

*И.С. Барашков, В.И. Дмитриев*

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ ПОЛЕМ МОЩНОГО УДАЛЁННОГО ИСТОЧНИКА ПРИ НАЛИЧИИ СЛОЖНОЙ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ\***

Геофизические методы электромагнитного зондирования верхних слоев Земли направлены на изучение строения земных недр и на поиск месторождений полезных ископаемых. Обычно зондирования проводятся при относительно небольших расстояниях между источником поля и точкой измерения поля. В среднем это расстояние не превышает величины 10 км. Однако, последнее время развиваются методы зондирования, использующие очень мощные источники поля, когда измерения можно проводить на больших расстояниях. Это повышает эффективность геофизических работ, т.к. при фиксированном положении источника перемещается только аппаратура измерения. Такой подход особенно эффективен при морских исследованиях, т.к. источник электромагнитного поля может находиться на суше, а измерения проводятся в морских условиях.

В качестве модели строения среды, в которой проводится электромагнитное зондирование, рассматривается двухслойная Земля ( $z > 0$ ), над которой простирается атмосфера ( $z < 0$ ). Распределение электропроводности в такой модели показано на рис.1 и задается в виде:

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } z \in (-\infty, 0) \text{ (атмосфера),} \\ \sigma_1 & \text{при } z \in (0, h_1) \text{ (наносы),} \\ \sigma_2 & \text{при } z \in (h_1, \infty) \text{ (основание).} \end{cases} \quad (1)$$

В первом слое наносов в области  $V_M$  располагается море со сложной береговой линией и с проводимостью  $\sigma_M$ . Влияние моря на электромагнитное зондирование аномального тела с проводимостью  $\sigma_T$  во втором слое надо учитывать.

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 09-05-12016 офи-м и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы.

Будем считать, что электромагнитное поле возбуждается вертикальным магнитным диполем, расположенным на суше на земной поверхности ( $z=0$ ) в начале координат, а измерения проводятся в море. Учитывая осесимметричность электромагнитного поля

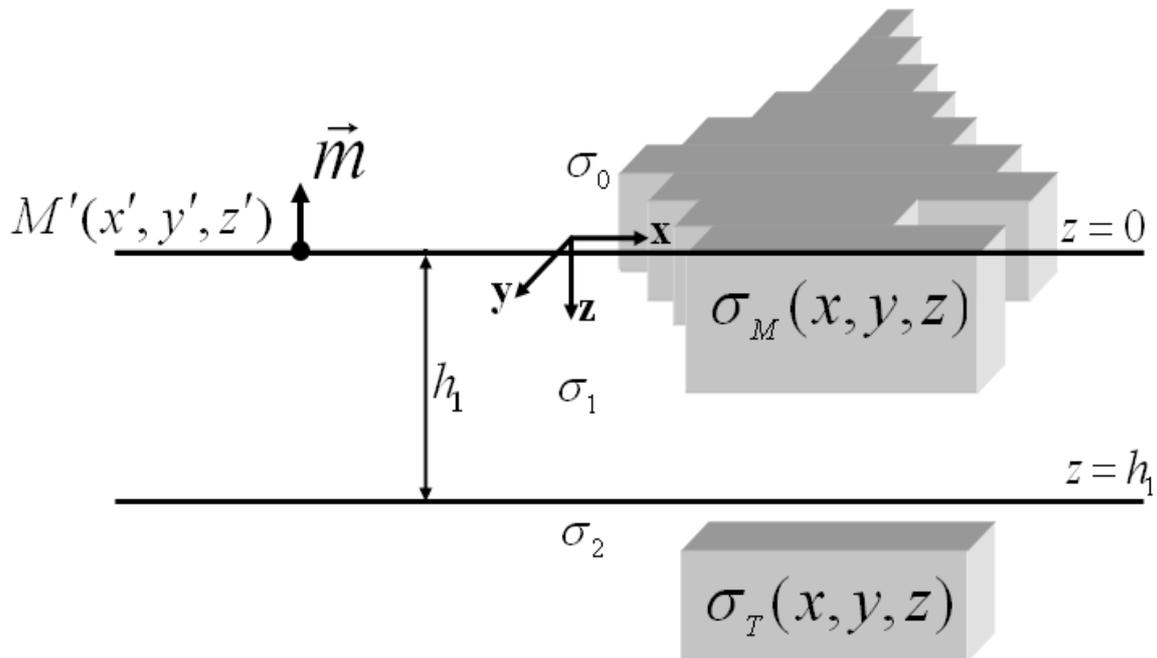


Рис.1. Модель горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью, возбуждаемой вертикальным магнитным диполем.

вертикального магнитного диполя в слоистой среде, из уравнений Максвелла

$$\text{rot}H = \sigma E; \quad \text{rot}E = i\omega\mu H \quad (2)$$

получим для магнитной моды

$$H_r = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi); \quad \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma E_\varphi. \quad (3)$$

Для  $E_\varphi$  в магнитооднородной среде ( $\mu = \text{const}$ ) имеем уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + k^2(z)E_\varphi = 0, \quad k^2 = i\omega\mu\sigma. \quad (4)$$

На границах раздела сред при  $z = 0, h$  должны выполняться условия непрерывности  $E_\varphi$  и  $\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}$ , а в бесконечности  $E_\varphi$  убывает. Кроме того, в

начале координат, где находится вертикальный магнитный диполь, поле  $E_\varphi$  имеет особенность вида:

$$E_\varphi \rightarrow -\frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ik_0 R}}{R} \right) \text{ при } R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow 0, \quad (5)$$

где  $m_z$  – магнитный момент диполя. Если учесть, что

$$\frac{e^{ik_0 R}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\eta_0 |z|} \frac{\lambda d\lambda}{\eta_0}; \quad \eta_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2},$$

то условие в источнике примет вид

$$E_\varphi \rightarrow \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) e^{-\lambda |z|} \lambda d\lambda; \quad \eta_0 = \lambda, \quad k_0 = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (4) представимо в виде:

$$E_\varphi(r, z) = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) Z(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (7)$$

где функция  $Z(z, \lambda)$  является решением уравнения

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \eta^2 Z = 0, \quad \eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2(z)}, \quad \text{Re}(\eta) > 0. \quad (8)$$

При  $z = 0$  функция  $Z(z, \lambda)$  удовлетворяет условиям

$$[Z]_{z=0} = 0; \quad [Z']_{z=0} = -2\lambda, \quad (9)$$

где квадратные скобки означают разрыв функции. При  $z = h_1$   $Z$  и  $Z'$  непрерывны, а при  $|z| \rightarrow \infty$  функция  $Z$  убывает.

Представим функцию  $Z(z, \lambda)$  в виде:

$$Z(z, \lambda) = \begin{cases} a_0 e^{\lambda z} & z \in (-\infty, 0) \\ a_1 e^{-\eta_1 z} + b_1 e^{\eta_1(z-h_1)} & z \in (0, h_1) \\ a_2 e^{-\eta_2(z-h_1)} & z \in (h_1, \infty). \end{cases} \quad (10)$$

Из условий непрерывности  $Z$  и  $Z'$  при  $z = h_1$  имеем:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 e^{-\eta_1 h_1} + b_1, \\ \eta_2 a_2 = \eta_1 (a_1 e^{-\eta_1 h_1} - b_1), \end{cases}$$

откуда находим

$$a_2 = \frac{2\eta_1 a_1}{\eta_1 + \eta_2} e^{-\eta_1 h_1}; \quad b_1 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} a_1 e^{-\eta_1 h_1}. \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), найдем

$$Z(z, \lambda) = a_1 \left( e^{-\eta_1 z} + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} e^{-\eta_1(2h_1 - z)} \right), \quad z \in (0, h). \quad (12)$$

Для определения констант  $a_0$  и  $a_1$  подставим (11) в условия (9) при  $z = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 \left( 1 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} e^{-2\eta_1 h_1} \right) &= 0, \\ \lambda a_0 + \eta_1 a_1 \left( 1 - \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} e^{-2\eta_1 h_1} \right) &= 2\lambda. \end{aligned}$$

