

И.С. Барашков, В.И. Дмитриев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРО- МАГНИТНОГО ПОЛЯ УДАЛЁННЫХ ИСТОЧНИКОВ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ*

Геофизические методы электромагнитного зондирования верхних слоев Земли направлены на изучение строения земных недр и на поиск месторождений полезных ископаемых. Обычно зондирования проводятся при относительно небольших расстояниях между источником поля и точкой измерения поля. В среднем это расстояние не превышает величины 10 км. Однако, последнее время развиваются методы зондирования, использующие очень мощные источники поля, когда измерения можно проводить на больших расстояниях. Это повышает эффективность геофизических работ, т.к. при фиксированном положении источника перемещается только аппаратура измерения. Такой подход особенно эффективен при морских исследованиях, т.к. источник электромагнитного поля может находиться на суше, а измерения проводятся в морских условиях.

В качестве модели строения среды, в которой проводится электромагнитное зондирование, рассматривается двухслойная Земля ($z > 0$), над которой простирается атмосфера ($z < 0$). Распределение электропроводности в такой модели задается в виде:

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } z \in (-\infty, 0) \text{ (атмосфера),} \\ \sigma_1 & \text{при } z \in (0, h_1) \text{ (наносы),} \\ \sigma_2 & \text{при } z \in (h_1, \infty) \text{ (основание).} \end{cases} \quad (1)$$

Будем считать, что электромагнитное поле возбуждается вертикальным магнитным диполем, расположенным на земной поверхности ($z = 0$) в начале координат. Учитывая осесимметричность электромагнитного поля вертикального магнитного диполя в слоистой среде, из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \sigma E; \quad \operatorname{rot} E = i\omega\mu H, \quad (2)$$

получим для магнитной моды

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 07-05-00523 и 09-05-12016 офи-м.

$$H_r = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi); \quad \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma E_\varphi. \quad (3)$$

Для E_φ в магнитооднородной среде ($\mu = const$) имеем уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + k^2(z)E_\varphi = 0, \quad k^2 = i\omega\mu\sigma. \quad (4)$$

На границах раздела сред при $z = 0, h$ должны выполняться условия непрерывности E_φ и $\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}$, а в бесконечности E_φ убывает. Кроме того в начале координат, где находится вертикальный магнитный диполь, поле E_φ имеет особенность вида:

$$E_\varphi \rightarrow -\frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ik_0 R}}{R} \right) \quad \text{при} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow 0, \quad (5)$$

где m_z - магнитный момент диполя. Если учесть, что

$$\frac{e^{ik_0 R}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\eta_0 |z|} \frac{\lambda d\lambda}{\eta_0}; \quad \eta_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2},$$

то условие в источнике примет вид

$$E_\varphi \rightarrow \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) e^{-\lambda |z|} \lambda d\lambda; \quad \eta_0 = \lambda, \quad k_0 = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (4) представимо в виде:

$$E_\varphi(r, z) = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) Z(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (7)$$

где функция $Z(z, \lambda)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \eta^2 Z = 0, \quad \eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2(z)}, \quad \text{Re}(\eta) > 0. \quad (8)$$

При $z = 0$ функция $Z(z, \lambda)$ удовлетворяет условиям

$$[Z]_{z=0} = 0; \quad [Z']_{z=0} = -2\lambda, \quad (9)$$

где квадратные скобки означают разрыв функции. При $z = h_1$ Z и Z' непрерывны, а при $|z| \rightarrow \infty$ функция Z убывает.

Представим функцию $Z(z, \lambda)$ в виде:

$$Z(z, \lambda) = \begin{cases} a_0 e^{\lambda z} & z \in (-\infty, 0) \\ a_1 e^{-\eta_1 z} + b_1 e^{\eta_1(z-h_1)} & z \in (0, h_1) \\ a_2 e^{-\eta_2(z-h_1)} & z \in (h_1, \infty). \end{cases} \quad (10)$$

Из условий непрерывности Z и Z' при $z = h_1$ имеем:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 e^{-\eta_1 h_1} + b_1 \\ \eta_2 a_2 = \eta_1 (a_1 e^{-\eta_1 h_1} - b_1) \end{cases}$$

