u в форме равенства $p + u = \text{const}$, что позволяет жидкости осуществлять чисто вихревое движение. При отсутствии внешних полей такое движение является свободным, а давление постоянным. Физическим подтверждением этого факта является бесконечная скорость звука в несжимаемой жидкости.

Ключом для доказательства представленных в работе утверждений является добавление к граничному условию $v|_S = 0$ дополнительного

условия $\partial^2 v_v / \partial v^2|_S = 0$, означающего отсутствие вязких сил на границе. Последнее утверждение имеет простое физическое объяснение — между неподвижными частицами нет сил трения. Из условия $\partial^2 v_v / \partial v^2|_S = 0$ следует, что в несжимаемой вязкой жидкости $p + u = \text{const}$.

Литература

1. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Oxford, Pergamon Press. 1959.
2. *Caffarelli L., Kohn R. and Nirenberg L.* Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 1982. **35**. P. 771–837.
3. *Amann H.* On the strong solvability of the Navier–Stokes equations. *J. Math. Fluid Mech.* 2000. **2**. P. 16–98.
4. *Koch H. and D. Tataru D.* Well-posedness for the Navier–Stokes equations. *Adv. Math.* 2001. **157** (1). P. 22–35.
5. *Gallagher I.* Critical Function Spaces for the Well-Posedness of the Navier–Stokes Initial Value Problem. In: Giga Y., Novotny A. (eds) *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*. 2016. Springer, Cham. http://doi.org/10.1007/978-3-319-10151-4_12-1.
6. *Argenziano A., Cannone M., Sammartino M.* Navier–Stokes equations in the half space with non compatible data // arXiv preprint arXiv:2202.09415. 2022.
7. *Cannone M.* Harmonic Analysis Tools for Solving the Incompressible Navier–Stokes Equations. In: Friedlander S. J. and Serre D. (eds) *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, Vol. III. 2004. Elsevier B.V. P. 161–235.
8. *Ladyzhenskaya O. A.* *Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York. Gordon and Breach, Science Publishers. 1963.
9. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A. and Ural'tseva N. N.* *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Providence, RI, American Mathematical Society. 1967.
10. *Nazarov S. A. & Pileckas K.* On steady Stokes and Navier–Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimensional exterior domain. *J. of Math. of Kyoto Univ.* 2000. **40**. P. 475–492.
11. *Šverák V.* On Landau's solutions of the Navier–Stokes equations. *J. of Math. Sciences.* 2011. **179** (1). P. 208–228.
12. *Bjorland C., Brandolese L., Iftimie D. and Schondek M.* L_p -Solutions of the Steady-State Navier–Stokes Equations with Rough External Forces. *Comm. in P. Diff. Eqs.* 2011. **36**. P. 216–246.

13. *Guilloid J.* Steady solutions of the Navier-Stokes equations in the plane
arXiv:1511.03938v1 [math.AP] 12 Nov 2015.
14. *Smale S.* Mathematical problems for the next century. Math. Intelligencer.
1998. **20** (2). P. 7–15.
15. *Fefferman C. L.* Existence and uniqueness of the Navier–Stokes equation.
2002. [http://www.claymath.org/millennium/Navier–Stokes Equations](http://www.claymath.org/millennium/Navier–Stokes%20Equations).
16. *Friedman Avner.* Differential Equations of Parabolic Type. N.Y., Mineola,
Dover Publications, Inc. 1964.
17. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и
функционального анализа. М. Наука. 1972.
18. *Доброхотов С. Ю., Шафаревич А. И.* О поведении на бесконечности
поля скоростей несжимаемой жидкости. Изв. РАН. МЖГ. 1996. Т. 4.
С. 38–42.