Из полученной системы находим

$$a_0 = \frac{2\lambda(1 + \beta)}{\lambda(1 + \beta) + \eta_1(1 - \beta)}; \quad a_1 = \frac{2\lambda}{\lambda(1 + \beta) + \eta_1(1 - \beta)}, \quad (13)$$

где

$$\beta = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} e^{-2\eta_1 h_1}. \quad (14)$$

Для расчёта правой части интегрального уравнения при решении задачи с трёхмерной неоднородностью в виде моря в первом слое нас интересует электрическое поле при  $0 < z < h_1$ . Согласно формуле (7) это поле равно:

$$E_\varphi(r, z) = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) Z(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (15)$$

где, согласно (12),

$$Z(z, \lambda) = a_1 \left( e^{-\eta_1 z} + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} e^{-\eta_1(2h_1 - z)} \right), \quad z \in (0, h). \quad (16)$$

Подставив в (15) значение  $Z(z, \lambda)$ , получим

$$E_\varphi = \frac{i\omega\mu m_z}{2\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \frac{(\eta_1 + \eta_2)e^{-\eta_1 z} + (\eta_1 - \eta_2)e^{-\eta_1(2h_1 - z)}}{Q(\eta_1 + \eta_2)} \lambda^2 d\lambda, \quad (17)$$

где

$$Q = \lambda(1 + \beta) + \eta_1(1 - \beta). \quad (18)$$

Кроме того, нас интересует поле, измеряемое на земной поверхности, согласно (7), равное

$$E_\varphi(r, z) = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) Z(z = 0, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (19)$$

где, согласно (10),

$$Z(z=0, \lambda) = a_0(\lambda). \quad (20)$$

Магнитные поля на земной поверхности, согласно (3), равны

$$H_r = -\frac{m_z}{4\pi_0} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \frac{dZ(z=0, \lambda)}{dz} \lambda d\lambda, \quad (21)$$

$$H_z = \frac{m_z}{4\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda r) Z(z=0, \lambda) \lambda^2 d\lambda, \quad (22)$$

где

$$\frac{dZ(z=0, \lambda)}{dz} = \lambda a_0(\lambda). \quad (23)$$

Подставив в (19) и (21-22) значение  $Z(z, \lambda)$ , получим

$$E_\varphi(r, z) = \frac{i\omega\mu m_z}{2\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \frac{1+\beta}{Q} \lambda^2 d\lambda, \quad (24)$$

$$H_r = -\frac{m_z}{2\pi_0} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \frac{1+\beta}{Q} \lambda^3 d\lambda, \quad (25)$$

$$H_z = \frac{m_z}{2\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \frac{1+\beta}{Q} \lambda^3 d\lambda. \quad (26)$$

Параметр  $\beta(\lambda)$  определяется по формуле (14).

Интегралы в (17) и (24-26) понимаются в смысле главного значения:

$$\int_0^\infty J_{0,1}(\lambda r) \phi(\lambda) d\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty J_{0,1}(\lambda r) e^{-\varepsilon\lambda} \phi(\lambda) d\lambda.$$

Рассмотрим асимптотику полей в дальней зоне. В работе [2] выведены асимптотики для интегралов Бесселя в виде:

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) F(\lambda) \lambda d\lambda = -\frac{F'(0)}{r^3} + \frac{3F'''(0)}{2r^5} + O\left(\frac{1}{r^7}\right), \quad (27)$$

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r) F(\lambda) \lambda d\lambda = \frac{F(0)}{r^2} - \frac{3F''(0)}{2r^4} + O\left(\frac{1}{r^6}\right). \quad (28)$$

Для расчёта асимптотики электрического поля в дальней зоне на земной поверхности надо дважды продифференцировать функцию

$$F_1(\lambda) = \lambda \frac{1+\beta}{Q};$$

$$F_1'(\lambda) = \frac{1+\beta}{Q} + \lambda \frac{\beta'Q - (1+\beta)Q'}{Q^2},$$

$$F_1''(0) = \frac{\beta'Q - (1+\beta)Q'}{Q^2} + \frac{\beta'Q - (1+\beta)Q'}{Q^2} = 2 \frac{\beta'Q - (1+\beta)Q'}{Q^2}.$$

Поскольку

$$\beta'(\lambda)|_{\lambda=0} = -2\beta \left( \frac{\lambda}{\eta_1 \eta_2} + \frac{\lambda h_1}{\eta_1} \right) \Big|_{\lambda=0} = 0,$$

$$Q'(\lambda)|_{\lambda=0} = \left( 1 + \beta + \lambda \frac{1-\beta}{\eta_1} + (\lambda - \eta_1) \beta' \right) \Big|_{\lambda=0} = 1 + \beta,$$

то

$$\begin{aligned} F_1''(0) &= -2 \left( \frac{1+\beta}{Q} \right)^2 = -2 \left( \frac{1+\beta}{\eta_1(1-\beta)} \right)^2 = -\frac{2}{\eta_1^2} \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2 = -\frac{2}{-k_1^2} \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2 = \\ &= \frac{2}{k_1^2} \left( \frac{1+\beta(0)}{1-\beta(0)} \right)^2 = \frac{2}{k_1^2} \left( \frac{1+p}{1-p} \right)^2, \end{aligned}$$

где

$$p = \beta(0) = \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} \exp(2ik_1 h_1). \quad (29)$$

Для расчёта асимптотики магнитного поля в дальней зоне на земной поверхности надо трижды продифференцировать функцию

$$F_2(\lambda) = \lambda F_1(\lambda):$$

$$F_2'(\lambda) = F_1(\lambda) + \lambda F_1'(\lambda), \quad F_2'(0) = 0,$$

$$F_2''(\lambda) = 2F_1'(\lambda) + \lambda F_1''(\lambda),$$

$$F_2''(0) = 2 \frac{1+\beta}{Q} = \frac{2}{\eta_1} \left( \frac{1+\beta(0)}{1-\beta(0)} \right) = \frac{2}{\sqrt{-k_1^2}} \left( \frac{1+p}{1-p} \right) = -\frac{2}{ik_1} \left( \frac{1+p}{1-p} \right),$$

$$F_2'''(0) = 3F_1''(0) = \frac{6}{k_1^2} \left( \frac{1+p}{1-p} \right)^2.$$

Используя формулы (27) и (28), легко получить асимптотики полей:

$$E_\varphi^{ac} = \frac{i\omega\mu m_z}{2\pi} \cdot \left\{ -\frac{3}{k_1^2 r^4} \left( \frac{1+p}{1-p} \right)^2 \right\}, \quad (30)$$

$$H_r^{ac} = -\frac{m_z}{2\pi} \cdot \left\{ \frac{3}{ik_1 r^4} \left( \frac{1+p}{1-p} \right) \right\}, \quad (31)$$

$$H_z^{ac} = \frac{m_z}{2\pi} \cdot \left\{ \frac{9}{k_1^2 r^5} \left( \frac{1+p}{1-p} \right)^2 \right\}. \quad (32)$$

Для расчёта асимптотики электрического поля в дальней зоне в первом слое (при  $0 < z < h_1$ ) надо дважды продифференцировать функцию

$$F_4(\lambda) = \lambda F_3(\lambda),$$

где

$$\begin{aligned} F_3(\lambda) &= \frac{\exp(-\eta_1 z)}{Q} + \frac{(\eta_1 - \eta_2) \exp(-\eta_1(2h_1 - z))}{Q(\eta_1 + \eta_2)}, \\ F_4(0) &= 0, \\ F_4'(\lambda) &= F_3(\lambda) + \lambda F_3'(\lambda), \\ F_4''(0) &= 2F_3'(0) = 2 \exp(-\eta_1 z) \frac{-z \eta_1' Q - Q'}{Q^2} + \\ &+ 2 \frac{(\eta_1' - \eta_2')(\eta_1 + \eta_2) - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_1' + \eta_2')}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \cdot \frac{\exp(-\eta_1(2h_1 - z))}{Q} + \\ &+ 2 \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \frac{\exp(-\eta_1(2h_1 - z))(z - 2h_1) \eta_1' Q - \exp(-\eta_1(2h_1 - z)) Q'}{Q^2}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \eta_i'(\lambda)|_{\lambda=0} &= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_i^2}}|_{\lambda=0} = 0, \\ Q(\lambda)|_{\lambda=0} &= \eta_1(1 - \beta), \\ Q'(\lambda)|_{\lambda=0} &= 1 + \beta, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} F_4''(0) &= -2 \frac{Q'}{Q^2} \left\{ \exp(-\eta_1 z) + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \exp(-\eta_1(2h_1 - z)) \right\} |_{\lambda=0} = \\ &= \frac{2(1 + p)}{k_1^2(1 - p)^2} \{ \exp(ik_1 z) + p \exp(-ik_1 z) \}. \end{aligned}$$

