М. С. Близорукова, В. Е. Капустян, В. И. Максимов

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРИНЦИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВУХ ЭКОЛОГО–ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ*

1. Введение

Статья посвящена обсуждению с позиций единого подхода двух типов задач: динамической обратной задачи и задачи робастного управления. При этом рассматриваются два типа моделей: динамическая модель, связывающая основные экономические и климатические индексы, и модель, описывающая взаимодействие между климатом и биосферой. Для других классов моделей (уравнения фазового поля, биореактора с подпиткой, уравнений, описывающих распространение загрязнений) данный подход обсуждался в работах [1–3]. Коротко остановимся на каждой из обсуждаемых в данной статье задач.

Задачи нахождения соответствующих параметров по решениям уравнений часто называют задачами реконструкции (идентификации). При этом предполагается, что входная информация (результаты измерения текущих фазовых положений динамической системы) поступает по ходу процесса и неизвестные параметры должны восстанавливаться также по ходу процесса. Один из методов решения подобного типа задач был предложен в работах [4, 5]. Этот метод, основанный на принципах позиционного управления [6] и методах решения некорректных задач [7], фактически сводит задачу идентификации к задаче управления вспомогательной динамической системой-моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени подпадает под условия какого-либо принципа регуляризации; тем самым обеспечивается устойчивость алгоритма. При этом регуляризация рассматриваемой задачи осуществляется локально на этапе выбора позиционного управления в системе-модели. Сформулированный метод был реализован для ряда задач, описываемых некоторыми классами обыкновенных дифференциальных уравнений, а также уравнениями с распределенными параметрами. При этом восстанавливались различные переменные характеристики систем: неизвестные разрывные входные воздействия, начальные и граничные данные, распределенные возмущения, коэффициенты эллиптического оператора и т.д. В настоящей работе мы проиллю-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00175а), программы поддержки ведущих научных школ (6512.2012.1), программы Президиума УрО РАН “Перспективы скоординированного социально - экономического развития России и Украины в общеевропейском контексте”(12-1-1038П).

стрируем этот метод на примере, рассмотрев модель, связывающую основные экономические и климатические индексы [8].

В теории управления большой интерес вызывают задачи робастного управления. Эти задачи могут быть охарактеризованы в общих чертах следующим образом. Имеется динамическая система, на которую одновременно действуют управление и ненаблюдаемое возмущение. Диапазон допустимых возмущений велик и как-то заранее охарактеризован. По ходу движения системы поступает некоторый сигнал о ее текущих состояниях. Требуется построить закон формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы желаемый режим для траектории системы независимо от того, какое конкретное возмущение действует. Один из подходов к решению таких задач мы проиллюстрируем на примере, рассмотрев модель, описывающую взаимодействие между климатом и биосферой [9, 10].

2. Динамическая обратная задача

Динамическая модель, связывающая основные экономические и климатические индексы, была предложена в [8]. Модель ориентирована на разработку экономической стратегии, направленной на замедление глобального потепления. Основная цель, которая ставится при анализе модели, — выяснить, насколько оправдано с экономической точки зрения снижение уровня эмиссии парниковых газов. Последнее трактуется как инвестиции, поскольку деньги, потраченные в настоящий момент на снижение эмиссии, позволят предотвратить ухудшение климата, и, таким образом, увеличить потребление в будущем. Модель учитывает глобальные процессы: предполагается, что структура экономики всех стран одинакова; изменение климата характеризуется средним значением температуры поверхности Земли и т.д.

Модель содержит три типа параметров.

1) Постоянные параметры (они перечислены в таб. 2.3 и 2.4 на стр. 21 [8]).

2) Функции, которые считаются внешними (экзогенными) по отношению к модели. Они заданы априори.

3) Внутренние функции, которые связаны между собой и с внешними параметрами посредством некоторых алгебраических или дифференциальных уравнений. Эти функции перечислены в табл. 2.3. (см. [8]), уравнения модели приведены в табл. 2.2.