откуда находим

$$a_2 = \frac{2\eta_1 a_1}{\eta_1 + \eta_2} e^{-\eta_1 h_1}; \quad b_1 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} a_1 e^{-\eta_1 h_1}. \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), найдем

$$Z(z, \lambda) = a_1 \left(e^{-\eta_1 z} + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} e^{-\eta_1 (2h_1 - z)} \right), \quad z \in (0, h). \quad (12)$$

Для определения констант a_0 и a_1 подставим (11) в условия (9) при $z = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 \left(1 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} e^{-2\eta_1 h_1} \right) &= 0, \\ \lambda a_0 + \eta_1 a_1 \left(1 - \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} e^{-2\eta_1 h_1} \right) &= 2\lambda \end{aligned}$$

Из полученной системы находим

$$a_0 = \frac{2\lambda(1 + \beta)}{\lambda(1 + \beta) + \eta_1(1 - \beta)}; \quad a_1 = \frac{2\lambda}{\lambda(1 + \beta) + \eta_1(1 - \beta)}, \quad (13)$$

где

$$\beta = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} e^{-2\eta_1 h_1}. \quad (14)$$

Для расчёта правой части интегрального уравнения при решении задачи с трёхмерной неоднородностью нас интересует электрическое поле при $z > h_1$. Согласно формуле (7) это поле равно:

$$E_\varphi(r, z) = \frac{i \omega \mu m_z}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) Z(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (15)$$

где, согласно (10) и (11)

$$Z(z, \lambda) = a_1(\lambda) \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} e^{-\eta_1 h_1} e^{-\eta_2(z - h_1)}. \quad (16)$$

Подставив в (15) значение $Z(z, \lambda)$, получим

$$E_\varphi = \frac{i\omega\mu m_z}{\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \frac{\eta_1 e^{-\eta_1 h_1} e^{-\eta_2(z-h_1)}}{Q(\eta_1 + \eta_2)} \lambda^2 d\lambda, \quad (17)$$

где

$$Q = \lambda(1 + \beta) + \eta_1(1 - \beta). \quad (18)$$

Кроме того нас интересует поле, измеряемое на земной поверхности, согласно (7), равное

$$E_\varphi(r, z) = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) Z(z=0, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (19)$$

где, согласно (10)

$$Z(z=0, \lambda) = a_0(\lambda). \quad (20)$$

Магнитные поля на земной поверхности, согласно (3), равны

$$H_r = -\frac{m_z}{4\pi_0} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \frac{dZ(z=0, \lambda)}{dz} \lambda d\lambda, \quad (21)$$

$$H_z = \frac{m_z}{4\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda r) Z(z=0, \lambda) \lambda^2 d\lambda, \quad (22)$$

где

$$\frac{dZ(z=0, \lambda)}{dz} = \lambda a_0(\lambda). \quad (23)$$

Подставив в (19) и (21-22) значение $Z(z, \lambda)$, получим

$$E_\varphi(r, z) = \frac{i\omega\mu m_z}{2\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \frac{1 + \beta}{Q} \lambda^2 d\lambda, \quad (24)$$

$$H_r = -\frac{m_z}{2\pi_0} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \frac{1 + \beta}{Q} \lambda^3 d\lambda, \quad (25)$$

$$H_z = \frac{m_z}{2\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \frac{1 + \beta}{Q} \lambda^3 d\lambda. \quad (26)$$

Параметр $\beta(\lambda)$ определяется по формуле (14).

Интегралы в (17) и (24-26) понимаются в смысле главного значения:

$$\int_0^\infty J_{0,1}(\lambda r) \varphi(\lambda) d\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty J_{0,1}(\lambda r) e^{-\varepsilon \lambda} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Рассмотрим асимптотику полей в дальней зоне. В работе [2] выведены асимптотики для интегралов Бесселя в виде:

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) F(\lambda) \lambda d\lambda = -\frac{F'(0)}{r^3} + \frac{3F'''(0)}{2r^5} + O\left(\frac{1}{r^7}\right), \quad (27)$$