Используя формулы (17) и (18), получим асимптотику электрического поля при  $0 < z < h_1$ :

$$E_\varphi^{ac} = -\frac{3m_z}{2\pi\sigma_1 r^4} \cdot \frac{1 + p}{(1 - p)^2} \{ \exp(ik_1 z) + p \exp(-ik_1 z) \} + O\left(\frac{1}{r^6}\right). \quad (33)$$

Проведённые в работе [4] численные исследования показывают, что упрощёнными асимптотическими формулами можно пользоваться при расстоянии до источника 30 км и более.

На рис.2 показана модель горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью в области  $V_M$ , возбуждаемой вертикальным магнитным диполем, расположенным на поверхности земли. Трёхмерное тело в области  $V_M$  имеет проводимость  $\sigma_M(x, y, z)$  и

толщину  $h_M$ . Это тело моделирует море с выдвигающимся в него полуостровом.

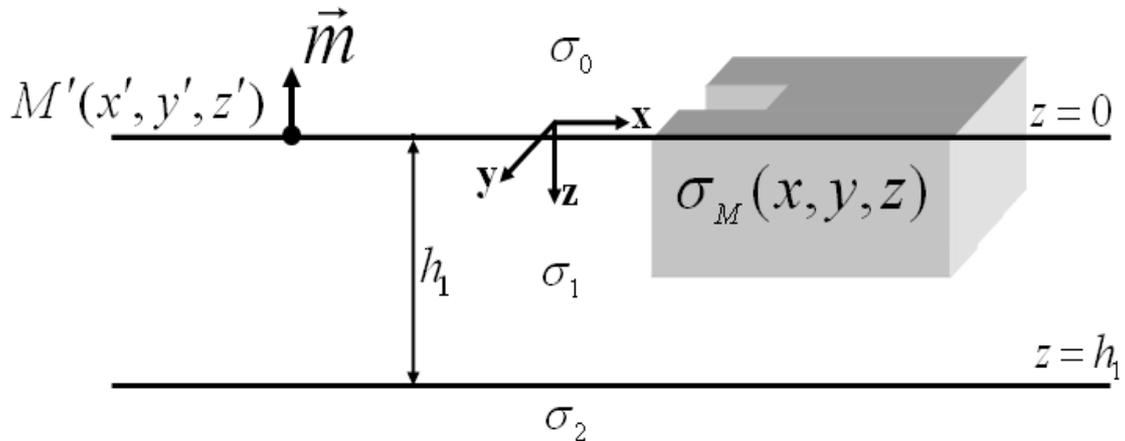


Рис.2. Модель горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью, возбуждаемой вертикальным магнитным диполем. Тело моделирует море с выдвигающимся в него полуостровом.

Для решения задачи электромагнитного зондирования неоднородной среды применим метод интегральных токов [3]. Используя тензорную функцию Грина [3], можно поля во всём пространстве записать в виде

$$\vec{E}(M') = \vec{E}^N(M') + \int_V \hat{G}_E(M', M) \vec{j}(M) dv_M, \quad (34)$$

$$\vec{H}(M') = \vec{H}^N(M') + \int_V \hat{G}_H(M', M) \vec{j}(M) dv_M, \quad (35)$$

где  $\vec{E}^N$  и  $\vec{H}^N$  – нормальное электрическое и магнитное поле, возбуждаемое в горизонтально однородной слоистой среде вертикальным магнитным диполем,  $\vec{j}(M) = \sigma_a(M) \vec{E}(M)$  – избыточный ток в неоднородности. Аномальная проводимость  $\sigma_a$  равна разности между проводимостью неоднородности и проводимостью горизонтально однородной слоистой среды  $\sigma_a = \sigma_T - \sigma_1$ .

Выражение (34) даёт интегральное уравнение для плотности избыточного тока  $\vec{j}(M) = \sigma_a(M) \vec{E}(M)$ :

$$\vec{j}(M') - \sigma_a(M') \int_V \hat{G}_E(M', M) \vec{j}(M) dv_M = \sigma_a(M') \vec{E}^N(M'), \quad M' \in V. \quad (36)$$

Определив из (36)  $\vec{j}(M')$ , мы легко с помощью (34)-(35) вычислим электрическое и магнитное поле во всём пространстве.

Как показано в работе [3], для расчёта ядра интегрального уравнения (36) надо вычислить фундаментальную функцию слоистой

задачи  $U_\gamma^\delta(\lambda, z, z')$ . Параметр  $\delta$  принимает значения 0 или 1, а параметр  $\gamma$  принимает значения  $\mu$  или  $\varepsilon'$ , где  $\varepsilon' = \varepsilon + i\sigma/\omega$  – комплексная диэлектрическая проницаемость.

При этом функции  $U_\gamma^\delta$  являются решениями следующих граничных задач:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\gamma(z)} \frac{dU_\gamma^\delta}{dz} \right) - \frac{\eta^2(z)}{\gamma(z)} U_\gamma^\delta = 0, \quad (z \neq z'), \quad (37)$$

где  $\eta^2 = \lambda^2 - k^2(z)$ ,  $\text{Re}(\eta) > 0$ ,

$$[U_\gamma^\delta] = -2\delta\Delta(z - z'), \quad (38)$$

$$\left[ \frac{1}{\gamma} \frac{dU_\gamma^\delta}{dz} \right] = -2(1 - \delta)\Delta(z - z'), \quad (39)$$

$$U_\gamma^\delta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Рассмотрим алгоритм расчёта фундаментальной функции в первом слое для двухслойной среды, то есть,

$$\gamma(z) = \begin{cases} \gamma_0 & \text{при } z < 0, \\ \gamma_1 & \text{при } 0 < z < h_1, \\ \gamma_2 & \text{при } z > h_1. \end{cases} \quad (41)$$

Такая фундаментальная функция имеет вид

$$U_\gamma^\delta(z) = \begin{cases} C_0 e^{\eta_0 z} & \text{при } z < 0, \\ C_1 e^{\eta_1 z} + D_1 e^{-\eta_1 z} & \text{при } 0 < z < z', \\ C_2 e^{\eta_2 z} + D_2 e^{-\eta_2 z} & \text{при } z' < z < h_1, \\ D_3 e^{-\eta_2 z} & \text{при } z > h_1. \end{cases} \quad (42)$$

Из условий (38) – (39) при  $\delta = 0$ , когда разрывна производная, а сама функция непрерывна, получим систему уравнений:

$$C_1 + D_1 = C_0, \quad (43)$$

$$C_1 - D_1 = p_1 C_0, \quad (44)$$

$$C_2 e^{\eta_1 z'} + D_2 e^{-\eta_1 z'} = C_1 e^{\eta_1 z'} + D_1 e^{-\eta_1 z'}, \quad (45)$$

$$C_2 e^{\eta_1 z'} - D_2 e^{-\eta_1 z'} = C_1 e^{\eta_1 z'} - D_1 e^{-\eta_1 z'} - \frac{2\gamma_1}{\eta_1}, \quad (46)$$

$$D_3 e^{-\eta_2 h_1} = C_2 e^{\eta_1 h_1} + D_2 e^{-\eta_1 h_1}, \quad (47)$$

$$D_3 e^{-\eta_2 h_1} = -p_2 (C_2 e^{\eta_1 h_1} - D_2 e^{-\eta_1 h_1}), \quad (48)$$