Приведем основные функции:

$\mu(t)$ — скорос ть снижения эмиссии по отношению к неконтролируемой эмиссии,

$E(t)$ — эмиссия парниковых газов (только CO_2 и хлорфторуглеродов),

$M_1(t) = (M(t) - 590)$ — избыток массы парниковых газов в атмосфере по сравнению с доиндустриальным периодом,

$T(t)$ — средняя температура атмосферы (на поверхности Земли),

$T_1(t)$ — средняя температура в глубине океана,

$I(t)$ — глобальные инвестиции,

$K(t)$ — запас капитала,

$F(t)$ — воздействие атмосферной радиации (оно определяется содержанием в атмосфере парниковых газов).

$O(t)$ — воздействие экзогенных газов (т.е., газов, которые рассматриваются как неуправляемые. Это все газы, кроме CO_2 и хлорфторуглеродов),

$A(t)$ – уровень техники,

$\sigma(t)$ — отношение эмиссии парниковых газов к общему выходу,

$L(t)$ — народонаселение в момент t,

$Q(t)$ — объем мирового продукта.

Схематично связь между внутренними функциями может быть изображена следующим образом:

$$
\begin{array}{ccccccc}
T^{**} & \longrightarrow & \Omega & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & \searrow & & & \\
F & & \mu & & Q & & \\
\uparrow & & \downarrow & \swarrow & \uparrow & \nwarrow & \\
M_1^* & \longleftarrow & E & & K^* & \longleftarrow & I
\end{array}
$$

Здесь функции, помеченные звездочкой, являются решениями линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Функция $T(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения второго порядка. Если от дискретной модели, предлагаемой авторами, перейти к «непрерывной», то уравнения модели Σ примут вид

$$
\begin{aligned}
\dot{T}(t) &= c_1 T(t) + c_2 T_1(t) + c_3 F(t), \quad t \in [0, \vartheta] \\
\dot{T}_1(t) &= c_4 (T(t) - T_1(t)) \\
\dot{M}_1(t) &= \beta E(t) - \delta_M M_1(t) \\
\dot{K}(t) &= -\delta_K K(t) + I(t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где t —время, ϑ— конечный момент времени,

$$
F(t) = 4,1 \cdot \log_2 \left(1 + \frac{M_1(t)}{590} \right) + O(t),
$$

$$E(t) = (1 - \mu(t))\sigma(t)Q(t),$$

$$Q(t) = (1 - b_1\mu(t)^{b_2})/(1 + \theta_1 T(t)^{\theta_2})A(t)K(t)^{\gamma}L(t)^{1-\gamma}.$$

Начальное состояние Σ — $\{T(0), T_1(0), M_1(0), K(0))\}$ — предполагается известным и заданным априори. Функции $\mu(t)$ и $I(t)$ рассматриваются в качестве управляющих параметров, определяющих стратегию глобального управления климатом и экономикой. Численный анализ модели приведен в [8]. При этом решается прямая задача: задаются возможные стратегии (законы формирования $\mu(t)$ и $I(t)$) и просчитывается динамика системы. Проводится сравнение результатов для разных стратегий. Также проводится анализ чувствительности результатов по отношению к некоторым параметрам модели.

Наша цель отлична от цели работы [8]. Мы остановимся на обратной задаче, состоящей в следующем. Будем предполагать, что известна функция $I(t)$. Пренебрегая малыми величинами ($b_1 = 0,0686$, $\vartheta_1 = 0,00144$), преобразуем систему (1) к виду:

$$\begin{aligned}
\dot{T}(t) &= c_1T(t) + c_2T_1(t) + c_5 \cdot \log_2\left(1 + \frac{M_1(t)}{590}\right) + c_3O(t) \\
\dot{T}_1(t) &= c_4(T(t) - T_1(t)) \\
\dot{M}_1(t) &= E_1(t)(1 - \mu(t)) - \delta_M M_1(t) \\
\dot{K}(t) &= -\delta_K K(t) + I(t), \quad t \in [0, \vartheta],
\end{aligned} \tag{2}$$

где $E_1(t) = \beta\sigma(t)A(t)K(t)^{\gamma}L(t)^{1-\gamma}$. В дальнейшем будем рассматривать систему Σ в виде (2).

