

*И.С.Барашков, В.И.Дмитриев*

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ Н-ПОЛЯРИЗАЦИИ\*

Расчёт электромагнитных полей в неоднородных средах необходим во многих прикладных задачах. Одной из наиболее значимых проблем является построение методов решения прямых и обратных задач электромагнитного зондирования неоднородной среды с целью определения её строения. Рассмотрим разностный метод расчёта двумерной задачи.

В двумерном случае электромагнитное поле распадается на две независимых поляризации. Пусть среда и источники поля не зависят от координаты  $x$ . Тогда в уравнениях Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu \vec{H} \end{cases} \quad (1)$$

положим

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0 \quad (2)$$

и получим:

1. E – поляризованное поле  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ ,  $\vec{H} = (0, H_y, H_z)$ :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z. \quad (4)$$

2. H– поляризованное поле  $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$ ,  $\vec{H} = (H_x, 0, 0)$ :

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y, \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\sigma E_z, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x. \quad (7)$$

Сначала рассмотрим случай H-поляризации, когда

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 11-05-12014 офи-м-2011 “Разработка новых подходов и вычислительных методов решения обратных задач электромагнитного морского зондирования при измерениях на морском дне”.

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0, \quad E_x = 0,$$

$$\vec{H} = (H_x, 0, 0), \quad \vec{E} = (0, E_y, E_z).$$

Уравнение для магнитного поля  $H_x = H(y, z)$  имеет вид:

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} H \right) + i\omega\mu H = 0 \quad \text{при} \quad z > 0 \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$H \Big|_{z=0} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} H(y, z) = 0, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} H(y, z) = H^0(z) \quad (9)$$

и условиями на границах разрыва проводимости  $\sigma(y, z)$

$$\left[ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial \nu} \right] = 0, \quad (10)$$

где  $H^0(z)$  – поле в горизонтально однородной слоистой среде,  $\nu$  – нормаль к границе разрыва проводимости  $\sigma(y, z)$ , а квадратными скобками обозначен разрыв функции.

Для вывода конечно разностного уравнения из дифференциального уравнения (4) применим интегро-интерполяционный метод, называемый также методом баланса. С помощью интерполяции найдём значение  $u_{j+\frac{1}{2},k}$  в центральной точке отрезка  $y_j \leq y \leq y_{j+1}$  по двум значениям  $u_{j,k}$  и  $u_{j+1,k}$  в крайних точках этого отрезка. Расположение точек, в которых находятся значения сеточной функции показано на рис. 1.

Линейно проинтерполируем на отрезке  $y_j \leq y \leq y_{j+\frac{1}{2}}$  функцию  $u$ .

Точно также линейно проинтерполируем эту функцию и на отрезке  $y_{j+\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+1}$ . В центральной точке отрезка в соответствии с формулой

(10) должно выполняться условие непрерывности

$$\left[ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0. \quad (11)$$

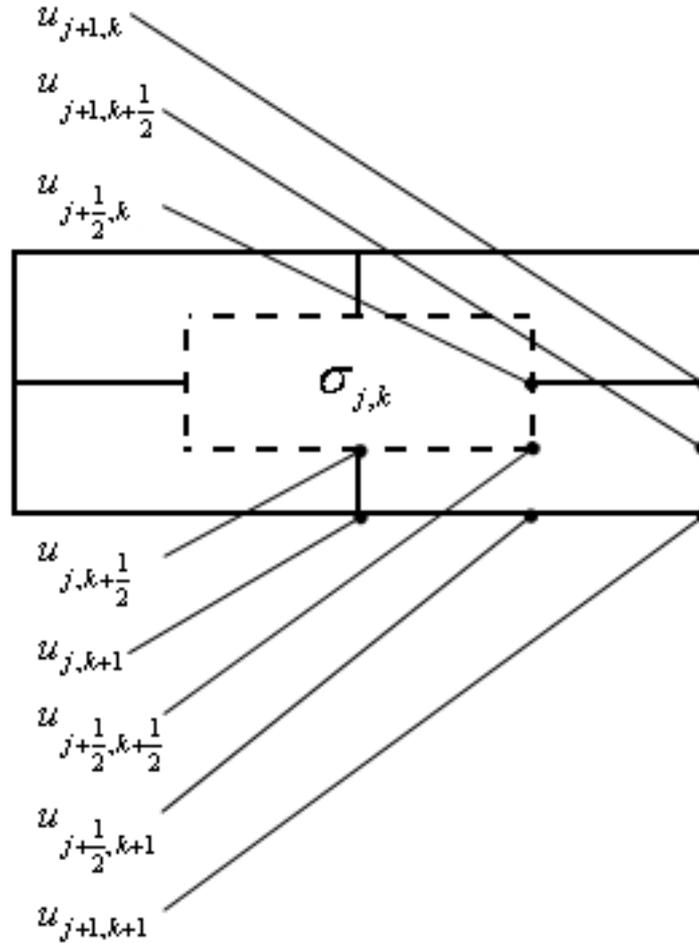


Рис.1. Фрагмент конечно разностной сетки.