где

$$p_1 = \frac{\eta_0 \cdot \gamma_1}{\eta_1 \cdot \gamma_0}, \quad (49)$$

$$p_2 = \frac{\eta_1 \cdot \gamma_2}{\eta_2 \cdot \gamma_1}. \quad (50)$$

Из уравнений (43) – (44) получим

$$D_1 = a C_1, \quad (51)$$

а из уравнений (47) – (48) получим

$$D_2 = -b C_2 e^{2\eta_1 h_1}, \quad (52)$$

где

$$a = \frac{1 - p_1}{1 + p_1}, \quad (53)$$

$$b = \frac{1 + p_2}{1 - p_2}. \quad (54)$$

Складывая уравнения (45) – (46), будем иметь

$$C_2 = C_1 - \frac{\gamma_1}{\eta_1} e^{-\eta_1 z'}, \quad (55)$$

а вычитая эти уравнения, получим

$$D_2 = D_1 + \frac{\gamma_1}{\eta_1} e^{\eta_1 z'}. \quad (56)$$

Учитывая соотношения (51) – (52), будем иметь

$$b C_2 e^{2\eta_1 h_1} = a C_1 + \frac{\gamma_1}{\eta_1} e^{\eta_1 z'}. \quad (57)$$

Исключая  $C_2$  из системы уравнений (56) – (57), найдём  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \frac{b e^{-\eta_1 z'} - e^{\eta_1 (z' - 2h_1)}}{a e^{-2\eta_1 h_1} + b}. \quad (58)$$

При  $0 < z < z'$

$$\begin{aligned} U_\gamma^0(z) &= C_1 (e^{\eta_1 z} + a e^{-\eta_1 z}) = \\ &= \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \frac{[b e^{-\eta_1 z'} - e^{\eta_1 (z' - 2h_1)}] \cdot [e^{\eta_1 z} + a e^{-\eta_1 z}]}{a e^{-2\eta_1 h_1} + b} = \\ &= \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \frac{b e^{\eta_1 (z - z')} + a b e^{-\eta_1 (z + z')} - e^{\eta_1 (z + z' - 2h_1)} - a e^{\eta_1 (z' - z - 2h_1)}}{a e^{-2\eta_1 h_1} + b}. \end{aligned} \quad (58)$$

Учитывая соотношения (55) – (56), при  $z' < z < h_1$  получим

$$\begin{aligned} U_\gamma^0(z) &= \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \frac{b e^{\eta_1 (z - z')} + a b e^{-\eta_1 (z + z')} - e^{\eta_1 (z + z' - 2h_1)} - a e^{\eta_1 (z' - z - 2h_1)}}{a e^{-2\eta_1 h_1} + b} - \frac{\gamma_1}{\eta_1} e^{-\eta_1 (z' - z)} + \frac{\gamma_1}{\eta_1} e^{\eta_1 (z' - z)} = \\ &= \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \frac{b e^{\eta_1 (z' - z)} + a b e^{-\eta_1 (z + z')} - e^{\eta_1 (z + z' - 2h_1)} - a e^{\eta_1 (z - z' - 2h_1)}}{a e^{-2\eta_1 h_1} + b}. \end{aligned} \quad (59)$$

Таким образом,

$$U_{\gamma}^0(z) = \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \frac{abe^{-\eta_1(z+z')} - e^{\eta_1(z+z'-2h_1)}}{ae^{-2\eta_1 h_1} + b} + \frac{\gamma_1}{\eta_1(ae^{-2\eta_1 h_1} + b)} \cdot \begin{cases} be^{\eta_1(z-z')} - ae^{\eta_1(z'-z-2h_1)} & \text{при } 0 < z < z', \\ be^{\eta_1(z'-z)} - ae^{\eta_1(z-z'-2h_1)} & \text{при } z' < z < h. \end{cases} \quad (60)$$

Чтобы упростить выражение (60) и выделить член с особенностью в явном виде, добавим к формуле (60) и вычтем величину

$$\frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot e^{-\eta_1|z-z'|} = \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \begin{cases} e^{\eta_1(z-z')} & \text{при } 0 < z < z', \\ e^{\eta_1(z'-z)} & \text{при } z' < z < h. \end{cases} \quad (61)$$

Тогда получим

$$U_{\gamma}^0(z) = \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \left\{ e^{-\eta_1|z-z'|} + \frac{abe^{-\eta_1(z+z')} - e^{\eta_1(z+z'-2h_1)}}{ae^{-2\eta_1 h_1} + b} \right\} + \frac{\gamma_1}{\eta_1(ae^{-2\eta_1 h_1} + b)} \cdot \begin{cases} be^{\eta_1(z-z')} - ae^{\eta_1(z'-z-2h_1)} + (ae^{-2\eta_1 h_1} + b)e^{\eta_1(z-z')} & \text{при } 0 < z < z', \\ be^{\eta_1(z'-z)} - ae^{\eta_1(z-z'-2h_1)} + (ae^{-2\eta_1 h_1} + b)e^{\eta_1(z'-z)} & \text{при } z' < z < h. \end{cases} \quad (62)$$

После упрощений будем иметь одинаковое представление для функции  $U_{\gamma}^0(z)$  при  $0 < z < z'$  и при  $z' < z < h_1$ :

$$U_{\gamma}^0(z) = \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \left\{ e^{-\eta_1|z-z'|} + \frac{abe^{-\eta_1(z+z')} - e^{\eta_1(z+z'-2h_1)} - ae^{\eta_1(z'-z-2h_1)} - ae^{\eta_1(z-z'-2h_1)}}{ae^{-2\eta_1 h_1} + b} \right\} = \frac{\gamma_1}{\eta_1} \cdot \left\{ e^{-\eta_1|z-z'|} + \frac{be^{-\eta_1(z+z')} - \tilde{a}e^{\eta_1(z+z'-2h_1)} - e^{\eta_1(z'-z-2h_1)} - e^{\eta_1(z-z'-2h_1)}}{e^{-2\eta_1 h_1} + \tilde{a}b} \right\}, \quad (63)$$

где

$$\tilde{a} = \frac{1}{a} = \frac{1+p_1}{1-p_1}. \quad (64)$$

При  $\delta=1$ , когда разрыв терпит сама функция, в системе уравнений (43) – (48) меняются только два уравнения (45) – (46), которые принимают вид

$$C_2 e^{\eta_1 z'} + D_2 e^{-\eta_1 z'} = C_1 e^{\eta_1 z'} + D_1 e^{-\eta_1 z'} - 2, \quad (65)$$

$$C_2 e^{\eta_1 z'} - D_2 e^{-\eta_1 z'} = C_1 e^{\eta_1 z'} - D_1 e^{-\eta_1 z'}. \quad (66)$$

Складывая уравнения (65) – (66), будем иметь

$$C_2 = C_1 - e^{-\eta_1 z'}, \quad (67)$$

а вычитая эти уравнения, получим

$$D_2 = D_1 - e^{\eta_1 z'}. \quad (68)$$

Учитывая соотношения (51) – (52), будем иметь

$$-bC_2 e^{2\eta_1 h_1} = aC_1 - e^{\eta_1 z'}. \quad (69)$$

Исключая  $C_2$  из уравнений (67), (69), найдём  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{e^{\eta_1 z'} + be^{\eta_1(2h_1 - z')}}{a + be^{2\eta_1 h_1}}. \quad (70)$$

При  $0 < z < z'$

$$\begin{aligned} U_\gamma^1(z) &= C_1 (e^{\eta_1 z} + ae^{-\eta_1 z}) = \\ &= \frac{[e^{\eta_1 z'} + be^{\eta_1(2h_1 - z')}] \cdot [e^{\eta_1 z} + ae^{-\eta_1 z}]}{a + be^{2\eta_1 h_1}} = \\ &= \frac{e^{\eta_1(z+z')} + be^{\eta_1(2h_1 - z' + z)} + ae^{\eta_1(z'-z)} + abe^{\eta_1(2h_1 - z' - z)}}{a + be^{2\eta_1 h_1}}. \end{aligned} \quad (71)$$