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r) F(\lambda) \lambda d\lambda = \frac{F(0)}{r^2} - \frac{3F''(0)}{2r^4} + O\left(\frac{1}{r^6}\right). \quad (28)$$

Для расчёта асимптотики электрического поля в дальней зоне на земной поверхности надо дважды продифференцировать функцию

$$F_1(\lambda) = \lambda \frac{1+\beta}{Q};$$

$$F_1'(\lambda) = \frac{1+\beta}{Q} + \lambda \frac{\beta'Q - (1+\beta)Q'}{Q^2},$$

$$F_1''(0) = \frac{\beta'Q - (1+\beta)Q'}{Q^2} + \frac{\beta'Q - (1+\beta)Q'}{Q^2} = 2 \frac{\beta'Q - (1+\beta)Q'}{Q^2}.$$

Поскольку

$$\beta'(\lambda)|_{\lambda=0} = -2\beta \left(\frac{\lambda}{\eta_1\eta_2} + \frac{\lambda h_1}{\eta_1} \right) \Big|_{\lambda=0} = 0,$$

$$Q'(\lambda)|_{\lambda=0} = \left(1 + \beta + \lambda \frac{1-\beta}{\eta_1} + (\lambda - \eta_1)\beta' \right) \Big|_{\lambda=0} = 1 + \beta,$$

то

$$F_1''(0) = -2 \left(\frac{1+\beta}{Q} \right)^2 = -2 \left(\frac{1+\beta}{\eta_1(1-\beta)} \right)^2 = -\frac{2}{\eta_1^2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2 = -\frac{2}{-k_1^2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{k_1^2} \left(\frac{1+\beta(0)}{1-\beta(0)} \right)^2 = \frac{2}{k_1^2} \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^2,$$

где

$$p = \beta(0) = \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} \exp(2ik_1 h_1). \quad (29)$$

Для расчёта асимптотики магнитного поля в дальней зоне на земной поверхности надо трижды продифференцировать функцию

$$F_2(\lambda) = \lambda F_1(\lambda):$$

$$F_2'(\lambda) = F_1(\lambda) + \lambda F_1'(\lambda), \quad F_2'(0) = 0,$$

$$F_2''(\lambda) = 2F_1'(\lambda) + \lambda F_1''(\lambda),$$

$$F_2''(0) = 2 \frac{1+\beta}{Q} = \frac{2}{\eta_1} \left(\frac{1+\beta(0)}{1-\beta(0)} \right) = \frac{2}{\sqrt{-k_1^2}} \left(\frac{1+p}{1-p} \right) = -\frac{2}{ik_1} \left(\frac{1+p}{1-p} \right),$$

$$F_2'''(0) = 3F_1''(0) = \frac{6}{k_1^2} \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^2.$$

Используя формулы (27) и (28), легко получить асимптотику полей:

$$E_{\varphi}^{ac} = \frac{i\omega\mu m_z}{2\pi} \cdot \left\{ -\frac{3}{k_1^2 r^4} \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^2 \right\}, \quad (30)$$

$$H_r^{ac} = -\frac{m_z}{2\pi} \cdot \left\{ \frac{3}{ik_1 r^4} \left(\frac{1+p}{1-p} \right) \right\}, \quad (31)$$

$$H_z^{ac} = \frac{m_z}{2\pi} \cdot \left\{ \frac{9}{k_1^2 r^5} \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^2 \right\}. \quad (32)$$

Для расчёта асимптотики электрического поля в дальней зоне под слоем наносов (при $z > h_1$) надо дважды продифференцировать функцию

$$F_4(\lambda) = \lambda F_3(\lambda),$$

где

$$F_3(\lambda) = \frac{\eta_1 \exp(-\eta_1 h_1 - \eta_2(z - h_1))}{Q(\eta_1 + \eta_2)},$$

$$F_4(0) = 0,$$

$$F_4'(\lambda) = F_3(\lambda) + \lambda F_3'(\lambda),$$

$$F_4''(0) = 2F_3'(0) = 2 \exp(-\eta_1 h_1 - \eta_2(z - h_1)) \left\{ \frac{\eta_1' + \eta_1(-\eta_1' h_1 - \eta_2'(z - h_1))}{Q(\eta_1 + \eta_2)} - \eta_1 \frac{Q'(\eta_1 + \eta_2) + Q(\eta_1 + \eta_2)}{Q^2(\eta_1 + \eta_2)^2} \right\}.$$