На рисунке показано расположение значений сеточной функции с целыми и нецелыми индексами. Пунктирным прямоугольником обозначена область с постоянным значением проводимости  $\sigma(y, z) = \sigma_{j,k}$ .

Согласно этому условию

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y_{j+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sigma_{j+1,k}} \frac{u_{j+1,k} - u_{j+\frac{1}{2},k}}{0,5h_j} = \frac{1}{\sigma_{j,k}} \frac{u_{j+\frac{1}{2},k} - u_{j,k}}{0,5h_j}, \quad (12)$$

откуда

$$u_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{\sigma_{j,k} u_{j+1,k} + \sigma_{j+1,k} u_{j,k}}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j+1,k}}. \quad (13)$$

Подставляя это выражение для  $u_{j+\frac{1}{2},k}$  в формулу (12), получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_{j+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\sigma_{j+1,k}} \cdot \frac{u_{j+1,k} - \frac{\sigma_{j,k} u_{j+1,k} + \sigma_{j+1,k} u_{j,k}}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j+1,k}}}{0,5h_j} = \\ &= \frac{2}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j+1,k}} \cdot \frac{u_{j+1,k} - u_{j,k}}{h_j}. \end{aligned} \quad (14)$$

Совершенно аналогично, аппроксимируя производную по  $z$ , получим формулу, аналогичную формуле (13)

$$u_{j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_{j,k} u_{j,k+1} + \sigma_{j,k+1} u_{j,k}}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j+1,k}} \quad (15)$$

и формулу, аналогичную формуле (14)

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_{k+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\sigma_{j,k+1}} \cdot \frac{u_{j,k+1} - \frac{\sigma_{j,k} u_{j,k+1} + \sigma_{j,k+1} u_{j,k}}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j,k+1}}}{0,5h_k} = \\ &= \frac{2}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j,k+1}} \cdot \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k}}{h_k}. \end{aligned} \quad (16)$$

Проинтегрировав уравнение (8) по прямоугольнику при  $y_{j-\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+\frac{1}{2}}$ ,  $z_{k-\frac{1}{2}} \leq z \leq z_{k+\frac{1}{2}}$ , получим

$$\begin{aligned} &\left( \frac{2}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j+1,k}} u_y - \frac{2}{\sigma_{j-1,k} + \sigma_{j,k}} u_{\bar{y}} \right) \bar{h}_k + \\ &+ \left( \frac{2}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j,k+1}} u_z - \frac{2}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j,k-1}} u_{\bar{z}} \right) \bar{h}_j + i\omega\mu \cdot u_{j,k} \cdot \bar{h}_j \cdot \bar{h}_k = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\bar{h}_j = \frac{h_j + h_{j-1}}{2}, \quad \bar{h}_k = \frac{h_k + h_{k-1}}{2} \quad (18)$$

В конечно разностном уравнении (17) во внутренних точках сетки завязаны пять соседних значений сеточной функции  $u_{j,k}$ , которым соответствуют пять диагоналей в структуре матрицы системы линейных алгебраических уравнений.

Матрица системы получается ленточной с шириной ленты  $N_y + 1$ . Для решения системы линейных алгебраических уравнений применяется алгоритм разложения матрицы в произведение верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц. Алгоритм реализован для комплексных матриц в арифметике с двойной точностью.

В результате решения системы линейных алгебраических уравнений получим значения сеточной функции  $u_{j,k}$  с целочисленными индексами.

При более детальном анализе поведения магнитного поля уже после расчёта значений сеточной функции  $u_{j,k}$  с целочисленными индексами можно посчитать магнитное поле ещё и в дополнительных промежуточных точках в центре вертикальной границы области с проводимостью  $\sigma_{j,k}$  по формуле (13) и в центре горизонтальной границы этой области по аналогичной формуле (15).

Формулы (13) и (15) дают возможность посчитать значения магнитного поля только в части точек с нецелыми индексами. Чтобы посчитать значение магнитного поля во всех оставшихся точках с нецелыми индексами, надо иметь формулы для определения значения  $u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  в угловой

точке  $\left( y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}} \right)$  области с проводимостью  $\sigma_{j,k}$ .

Если

$$\sigma_{j,k} = \sigma_{j,k+1} \quad \text{и} \quad \sigma_{j+1,k} = \sigma_{j+1,k+1}, \quad (19)$$

то фактически у границы разрыва проводимости в точке  $\left( y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}} \right)$  нет угла и можно применить граничное условие. Значение  $u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  считается в этом случае по формуле аналогичной формуле (13):

$$u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_{j,k} u_{j+1,k+\frac{1}{2}} + \sigma_{j+1,k} u_{j,k+\frac{1}{2}}}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j+1,k}}. \quad (20)$$

Если

$$\sigma_{j,k} = \sigma_{j+1,k} \quad \text{и} \quad \sigma_{j,k+1} = \sigma_{j+1,k+1}, \quad (21)$$