Учитывая соотношения (67) – (68) при  $z' < z < h_1$ , получим

$$\begin{aligned} U_\gamma^1(z) &= \frac{e^{\eta_1(z+z')} + be^{\eta_1(2h_1 - z' + z)} + ae^{\eta_1(z'-z)} + abe^{\eta_1(2h_1 - z' - z)}}{a + be^{2\eta_1 h_1}} - e^{\eta_1(z-z')} - e^{\eta_1(z'-z)} = \\ &= \frac{e^{\eta_1(z+z')} + abe^{\eta_1(2h_1 - z' - z)} - ae^{\eta_1(z-z')} - be^{\eta_1(2h_1 + z' - z)}}{a + be^{2\eta_1 h_1}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} U_\gamma^1(z) &= \frac{e^{\eta_1(z+z')} + abe^{\eta_1(2h_1 - z' - z)}}{a + be^{2\eta_1 h_1}} + \\ &+ \frac{1}{a + be^{2\eta_1 h_1}} \cdot \begin{cases} ae^{\eta_1(z'-z)} + be^{\eta_1(2h_1 - z' + z)} & \text{при } 0 < z < z', \\ -ae^{\eta_1(z-z')} - be^{\eta_1(2h_1 + z' - z)} & \text{при } z' < z < h. \end{cases} \end{aligned} \quad (73)$$

Чтобы упростить выражение (73) и выделить член с особенностью в явном виде, добавим к формуле (73) и вычтем величину

$$- \text{sign}(z - z') e^{-\eta_1 |z - z'|} = \begin{cases} e^{\eta_1(z-z')} & \text{при } 0 < z < z', \\ -e^{\eta_1(z'-z)} & \text{при } z' < z < h. \end{cases} \quad (74)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} U_\gamma^1(z) &= -\text{sign}(z - z') e^{-\eta_1 |z - z'|} + \frac{e^{\eta_1(z+z')} + abe^{\eta_1(2h_1 - z' - z)}}{a + be^{2\eta_1 h_1}} + \\ &+ \frac{1}{a + be^{2\eta_1 h_1}} \cdot \begin{cases} ae^{\eta_1(z'-z)} + be^{\eta_1(2h_1 - z' + z)} - e^{\eta_1(z-z')} (a + be^{2\eta_1 h_1}) & \text{при } 0 < z < z', \\ -ae^{\eta_1(z-z')} - be^{\eta_1(2h_1 + z' - z)} + e^{\eta_1(z'-z)} (a + be^{2\eta_1 h_1}) & \text{при } z' < z < h. \end{cases} \end{aligned} \quad (75)$$

После упрощений будем иметь одинаковое представление для функции  $U_\gamma^1(z)$  при  $0 < z < z'$  и при  $z' < z < h_1$ :

$$U_\gamma^1(z) = -\text{sign}(z - z')e^{-\eta_1|z-z'|} + \frac{e^{\eta_1(z+z')} + abe^{\eta_1(2h_1-z'-z)} + ae^{\eta_1(z'-z)} - ae^{\eta_1(z-z')}}{a + be^{2\eta_1 h_1}}. \quad (76)$$

Чтобы избавиться от возрастающих экспонент в формуле (76), разделим числитель и знаменатель в этой формуле на  $a e^{2\eta_1 h_1}$ , тогда получим:

$$U_\gamma^1(z) = -\text{sign}(z - z')e^{-\eta_1|z-z'|} + \frac{\tilde{a}e^{-\eta_1(2h_1-z-z')} + be^{-\eta_1(z'+z)} + e^{-\eta_1(2h_1-z'+z)} - e^{-\eta_1(2h_1-z+z')}}{e^{-2\eta_1 h_1} + \tilde{a}b}. \quad (77)$$

По данному алгоритму были проведены численные исследования электромагнитного поля в море при различной его береговой линии. Рассмотрено 2 случая: 1) полуостров, 2) залив.

Рассмотрим сначала распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока

$$J = \sqrt{|j_x|^2 + |j_y|^2}$$

в горизонтальной плоскости, проходящей через середину высоты неоднородности при  $z = h_M / 2$  для случая полуострова.

На рис.3 для случая полуострова приводится распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $y$  при различных значениях  $x$ .

Начало координат находится на поверхности земли над центром неоднородности по оси  $Oy$  и у левого края неоднородности по оси  $Ox$ . Расстояние вдоль оси  $Ox$  и оси  $Oy$  указывается в метрах. Вертикальный магнитный диполь, возбуждающий поле, расположен на поверхности земли в 30 000м слева от неоднородности в точке

$$M' = (x', y', z') = (-30\ 000, 0, 0).$$

Возбуждающее неоднородность поле магнитного диполя рассчитывается по асимптотической формуле (33) и нормировано на значение этого поля на поверхности первого слоя в начале координат, причём

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0,001 \frac{Cm}{m}, \quad h_1 = 2000m, \quad \sigma_2 = 0,0001 \frac{Cm}{m},$$

$$\sigma_M = 1 \frac{C_M}{M}, \quad h_M = 400 \text{ м}, \quad \Lambda_1 = \frac{2\pi}{\text{Re } k_1} = 10000 \text{ м},$$

длина и ширина неоднородности в форме прямоугольного параллелепипеда составляют 4800 м вдоль оси  $Ox$  и 9600 м вдоль оси  $Oy$ .

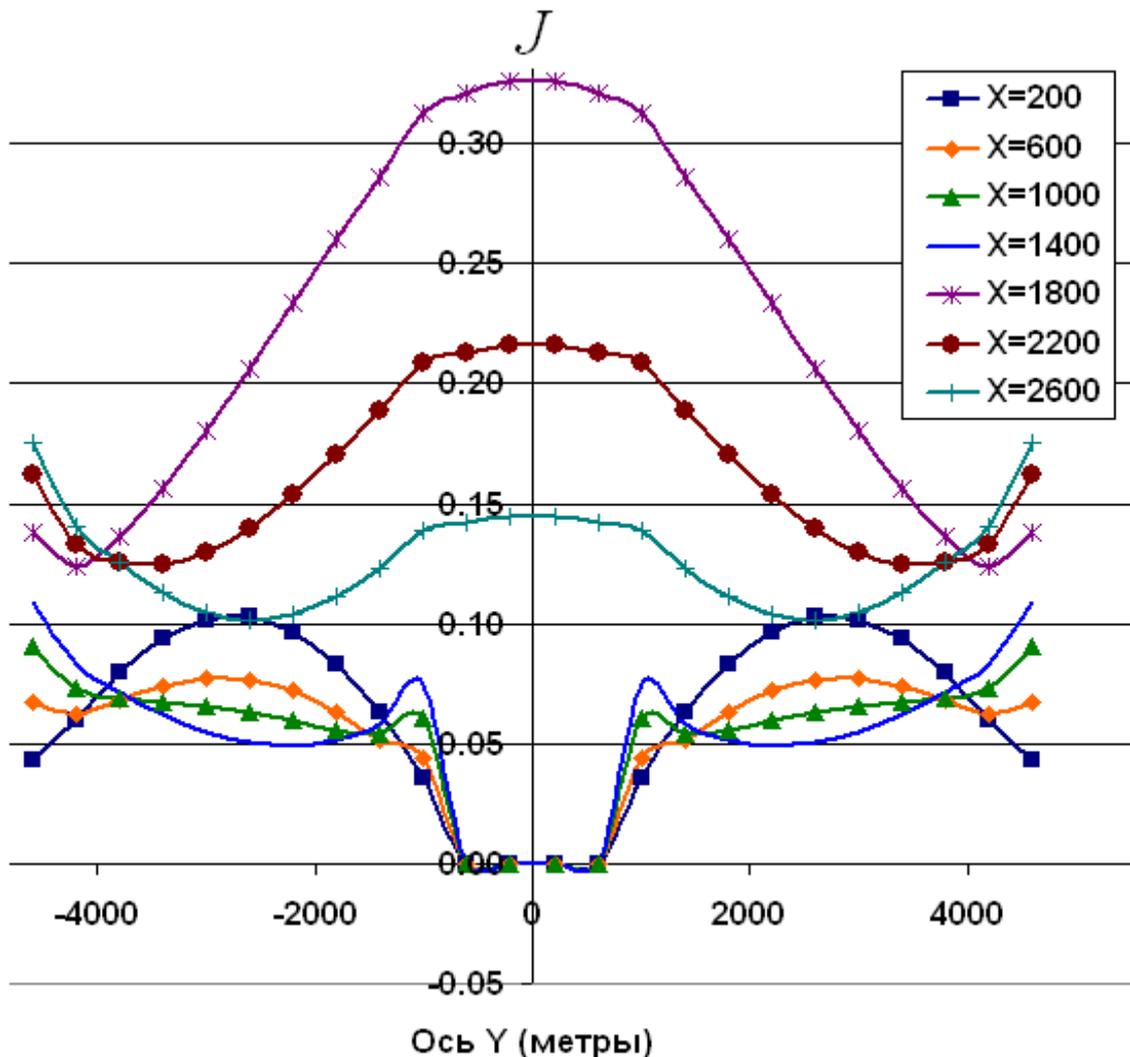


Рис. 3. Распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $y$  при различных значениях  $x$  для случая полуострова