Обсуждаемая задача может быть сформулирована следующим образом. В достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m}, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta,$$

замеряются с некоторой ошибкой величины $T(\tau_i)$ и $T_1(\tau_i)$. Результаты этих неточных измерений (векторы $\xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_{2i}^h\} \in R^2$) удовлетворяют неравенствам

$$|T(\tau_i) - \xi_{1i}^h|^2 + |T_1(\tau_i) - \xi_{2i}^h|^2 \le h^2,$$

где $h \in (0,1)$ — параметр точности. Требуется построить вычислительный алгоритм, который синхронно с развитием процесса восстанавливает неизвестные функции $M_1(t)$ и $\mu(t)$. Такова содержательная формулировка задачи, рассматриваемой в настоящей статье.

Для решения задачи воспользуемся подходом, развитым в [4, 5]. Согласно этому подходу, в рассмотрение вводится искусственная управляемая система, называемая моделью (M). Модель функционирует на том же промежутке времени $[0, \vartheta]$ и имеет вход $u^h(t)$ и выход $w^h(t)$. Алгоритм решения задачи восстановления заменяется алгоритмом формирования управления по принципу обратной связи системами Σ и M на интервале $[0, \vartheta]$. Последний разбивается на $(m-1)$ идентичных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, согласно выбранному правилу U, на основании полученных измерений ξ_i^h (см. (2)) и $w^h(\tau_i)$ вычисляется функция

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)),$$

Затем на вход модели M до момента τ_{i+1} подается управление $u = u^h(t)$, $\tau_i \le t < \tau_{i+1}$. Результатом работы алгоритма на i-м шаге являются величины ξ_{i+1}^h и $w^h(\tau_{i+1})$.

Итак, обратная задача может быть сформулирована следующим образом. В дальнейшем считаем фиксированным семейство разбиений интервала $[0, \vartheta]$:

$$\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{h=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h), \quad \tau_{0,h} = 0, \quad \tau_{m_h,h} = \vartheta.$$

Динамическая обратная задача. Требуется указать дифференциальные уравнения модели M

$$\dot{w}^h(t) = f_1(\xi_i^h, w^h(\tau_i), u_i^h), \quad t \in \delta_{h,i} = [\tau_{i,h}, \tau_{i+1,h}), \quad \tau_i = \tau_{i,h},$$

$$w^h(0) = w_0^h, \quad w^h(t) \in R^4,$$

и закон формирования управлений u_i^h в моменты τ_i

$$U : \{\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)\} \to u_i^h = \{u_{i1}^h, u_{i2}^h\} \in R^2$$

такие, что имеют место сходимости

$$\int_0^\vartheta |u_1^h(t) - M_1(t)|^2 \, dt \to 0, \quad \int_0^\vartheta |u_2^h(t) - \mu(t)|^2 \, dt \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Здесь $u^h(t) = \{u_1^h(t), u_2^h(t)\}$, $u_1^h(t) = u_{i1}^h$, $u_2^h(t) = u_{i2}^h$ при $t \in \delta_{h,i}$.

3. Алгоритм решения обратной задачи

Перейдем к описанию алгоритма решения описанной выше задачи. Как отмечено выше, необходимо указать модель (2) и закон формирования управлений U (2), обеспечивающие сходимости (2). Пусть известно ограничение на скорость снижения эмиссии, т.е. число $f > 0$ такое, что

$$|\mu(t)| \le f \quad \text{для всех} \quad t \in [0, \vartheta].$$

В дальнейшем предполагаем: известны числа $K, a_1, a_2 \in (0, +\infty)$, $a_1 < a_2$, такие, что каждое решение $x_\mu(t)$, $x_\mu(t) = \{T(t), T_1(t), M_1(t), K(t)\}$, системы (2) удовлетворяет следующим условиям

$$\max_{0 \le t \le \vartheta} \|x_\mu(t)\| \le K, \quad \sup_{0 \le t \le \vartheta} \|\dot{x}_\mu(t)\| \le K, \quad M_1(t) \in [a_1, a_2].$$

Здесь $\|x_\mu\|$ — евклидова норма вектора x_μ.