то фактически у границы разрыва проводимости в точке  $\left( y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}} \right)$  опять нет угла и можно применить граничное условие. Значение  $u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  в этом случае можно считать по формуле аналогичной формуле (15):

$$u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_{j,k} u_{j+\frac{1}{2},k+1} + \sigma_{j,k+1} u_{j+\frac{1}{2},k}}{\sigma_{j,k} + \sigma_{j,k+1}}. \quad (22)$$

Если все четыре соседние проводимости равны между собой

$$\sigma_{j,k} = \sigma_{j,k+1} = \sigma_{j+1,k} = \sigma_{j+1,k+1}, \quad (23)$$

то значение  $u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  можно считать как по формуле (20) так и по формуле (22). Обе эти формулы в таком случае дают один и тот же результат

$$u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = 0.25(u_{j,k} + u_{j+1,k} + u_{j,k+1} + u_{j+1,k+1}). \quad (24)$$

Если не выполняются ни условия (19), ни условия (21), ни условия (23) и точка  $\left(y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}\right)$  является настоящей угловой точкой, то в такой точке граничное условие не выполняется. В модели грабена, приведённой на рис. 2 таких настоящих угловых точек всего четыре: две угловых точки на левой границе грабена и две на правой границе. В каждой угловой точке в модели грабена три соседних проводимости одинаковы, а четвёртая проводимость отличается от остальных проводимостей. Вычисление значений поля в этих угловых точках нужно не только для того, чтобы поле было посчитано обязательно во всех точках с нецелыми индексами без исключения. Вычисление поля в угловой точке границы разрыва проводимости – это самостоятельная важная и сложная задача математического моделирования электромагнитных полей в неоднородных средах, заслуживающая особого внимания.

Чтобы вывести конечно-разностное уравнение для определения значения  $u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  в настоящей угловой точке  $\left(y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}\right)$  области с проводимостью  $\sigma_{j,k}$  проинтегрируем уравнение (4) по прямоугольной области при  $y_j \leq y \leq y_{j+1}$ ,  $z_k \leq z \leq z_{k+1}$ . В этом прямоугольнике в общем случае содержатся подобласти с четырьмя различными проводимостями:

$$\sigma_{j,k} \text{ при } y_j \leq y \leq y_{j+\frac{1}{2}}, z_k \leq z \leq z_{k+\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_{j+1,k} \text{ при } y_{j+\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+1}, z_k \leq z \leq z_{k+\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_{j,k+1} \text{ при } y_j \leq y \leq y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}} \leq z \leq z_{k+1},$$

$$\sigma_{j+1,k+1} \text{ при } y_{j+\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+1}, z_{k+\frac{1}{2}} \leq z \leq z_{k+1}.$$

Сначала найдём интеграл от выражения  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  по прямоугольной области  $y_{j+\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+1}$ ,  $z_k \leq z \leq z_{k+\frac{1}{2}}$  с проводимостью  $\sigma_{j+1,k}$ . Этот интеграл равен

$$\int_{z_k}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\sigma_{j+1,k}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+1}} dz - \int_{z_k}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\sigma_{j+1,k}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+\frac{1}{2}}} dz$$

Проинтегрировав по всем четырём подобластям, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{z_k}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\sigma_{j+1,k}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+1}} dz - \int_{z_k}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\sigma_{j+1,k}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+\frac{1}{2}}} dz + \\ & + \int_{z_k}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\sigma_{j,k}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+\frac{1}{2}}} dz - \int_{z_k}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\sigma_{j,k}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_j} dz + \\ & + \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k+1}} \left( \frac{1}{\sigma_{j+1,k+1}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+1}} dz - \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k+1}} \left( \frac{1}{\sigma_{j+1,k+1}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+\frac{1}{2}}} dz + \\ & + \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k+1}} \left( \frac{1}{\sigma_{j,k+1}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+\frac{1}{2}}} dz - \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k+1}} \left( \frac{1}{\sigma_{j,k+1}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_j} dz \end{aligned}$$

Поскольку выполняется дифференциальное граничное условие (11) при  $y = y_{j+\frac{1}{2}}$ , то четыре интеграла из восьми взаимно уничтожатся и сумма упрощается, в ней пропадут интегралы при  $y = y_{j+\frac{1}{2}}$ :

$$\begin{aligned} & \int_{z_k}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\sigma_{j+1,k}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+1}} dz - \int_{z_k}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\sigma_{j,k}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_j} dz + \\ & + \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k+1}} \left( \frac{1}{\sigma_{j+1,k+1}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_{j+1}} dz - \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k+1}} \left( \frac{1}{\sigma_{j,k+1}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_j} dz \end{aligned}$$

Заменим интегралы по  $z$  на интегральные суммы по формуле трапеций:

$$\begin{aligned}
& \frac{h_k}{4\sigma_{j+1,k}} \left( \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_{j+1}, z=z_k} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_{j+1}, z=z_{k+\frac{1}{2}}} \right) - \\
& - \frac{h_k}{4\sigma_{j,k}} \left( \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_j, z=z_k} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_j, z=z_{k+\frac{1}{2}}} \right) + \\
& + \frac{h_k}{4\sigma_{j+1,k+1}} \left( \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_{j+1}, z=z_{k+\frac{1}{2}}} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_{j+1}, z=z_{k+1}} \right) - \\
& - \frac{h_k}{4\sigma_{j,k+1}} \left( \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_j, z=z_{k+\frac{1}{2}}} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_j, z=z_{k+1}} \right).
\end{aligned}$$