Внутри этой неоднородности есть прямоугольная впадина вправо, моделирующая полуостров, с проводимостью  $\sigma_1 = 0,001 \frac{C_M}{M}$ , которая по оси  $Ox$  выступает вправо в море с проводимостью  $\sigma_M = 1 \frac{C_M}{M}$  на 1600 м,

а по оси  $Oy$  простирается на 1600м и расположена по центру неоднородности.

На рис.4 приводится распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $x$  при различных значениях  $y$  для случая полуострова.

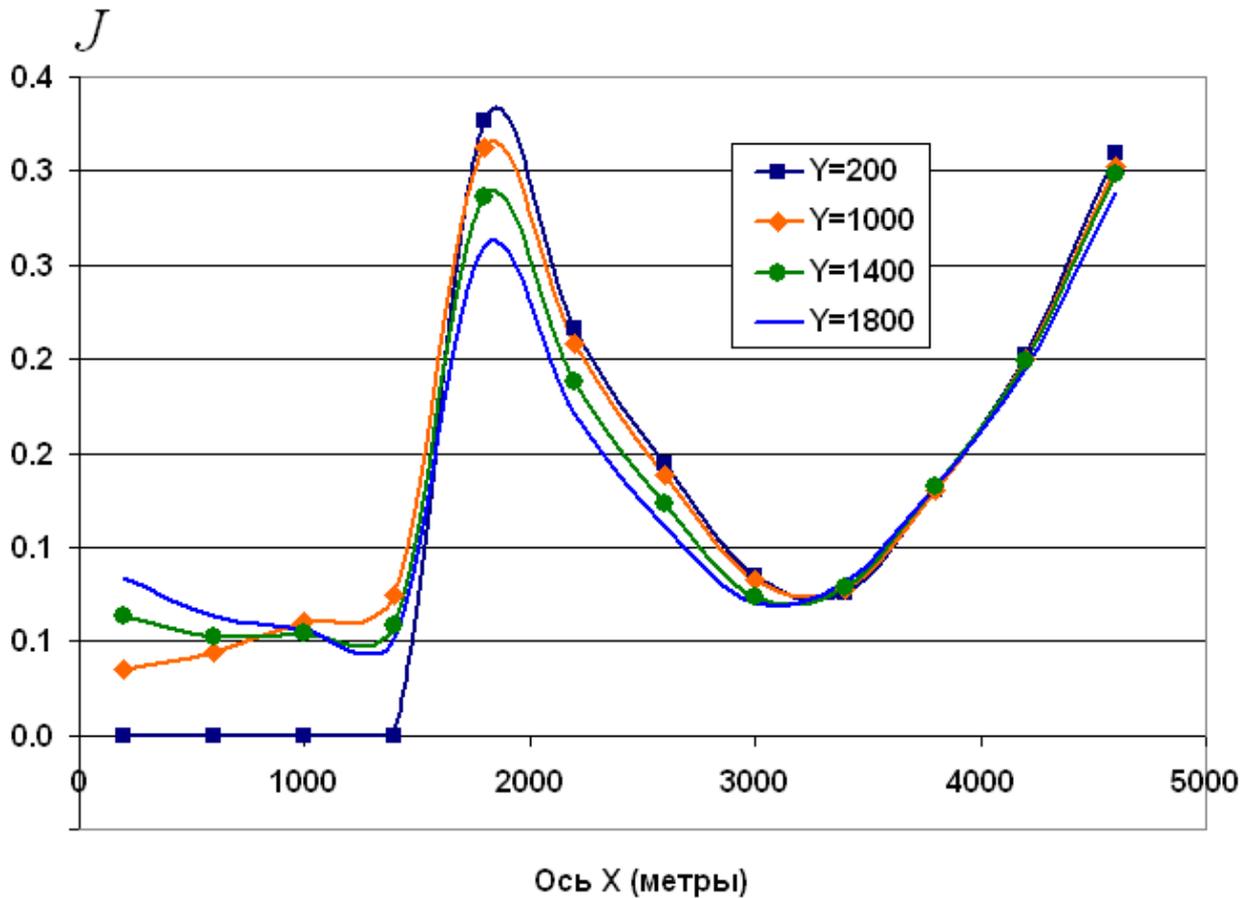


Рис. 4. Распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $x$  при различных значениях  $y$  для случая полуострова.

Для большей наглядности на рис.5 для случая полуострова приводится распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $x$  и координаты  $y$ . Затемнённая горизонтальная площадка слева на трёхмерной поверхности соответствует полуострову, по которому избыточный ток не течёт.

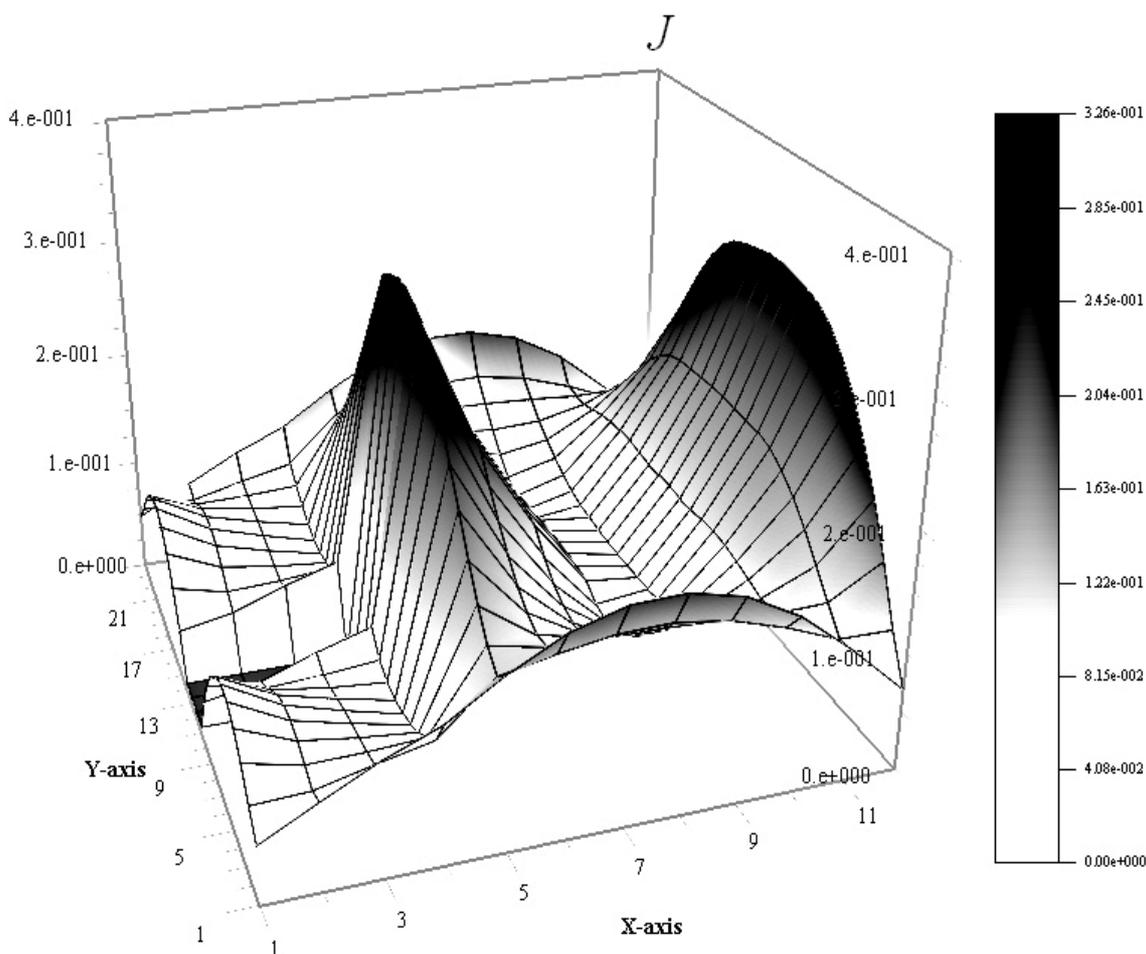


Рис. 5. Распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $x$  и координаты  $y$  для случая полуострова.