Поскольку

$$\eta_i'(\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_i^2}}|_{\lambda=0} = 0,$$

$$Q(\lambda)|_{\lambda=0} = \eta_1(1 - \beta),$$

$$Q'(\lambda)|_{\lambda=0} = 1 + \beta,$$

то

$$\begin{aligned} F_4''(0) &= -\frac{2(1 + \beta) \exp(-\eta_1 h_1 - \eta_2(z - h_1))}{\eta_1(\eta_1 + \eta_2)(1 - \beta)^2} |_{\lambda=0} = \\ &= \frac{2(1 + p) \exp(ik_1 h_1 + ik_2(z - h_1))}{k_1(k_1 + k_2)(1 - p)^2}. \end{aligned}$$

Используя формулы (17) и (18), получим асимптотику электрического поля при $z > h_1$:

$$E_{\varphi}^{ac} = \frac{i\omega\mu m_z}{\pi} \cdot \left\{ -\frac{3}{r^4} \cdot \frac{(1+p) \exp(ik_1 h_1 + ik_2(z - h_1))}{k_1(k_1 + k_2)(1-p)^2} \right\} =$$

$$= \frac{i\omega\mu m_z}{\pi} \cdot \left\{ -\frac{3}{k_1(k_1+k_2)r^4} \cdot \frac{(1+p)}{(1-p)^2} \right\} \exp(ik_1h_1 + ik_2(z-h_1)) \quad (33)$$

На рисунке 1 с логарифмической вертикальной шкалой сплошной линией показан график $\text{Re}(-E_\varphi)$ реальной части поля, посчитанного по формулам (17), (18) в зависимости от расстояния до источника, которое указывается в километрах, и пунктирной линией — график $\text{Re}(-E_\varphi^{ac})$ реальной части асимптотики электрического поля при $z > h_1$, причём магнитный момент диполя равен $m_z = 10^6$ Ампер·кв.метр, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 1 \frac{\text{См}}{\text{м}}$, $h_1 = 100\text{м}$, $\sigma_2 = 0,01 \frac{\text{См}}{\text{м}}$, $z = 155,5\text{м}$, $\Lambda_1 = \frac{2\pi}{\text{Re } k_1} = 2666\text{м}$.