Теперь заменим производные по  $y$  на конечные разности. Поскольку сеточная функция  $u_{j,k}$  построена таким образом, что она удовлетворяет конечно разностным граничным условиям (12), то четыре конечно разностные производные в точках с целочисленными индексами взаимно уничтожаются и останутся только конечно разностные производные при  $z = z_{k+\frac{1}{2}}$ . В угловой точке  $\left( y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}} \right)$  граничные условия не выполняются, поэтому оставшиеся конечно разностные производные взаимно не уничтожаются. В результате получим выражение

$$\begin{aligned}
L_y &= \frac{h_k}{4\sigma_{j+1,k}} \cdot \frac{u_{j+1,k+\frac{1}{2}} - u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{0.5h_j} - \frac{h_k}{4\sigma_{j,k}} \cdot \frac{u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - u_{j,k+\frac{1}{2}}}{0.5h_j} + \\
& + \frac{h_k}{4\sigma_{j+1,k+1}} \cdot \frac{u_{j+1,k+\frac{1}{2}} - u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{0.5h_j} - \frac{h_k}{4\sigma_{j,k+1}} \cdot \frac{u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - u_{j,k+\frac{1}{2}}}{0.5h_j} = \\
& = \frac{h_k}{4} \left( \frac{1}{\sigma_{j+1,k}} + \frac{1}{\sigma_{j+1,k+1}} \right) \cdot \frac{u_{j+1,k+\frac{1}{2}} - u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{0.5h_j} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{h_k}{4} \left( \frac{1}{\sigma_{j,k}} + \frac{1}{\sigma_{j,k+1}} \right) \cdot \frac{u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - u_{j,k+\frac{1}{2}}}{0.5h_j} \quad (25)$$

В выражении для  $L_y$  есть только одно неизвестное значение  $u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  в угловой точке  $\left( y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}} \right)$ . Значения  $u_{j,k+\frac{1}{2}}$  и  $u_{j+1,k+\frac{1}{2}}$  вычисляются по формуле (15).

Аналогичным образом найдём интеграл от выражения  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ :

$$L_z = \frac{h_j}{4} \left( \frac{1}{\sigma_{j,k+1}} + \frac{1}{\sigma_{j+1,k+1}} \right) \cdot \frac{u_{j+\frac{1}{2},k+1} - u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{0.5h_k} - \frac{h_j}{4} \left( \frac{1}{\sigma_{j,k}} + \frac{1}{\sigma_{j+1,k}} \right) \cdot \frac{u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - u_{j+\frac{1}{2},k}}{0.5h_k} \quad (26)$$

В этом выражении для  $L_z$  тоже есть только одно неизвестное значение  $u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  в угловой точке  $\left( y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}} \right)$ .

Интегрируя всё соотношение (8) получим линейное уравнение

$$L_y \left( u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) + L_z \left( u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) + 0.25h_j h_k \cdot i\omega\mu (\sigma_{j,k} + \sigma_{j+1,k} + \sigma_{j,k+1} + \sigma_{j+1,k+1}) u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = 0 \quad (27)$$

с одним неизвестным значением  $u_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ , которое легко определяется из этого уравнения.

Для проверки правильности уравнения (27) на числовом примере рассмотрим двумерную задачу о расчёте магнитного поля в слоистой среде, когда в нижнем полупространстве имеется неоднородная зона (рис. 2). В качестве модели строения среды возьмём проводящую среду, в которой имеется неоднородная проводящая зона с переменной электропроводностью  $\sigma(M)$ ,  $M \in S$ , погруженная в слоистую среду  $\sigma_c(z)$ . Слоистая среда задаётся в виде:

$$\sigma_c(z) = \begin{cases} \sigma_0 \approx 0 & \text{при } z \in (-\infty, 0), \\ \sigma_1 = \text{const} & \text{при } z \in (0, h_1), \\ \sigma_2(z) & \text{при } z \in (h_1, \infty). \end{cases} \quad (28)$$

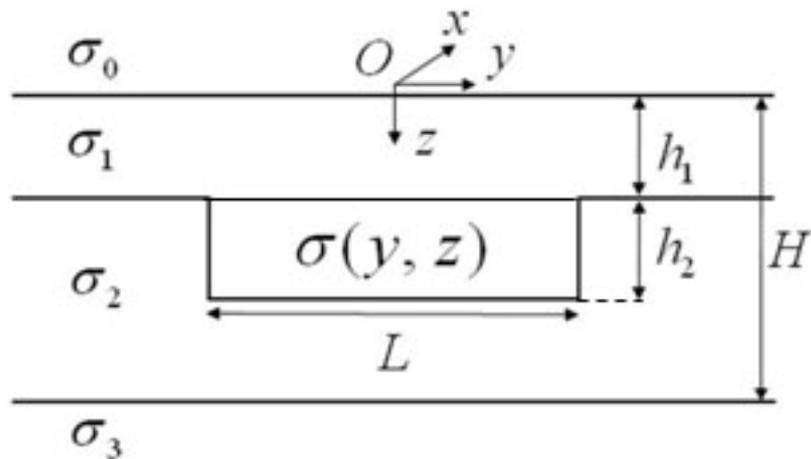


Рис. 2. Модель горизонтально однородной слоистой среды с двумерной неоднородностью