Введем некоторую функцию $\alpha(h) : (0,1) \to R^+ = \{r \in R : r \ge 0\}$ со свойствами:

$$\alpha(h) \to 0, \quad \delta(h) \le h, \quad (h^{1/6} + \omega(h))/\alpha(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Здесь $\omega(\delta) = \omega_E(\delta) + \omega_M(\delta)$, где $\omega_E(\delta)$ и $\omega_M(\delta)$ — модули непрерывности функций $E_1(t)$ и $M_1(t)$, соответственно. Пусть модель (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{w}^h(t) &= c_1\xi^h_{1i} + c_2\xi^h_{2i} + 4,1c_3\log_2(1 + \frac{u^h_{1i}}{590}) + c_3Q(\tau_i) \\
\dot{w}^h_1(t) &= c_4(\xi^h_{1i} - \xi^h_{2i}) \\
\dot{w}^h_2(t) &= E_1(\tau_i)(1 - u^h_{2i}) - \delta_M u^h_{1i} \\
\dot{w}^h_3(t) &= -\delta_K K(\tau_i) + I(\tau_i), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}.
\end{aligned}$$

Начальное состояние задается следующим образом

$$w^h(0) = T(0), \quad w^h_1(0) = T_1(0), \quad w^h_2(0) = M_1(0), \quad w^h_3(0) = K(0).$$

Закон U (2) формирования управления $u^h_i = \{u^h_{i1}, u^h_{i2}\}$ в модели (3) определяется формулами

$$u^h_{1i} = 590(2^{\pi^h_i} - 1), \tag{3}$$

$$u^h_{2i} = \begin{cases} \beta^{(1)}_i \big/ \alpha(h), & \text{если} \quad |\beta^{(1)}_i| \le \alpha(h)f \\ f\mathrm{sign}\beta^{(1)}_i, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4}$$

Здесь

$$\pi^h_i = \begin{cases} -c_i/(2h^{2/3}), & \text{если } -c_i/(2h^{2/3}) \in [b_1, b_2] \\ b_1, & \text{если } -c_i/(2h^{2/3}) < b_1 \\ b_2, & \text{если } -c_i/(2h^{2/3}) > b_2, \end{cases}$$

$$b_1 = \log_2(1 + a_1/590), \quad b_2 = \log_2(1 + a_2/590),$$

$$c_i = 8,2c_3S^0_i,$$

$$\beta^{(1)}_i = E_1(\tau_i)(w^h_2(\tau_i) - u^h_{1i}), \quad S^0_i = w^h(\tau_i) - \xi^h_{i1}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $E_1(t) > 0$, $t \in [0, \vartheta]$ *и выполнены условия (3). Тогда, если уравнения модели* M *выбраны в виде* (2), (3), *а закон формирования управлений* U *— в виде* (2), (3), (4), *то имеют место сходимости* (2).

Доказательство теоремы проводится по стандартной схеме [4, 5]. При этом оценивается изменение величины

$$\varepsilon_{i+1} = |w_2^h(\tau_{i+1}) - M_1(\tau_{i+1})|^2 + \alpha(h) \int\limits_0^{\tau_{i+1}} \{|u_2^h(\tau)|^2 - |\mu(\tau)|^2\}\, d\tau$$

и устанавливается (при $\delta \le h$ и всех $i \in [1 : m_h]$) оценка

$$\varepsilon(\tau_i) \le C(h^{1/6} + \omega(\delta(h))).$$

4. Задача робастного управления

В работах [9, 10] была предложена и апробирована одна из моделей, описывающая взаимодействие климата и биосферы. Привлекая современную технику математической теории оптимального (программного) управления, авторы цитированных выше работ приводят качественный анализ модели, ориентируясь на задачу нахождения оптимального профиля эмиссии CO_2, максимизирующего кумулятивную эмиссию с учетом температурных климатических изменений. Наша цель отлична от целей работ [9, 10]. Мы сконцентрируем свое внимание на анализе задачи робастного управления. При этом роль управлений будет играть величина $u(t)$ (см. ниже). Итак, в качестве математической модели взаимодействия климата и биосферы возьмем модель, описываемую системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= \mu \ln\{C(t)/C_0\} - \alpha T(t), \quad t \in [0, \vartheta] \\ \dot{C}(t) &= -P_t(C,T) + (1-\varepsilon) m(t) N(t) + \delta_t(T) S(t) + u(t) - Q_{oc}(t), \\ \dot{N}(t) &= P_t(C,T) - m(t) N(t), \\ \dot{S}(t) &= \varepsilon m(t) N(t) - \delta_t(T) S(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь t — время,