Из приведённых рис.3 – рис.5 хорошо видно, что наличие полуострова отодвигает береговой скин-эффект у левого берега дальше в море. У противоположного правого берега, где нет полуострова, скин-эффект наблюдается у самого берега.

Рассмотрим теперь случай наличия в море залива, когда береговая линия вдаётся в берег. На рис.6 показана модель горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью в области  $V_M$ , возбуждаемой вертикальным магнитным диполем, расположенным на поверхности земли. Трёхмерное тело в области  $V_M$  имеет проводимость  $\sigma_M(x, y, z)$  и толщину  $h_M$ . Это тело моделирует море с заливом.

Начало координат находится на поверхности земли над центром неоднородности по оси  $Oy$  и у левого края неоднородности по оси  $Ox$ . Расстояние вдоль оси  $Ox$  и оси  $Oy$  указывается в метрах. Вертикальный магнитный диполь, возбуждающий поле, расположен на поверхности земли в  $30\,000\text{ м}$  слева от неоднородности в точке

$$M' = (x', y', z') = (-30\,000, 0, 0).$$

Возбуждающее неоднородность поле магнитного диполя рассчитывается по асимптотической формуле (33) и нормировано на значение этого поля на поверхности первого слоя в начале координат, причём

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0,001 \frac{C_M}{\text{м}}, \quad h_1 = 2000\text{ м}, \quad \sigma_2 = 0,0001 \frac{C_M}{\text{м}},$$

$$\sigma_M = 1 \frac{C_M}{\text{м}}, \quad h_M = 400\text{ м}, \quad \Lambda_1 = \frac{2\pi}{\text{Re } k_1} = 10000\text{ м},$$

длина и ширина неоднородности в форме прямоугольного параллелепипеда составляют  $4800\text{ м}$  вдоль оси  $Ox$  и  $9600\text{ м}$  вдоль оси  $Oy$ . Внутри этой неоднородности есть прямоугольный выступ влево, моделирующий залив, с проводимостью  $\sigma_M = 1 \frac{C_M}{\text{м}}$ , который по оси  $Ox$  выступает влево в сушу с проводимостью  $\sigma_1 = 0,001 \frac{C_M}{\text{м}}$  на  $1600\text{ м}$ , а по оси  $Oy$  простирается на  $3200\text{ м}$  и расположен по центру неоднородности.

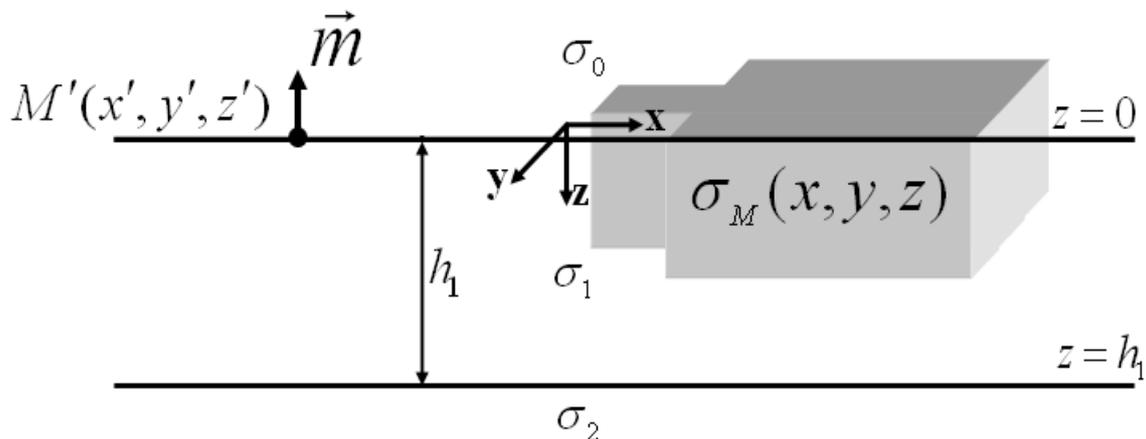


Рис.6. Модель горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью, возбуждаемой вертикальным магнитным диполем. Тело моделирует море с заливом.

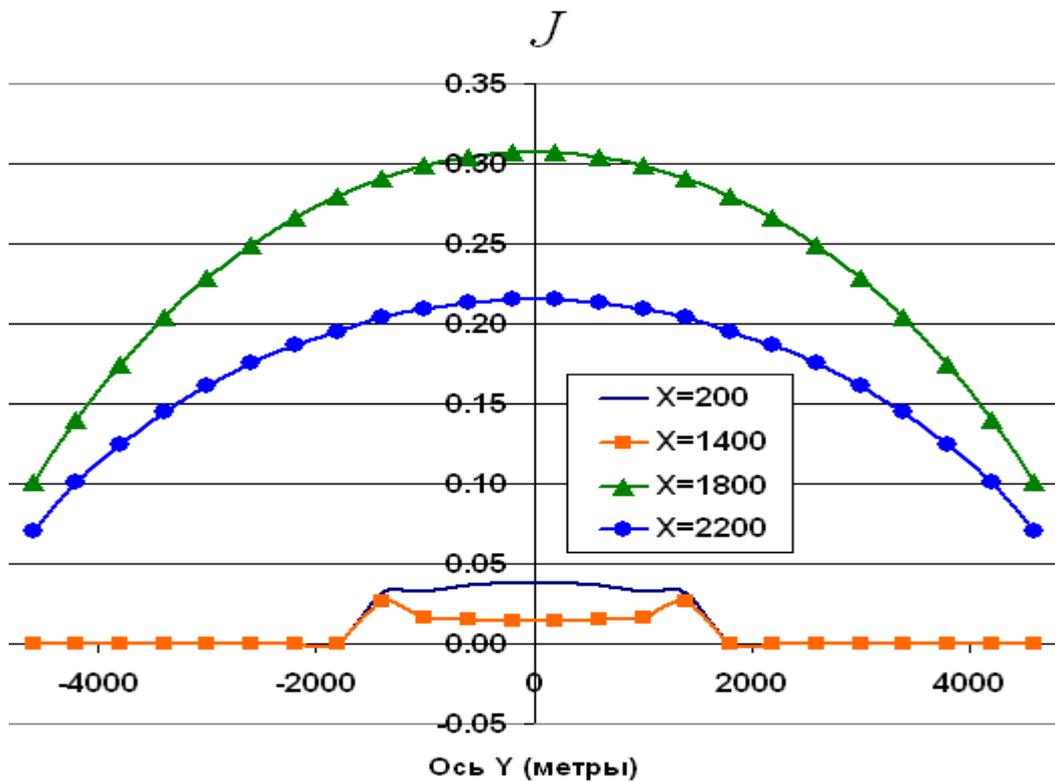


Рис. 7. Распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $y$  при различных значениях  $x$  для случая залива.