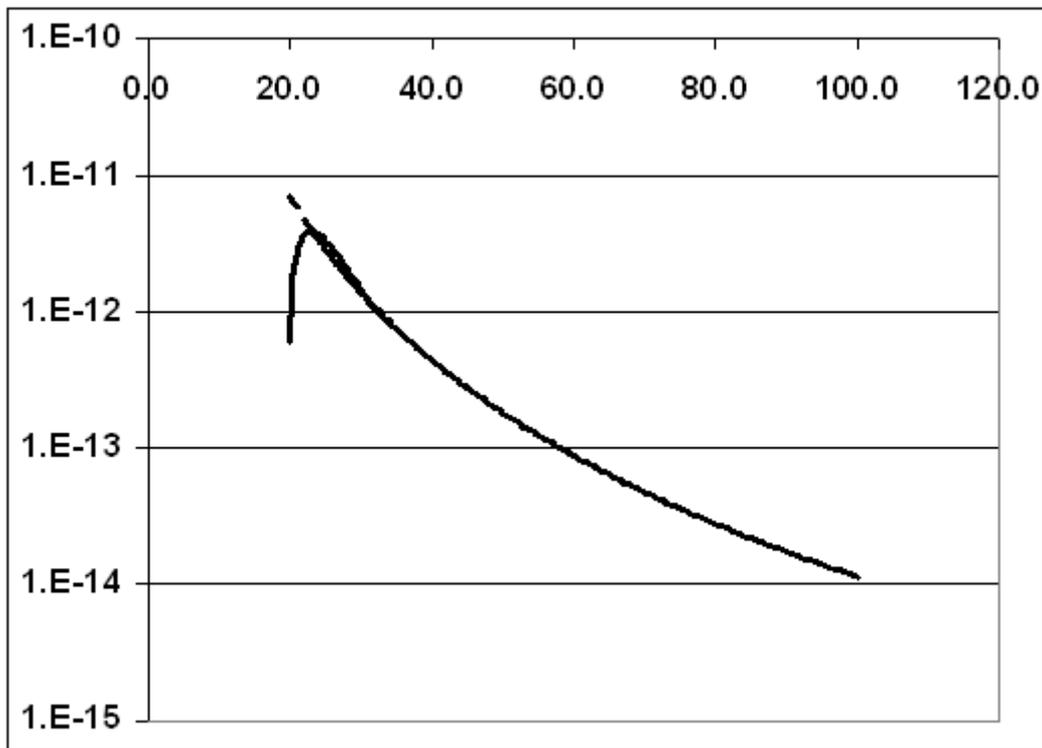


Рис.1. График $\text{Re}(-E_\varphi)$ (сплошная линия) и $\text{Re}(-E_\varphi^{ac})$ (пунктирная линия) с логарифмической вертикальной шкалой

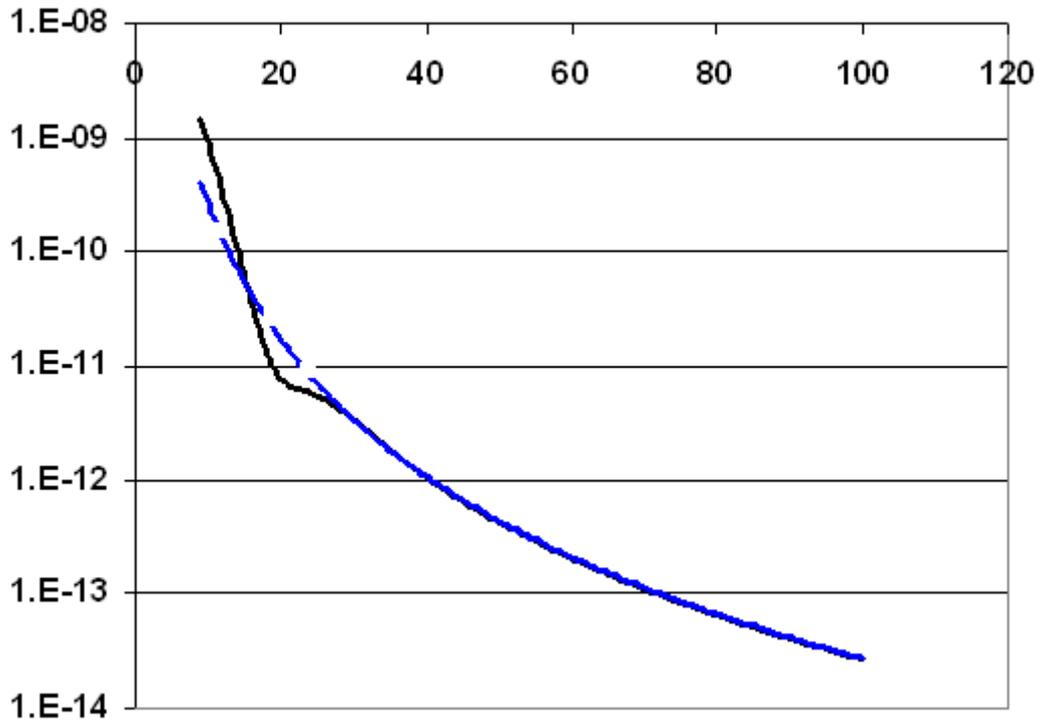


Рис.2. График $\text{Im}(-E_\varphi)$ (сплошная линия) и $\text{Im}(-E_\varphi^{ac})$ (пунктирная линия) с логарифмической вертикальной шкалой

На рисунке 2 с логарифмической вертикальной шкалой сплошной линией показан график $\text{Im}(-E_\varphi)$ мнимой части поля, посчитанного по формулам (17), (18), и пунктирной линией — график $\text{Im}(-E_\varphi^{ac})$ мнимой части асимптотики электрического поля при $z > h_1$.