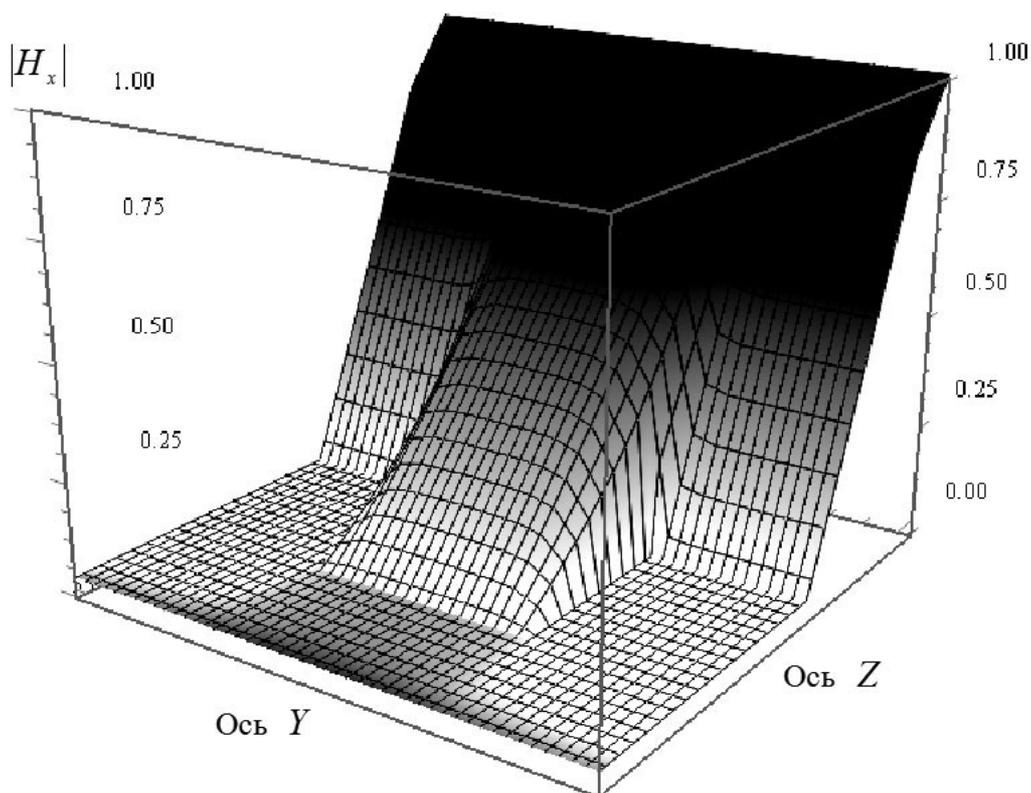


Рис.3. Модуль магнитного поля  $|H_x|$  на конечно разностной сетке

Неоднородная зона  $S$  находится при  $z \geq h_1$ . Типичной моделью горизонтально однородной слоистой среды с двумерной неоднородностью является модель грабена, для которой  $\sigma(y, z) = const = \sigma_1$ . Для этой модели проведены численные расчёты при

$$\begin{aligned}
 h_2/h_1 &= 1; & H/h_1 &= 201; & L/h_1 &= 10; \\
 \sigma_0 &= 0; & \sigma_2/\sigma_1 &= 0,001; & \sigma_3/\sigma_1 &= 1000; \\
 \tilde{\lambda}_1 &= 10,
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{\lambda}_1$  – относительная длина волны в первом слое

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{2\pi}{h_1 \operatorname{Re}(k_1)}.$$

На рис. 3 посчитанные на конечно разностной сетке значения модуля магнитного поля  $|H_x|$  представлены в виде трёхмерной поверхности. Эта поверхность расположена таким образом, что из четырёх значений, которые надо находить из уравнения (27) для угловых точек, хорошо видны три значения. На трёхмерном графике эти значения попали в угловые точки внизу поверхности у основания внутренней выпуклости этой поверхности. Несмотря на то, что эти значения были найдены совсем не так, как соседние значения, а с помощью специального уравнения (27), эти значения совсем не выделяются на фоне остальных соседних значений и хорошо вписываются в общий трёхмерный график. Физически так и должно быть. Это свидетельствует о правильности выведенного в настоящей статье уравнения (27) для вычисления значения магнитного поля в угловой точке границы разрыва проводимости  $\sigma$ .