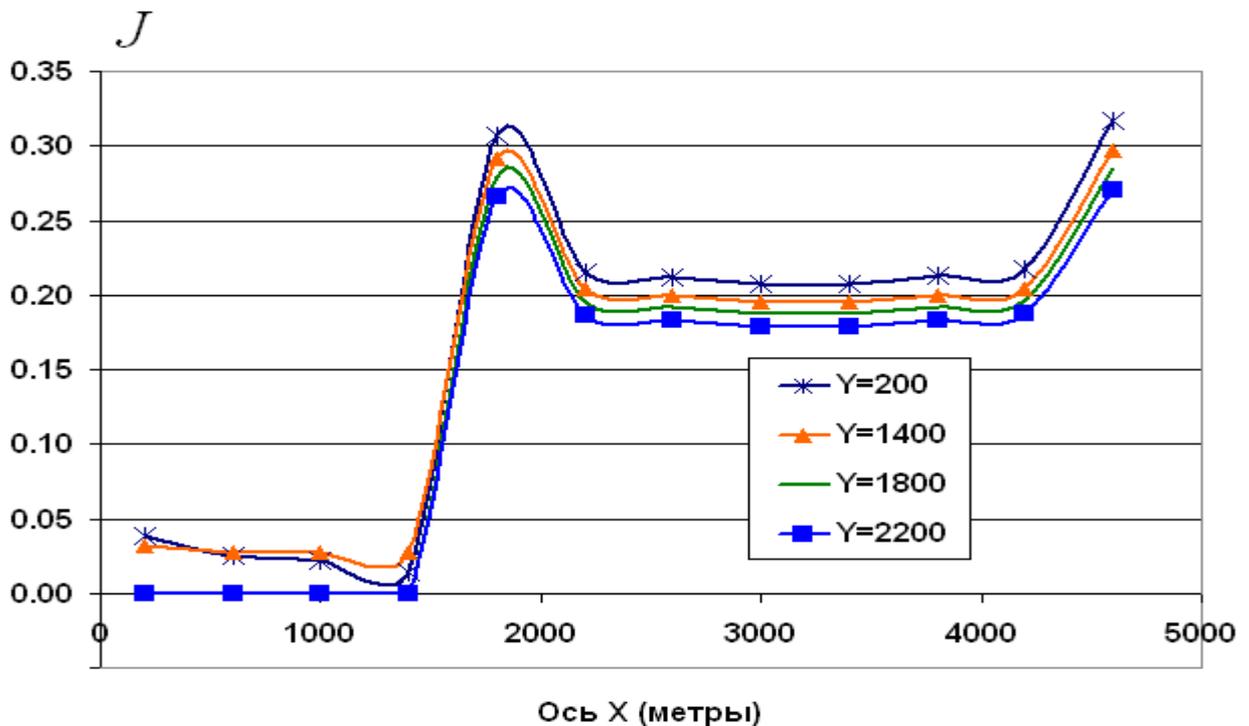


Рис. 8. Распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $x$  при различных значениях  $y$  для случая залива.

На рис.7 приводится распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $y$  при различных значениях  $x$  для случая залива.

На рис.8 приводится распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $x$  при различных значениях  $y$  для случая залива

Для большей наглядности на рис.9 для случая залива приводится распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $x$  и координаты  $y$ .

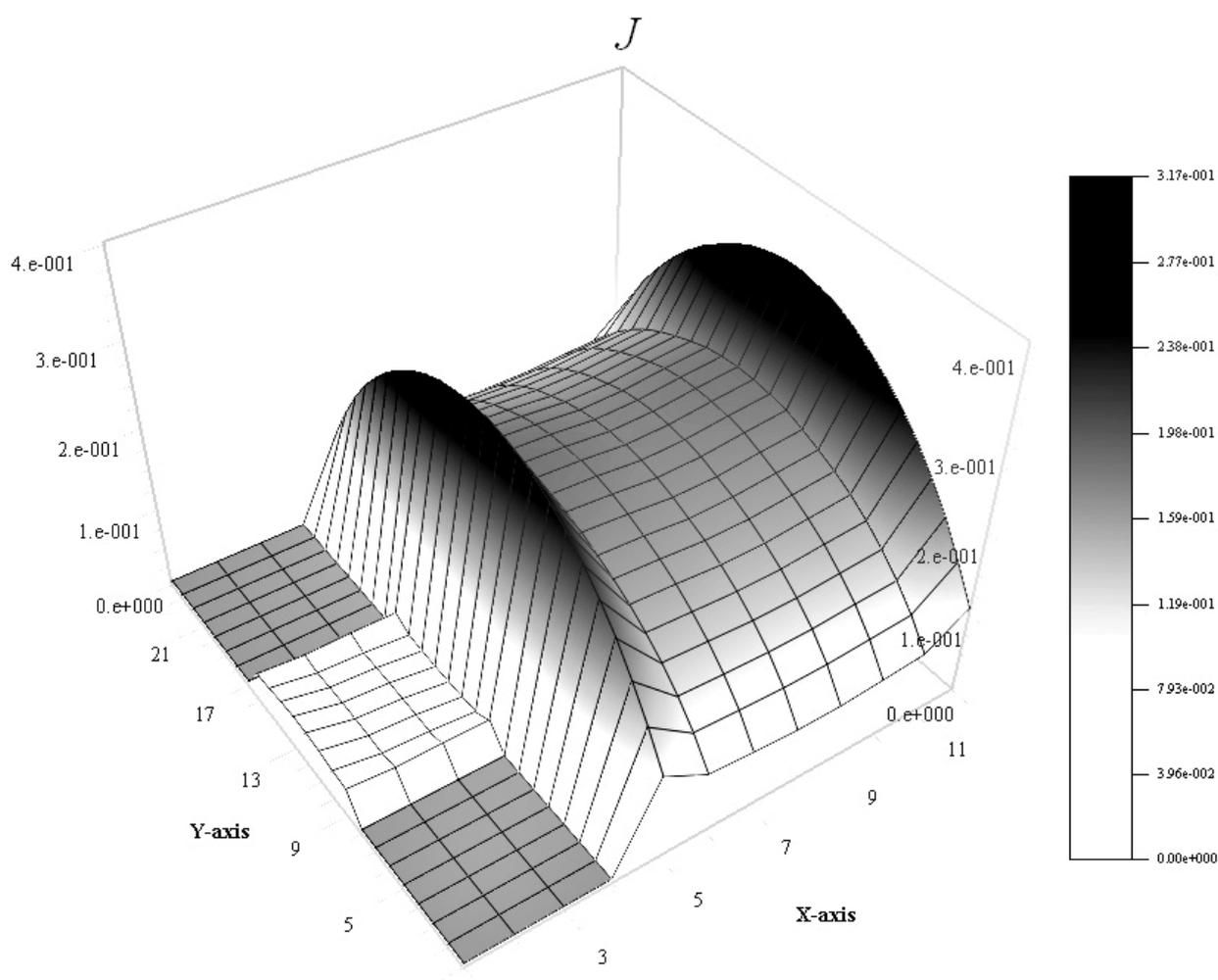


Рис. 9. Распределение модуля горизонтальной компоненты вектора плотности избыточного тока  $J$  в зависимости от координаты  $x$  и координаты  $y$  для случая залива.

Две затемнённые горизонтальные площадки слева на трёхмерной поверхности соответствуют суше, по которой избыточный ток не течёт.

Из приведённых рис. 7– рис.9 хорошо видно, что в залив ток из моря не затекает. Мощный скин-эффект в заливе наблюдается далеко от берега вдоль основной общей линии берега.

Из рис.7–рис.8 видно, что внутри залива ближе к берегу ток немного больше. При этом наблюдается очень слабо выраженный скин-эффект.

### Литература

1. Дмитриев В.И. Математическое моделирование влияния ионосферы на электромагнитное зондирование // Прикладная математика и информатика № 31, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2009.
2. Тихонов А.Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. ДАН 125, №5, 982-985.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике.- М.: МАКС Пресс, 2008.
4. Барашков И.С., Дмитриев В.И. Математическое моделирование электромагнитного поля удалённых источников в неоднородной среде // Прикладная математика и информатика № 32, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2009.