При расстоянии от возбуждающего диполя более 30 км поле, посчитанное по формулам (17), (18), совпадает с асимптотикой. Поэтому при моделировании поля, возбуждаемого магнитным диполем в трёхмерной неоднородной среде в дальней зоне, возбуждающее неоднородность нормальное поле будем рассчитывать по простой формуле (33).

На рисунке 3 изображена модель горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью в области V , возбуждаемой вертикальным магнитным диполем, расположенным на поверхности земли. Трёхмерное тело в области V имеет проводимость $\sigma_T(x, y, z)$ и толщину h_T .

Для решения задачи электромагнитного зондирования неоднородной среды применим метод интегральных токов [3]. Используя тензорную функцию Грина [3] можно поля во всём пространстве записать в виде (34), (35).

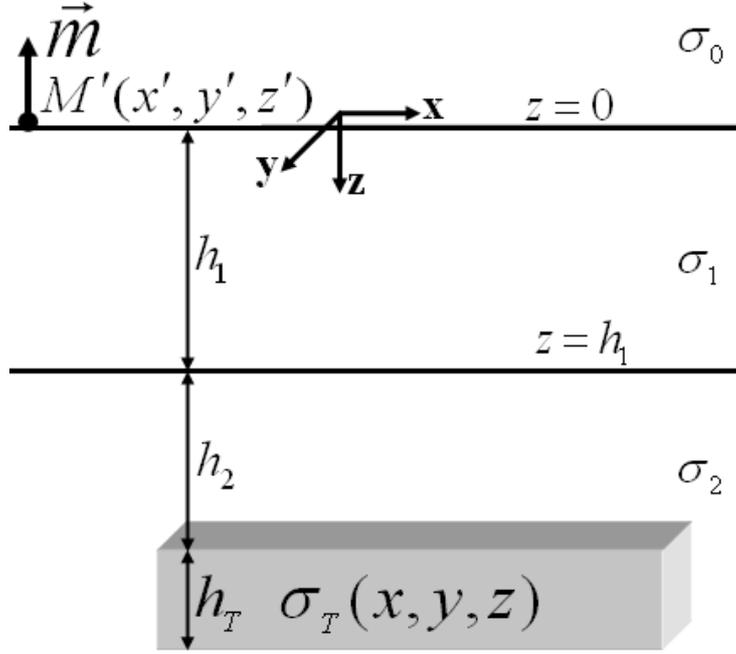


Рис.3. Модель горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью, возбуждаемой вертикальным магнитным диполем

$$\vec{E}(M') = \vec{E}^N(M') + \int_V \hat{G}_E(M', M) \vec{j}(M) dv_M, \quad (34)$$

$$\vec{H}(M') = \vec{H}^N(M') + \int_V \hat{G}_H(M', M) \vec{j}(M) dv_M, \quad (35)$$

где \vec{E}^N и \vec{H}^N — нормальное электрическое и магнитное поле, возбуждаемое в горизонтально однородной слоистой среде вертикальным магнитным диполем, $\vec{j}(M) = \sigma_a(M) \vec{E}(M)$ — избыточный ток в неоднородности. Аномальная проводимость σ_a равна разности между проводимостью неоднородности и проводимостью горизонтально однородной слоистой среды $\sigma_a = \sigma_T - \sigma_2$.

Выражение (34) даёт интегральное уравнение для плотности избыточного тока $\vec{j}(M) = \sigma_a(M) \vec{E}(M)$:

$$\vec{j}(M') - \sigma_a(M') \int_V \hat{G}_E(M', M) \vec{j}(M) dv_M = \sigma_a(M') \vec{E}^N(M'), \quad M' \in V. \quad (36)$$

Определив из (36) $\vec{j}(M')$, мы легко с помощью (34)-(35) вычислим электрическое и магнитное поле во всём пространстве.