Поскольку узлов конечно разностной сетки, на которой проводился расчёт, было много, то при построении трёхмерной поверхности ячейки сетки получились мелкими. Рис. 3 даёт только общее представление о поведении модуля магнитного поля  $|H_x|$  в области грабена и его окрестностях. На следующем рисунке 4 представлена часть трёхмерной поверхности, содержащая угловые точки. На этом рисунке ячейки сетки большие. Чётко видно, что угловые значения совсем не выделяются на фоне остальных соседних значений и хорошо вписываются в общий трёхмерный график.

На рис. 5. приводятся графики модуля магнитного поля  $|H_x|$  на верхней границе грабена при разных значениях  $z$ . График, соответствующий значению  $z = 1$  физически правильно расположен между графиками, соответствующими значениям  $z = 0,95$  и  $z = 1,05$ . В точках  $y = -5$  и  $y = 5$  на графике  $z = 1$  показаны значения, которые посчитаны в соответствии с уравнением (27) для угловой точки. Эти значения совсем не выделяются на фоне остальных соседних значений и хорошо вписываются в общий график  $z = 1$ .

На рис. 6. приводятся графики модуля магнитного поля  $|H_x|$  на нижней границе грабена при разных значениях  $z$ . График, соответствующий значению  $z = 2$  содержит две точки при  $y = -5$  и  $y = 5$ , в которых значения посчитаны в соответствии с уравнением (27) для угловой точки. Эти значения совсем не выделяются на фоне остальных соседних значений и хорошо вписываются в общий график  $z = 2$ . Графики для случая  $z = 2$  и  $z = 2,05$  практически полностью совпадают.

На рис. 7. приводятся графики модуля магнитного поля  $|H_x|$  на правой границе грабена при разных значениях  $y$  в зависимости от глубины  $z$ . График, соответствующий значению  $y = 5$  физически правильно расположен между графиками, соответствующими значениям  $y = 4,5$  и  $y = 5,5$ . На графике  $y = 5$  в двух точках при  $z = 1$  и при  $z = 2$  показаны значения, посчитанные в соответствии с уравнением (27) для угловой точки. Обе эти точки попали на нижнюю горизонтальную часть графика. Первая из них – это самая левая точка горизонтальной части графика. Обе эти точки совсем не выделяются на фоне остальных соседних точек и так хорошо вписываются в общий график  $y = 5$ , что их трудно найти.

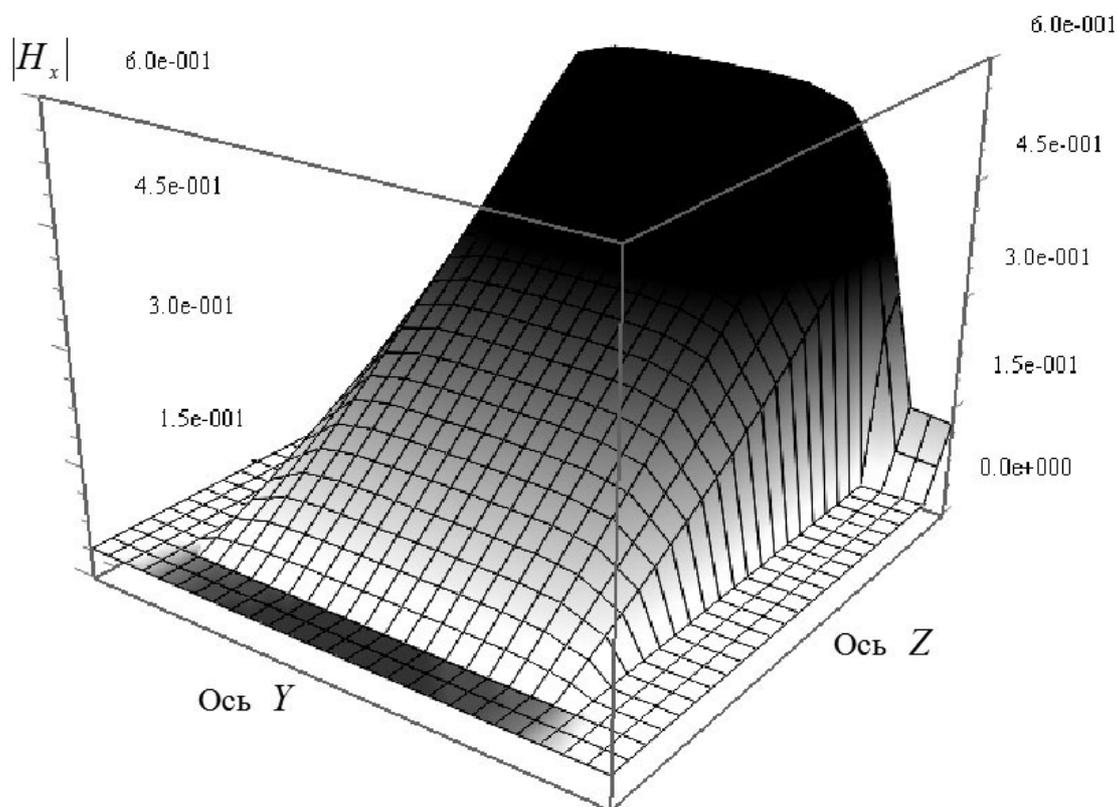


Рис. 4. Модуль магнитного поля  $|H_x|$  в области неоднородности

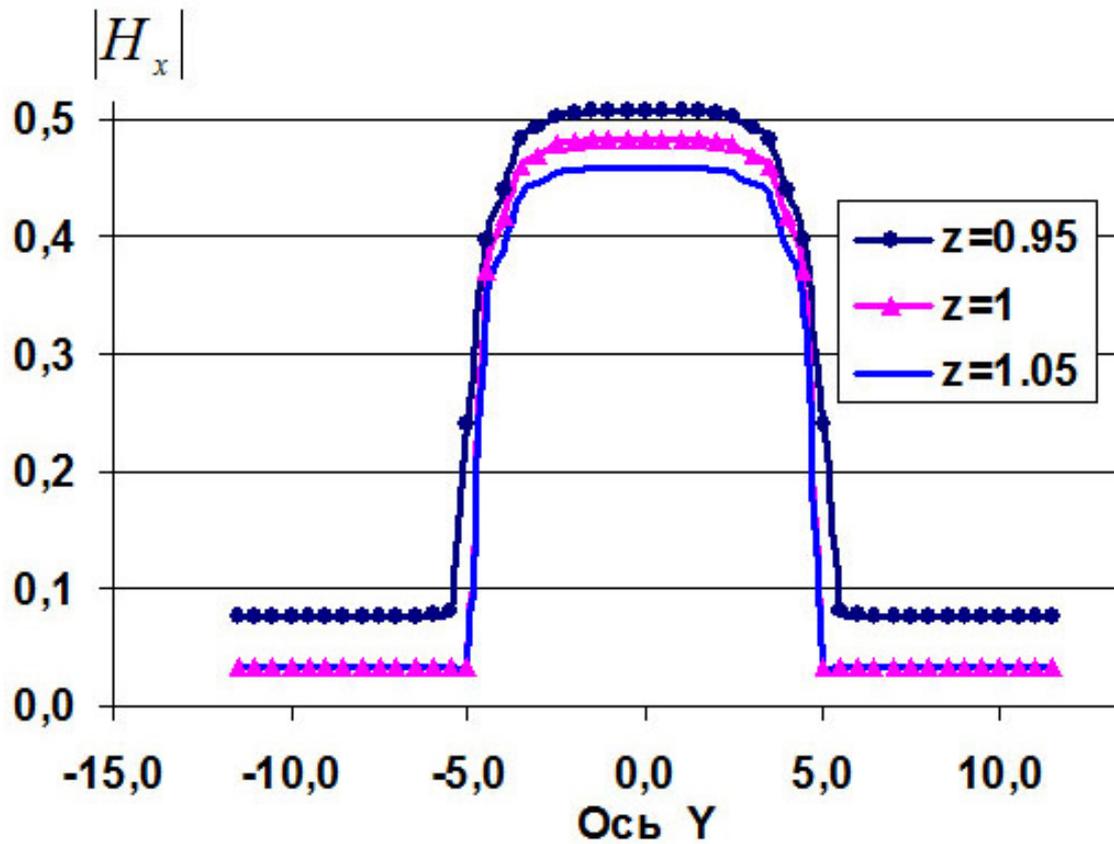


Рис. 5. Модуль магнитного поля  $|H_x|$  на верхней границе грабена

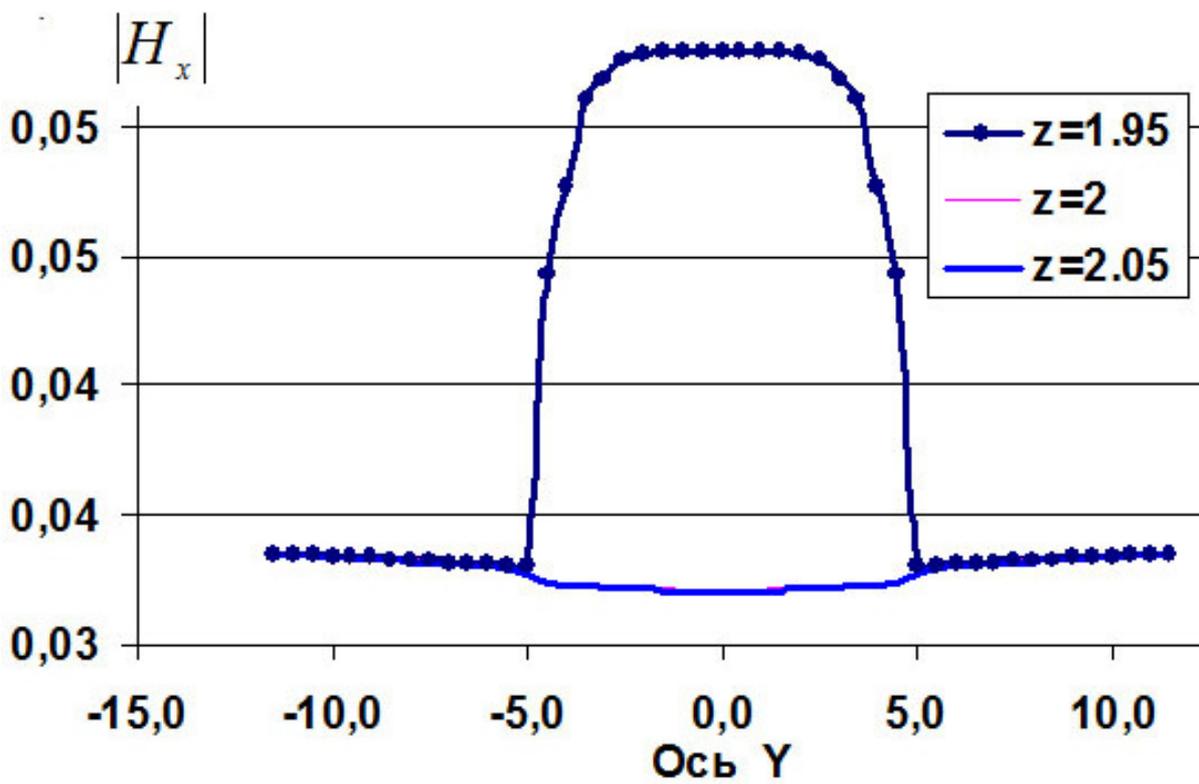


Рис. 6. Модуль магнитного поля  $|H_x|$  на дне грабена

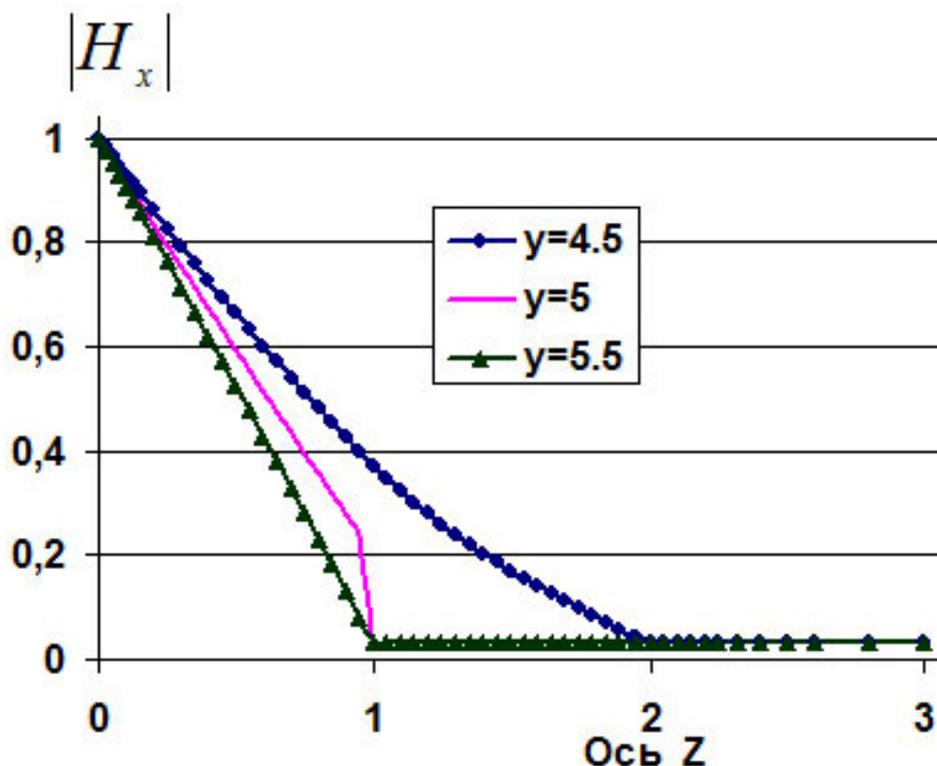


Рис. 7 Модуль магнитного поля  $|H_x|$  на правой границе грабена

Проведённый анализ результатов расчётов показывает правильность выведенного в настоящей статье уравнения (27). Его можно применять не только тогда, когда угловых точек мало, но и для случая, когда проводимость  $\sigma_{j,k}$  всё время меняется от ячейки к ячейке конечно разностной сетки.

### Литература

1. Дмитриев В.И., Барашков И.С. Разностно-интегральный метод расчёта низкочастотных электромагнитных полей в неоднородной среде // Прикладная Математика и информатика, серия Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, место издания МАКС Пресс Москва, том 49, с. 5-20.
2. Дмитриев В.И., Барашков И.С. О расчёте магнитотеллурического поля магнитной поляризации в двумерно-неоднородной среде. – В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 38-46.
3. Барашков И.С. О расчёте магнитотеллурического поля электрической поляризации в двумерно-неоднородной среде. – В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 29-36.
4. Барашков И.С., Мерщикова Н.А. Сравнительный анализ кривых кажущегося сопротивления в двумерно-неоднородной среде для случаев Е- и Н- поляризованного поля. . – В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 29-36.