На рисунке 4 приводится график модуля горизонтальной компоненты $|E_\varphi^{an}|$ аномального электрического поля, вызванного наличием неоднородности на поверхности земли вдоль оси Ox . Начало координат находится на поверхности земли над центром неоднородности. Расстояние вдоль оси Ox указывается в метрах. Вертикальный магнитный

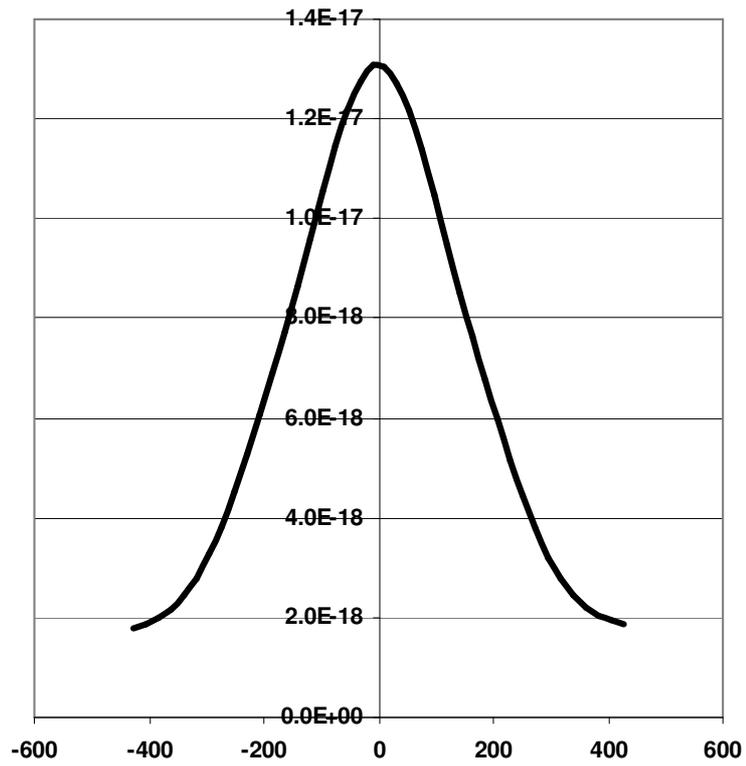


Рис.4. Модуль аномального электрического поля $|E_{\phi}^{an}|$

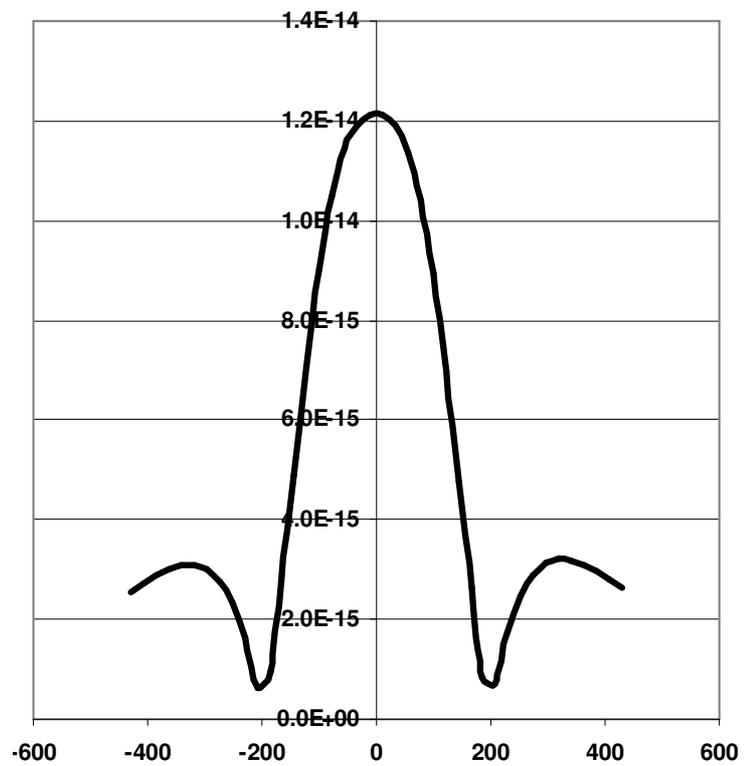


Рис.5. Модуль аномального магнитного поля $|H_r^{an}|$

диполь, возбуждающий поле, расположен на поверхности земли в 100 000м слева от неоднородности в точке

$$M' = (x', y', z') = (-100\ 000, 0, 0),$$

магнитный момент диполя равен $m_z = 10^6$ Ампер·кв.метр, причём

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 1 \frac{C_M}{M}, \quad h_1 = 100M, \quad \sigma_2 = 0,01 \frac{C_M}{M}, \quad h_2 = 50M,$$

$$\sigma_T = 10 \frac{C_M}{M}, \quad h_T = 11M, \quad \Lambda_1 = \frac{2\pi}{\text{Re } k_1} = 2666M,$$

длина и ширина неоднородности в форме прямоугольного параллелепипеда одинаковы и составляют 200м.

На рисунке 5 приводится график модуля горизонтальной компоненты $|H_r^{an}|$ аномального магнитного поля, вызванного наличием неоднородности.

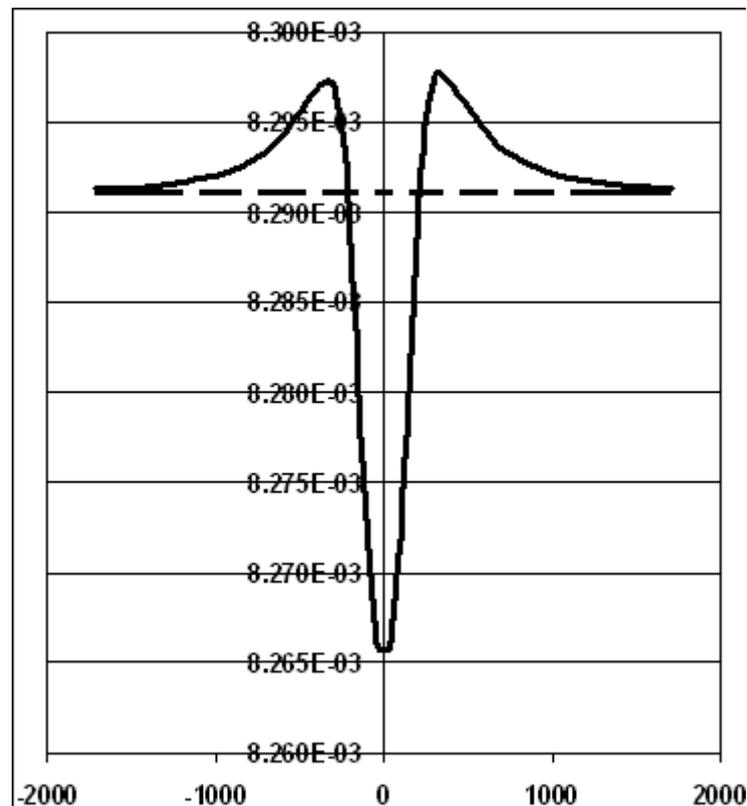


Рис.6. Модуль импеданса $|Z|$ (сплошная линия) и нормального импеданса $|Z^N|$ (пунктирная линия)

На рисунке 6 показан график модуля отношения тангенциальных компонент полного поля

$$Z = \frac{E_{\varphi}^N + E_{\varphi}^{an}}{H_r^N + H_r^{an}}$$

над неоднородностью и отношения тангенциальных компонент нормального поля

$$Z^N = \frac{E_{\varphi}^N}{H_r^N}.$$

На фоне постоянного отношения нормальных тангенциальных компонент поля, показанного на рисунке 6 пунктирной линией, неоднородность хорошо проявляется по резким скачкам отношения тангенциальных компонент полного поля, показанного на рисунке 6 сплошной линией.

Результаты проведённого численного моделирования показывают, что трёхмерная неоднородность хорошо проявляется по данным электромагнитных измерений на поверхности земли с искусственным дипольным источником поля. Это позволяет обнаружить местоположение неоднородности и, решая обратную трёхмерную задачу электромагнитного зондирования при разных частотах возбуждающего поля, определить геометрические и геофизические параметры трёхмерной неоднородности.

Литература

1. Дмитриев В.И. Математическое моделирование влияние ионосферы на электромагнитное зондирование // Прикладная математика и информатика № 31, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2009, с. 44-53.
2. Тихонов А.Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. ДАН 125, №5, с. 982-985.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике.- М.: МАКС Пресс, 2008, С. 307.