$T(t)$ — средняя температура воздуха на поверхности Земли,

$C(t)$ — общее количество углерода в атмосфере,

$N(t)$ и $S(t)$ — количество углерода в растительности и почве, соответственно,

$Q_{oc}(t) = \sigma((C(t) - C_0) - \nu(D(t) - D_0))$,

$P_t(C,T) = P_0(1+a_1T)(1+a_2(C-C_0))$,

$\delta_t(T) = \delta_0(1+a_3T)$, $m(t) = m_0(1.087 + a_4t)$,

$D(t)$ — количество углерода, содержащегося в океане.

Значения неизвестных параметров приведены в таблице [9, стр. 30]. Предполагая $dN/dt = dS/dt = 0$, т. е. количество углерода в растительности и почве не изменяется, систему (5) приведем к виду

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= \mu \ln\{C(t)/C_0\} - \alpha T(t), \\ \dot{C}(t) &= -P_t(C,T) + (1-\varepsilon)m(t)N + \delta_t(T)S + u(t) - Q_{oc}(t). \end{aligned} \tag{6}$$

В дальнейшем, мы будем рассматривать систему Σ в форме (6).

Обсуждаемая ниже задача управления состоит в следующем. Имеется система (6). Ее начальное состояние, $T(0), C(0)$, задано. В дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_m = \vartheta,$$

неточно замеряется величина $T(\tau_i)$. Результаты измерений (числа ξ_i^h) удовлетворяют неравенствам

$$|T(\tau_i) - \xi_i^h| \le h, \tag{7}$$

где $h \in (0,1)$ — информационная ошибка.

Задан некоторый режим изменения годовой температуры $T = T_*(t)$ и общего количества углерода в атмосфере $C = C_*(t)$:

$$x_*(t) = \{T_*(t), C_*(t)\}.$$

$T_*(0) = T(0)$, $C_*(0) = C(0)$. Известны верхние и нижние пределы изменения атмосферной эмиссии $u(t)$ и $Q_{oc}(t)$. Именно, числа e_1, e_2, $0 < e_1 < e_2$ и g_1, g_2, $0 < g_1 < g_2$ такие, что

$$u(t) \in [e_1, e_2], \quad Q_{oc}(t) \in [g_1, g_2] \quad \text{при всех} \quad t \in T.$$

Задано число $\varepsilon > 0$. Требуется указать алгоритм формирования управления $u(t)$ (по принципу обратной связи) в системе (6) такой, что, каково бы ни было неизвестное $Q = Q_{oc}(t) \in [g_1, g_2]$, расстояние между $x^h(t)$ и $x_*(t)$ в любой момент $t \in [0, \vartheta]$ не превосходит величины ε, если h и δ достаточно малы.

Здесь

$$x^h(\cdot) = \{T(\cdot), C(\cdot)\} = \{T(\cdot; U(\cdot;\xi), Q_{oc}(\cdot)), C(\cdot; U(\cdot;\xi), Q_{oc}(\cdot))\}$$

— траектория системы Σ, порожденная неизвестным $Q_{oc}(t) \in [g_1, g_2]$ и управлением $u(t) = u^h(t;\xi) = U(\tau_i, \xi_i) \in [e_1, e_2]$, сформированным по принципу обратной связи.

Для решения задачи воспользуемся методом стабильных дорожек [6]. Введем вспомогательную динамическую систему M (модель), функционирующую синхронно с реальной системой на временном интервале $[0, \vartheta]$. Модель имеет вход $v^h(t)$ и выход $w^h(t)$. Процесс управления по принципу обратной связи реальной системой и моделью разбивается на $(m-1)$ однотипных шагов. Во время i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие действия. Сначала, в момент τ_i, согласно выбранным законам формирования управлений U и V по результатам неточных измерений ξ_i^h (см. (7)) и $w^h(\tau_i)$ вычисляются функции

$$v^h(t) = v_i^h = V(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)), \quad t \in \delta_i, \tag{8}$$

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, v_i^h, x_*(\tau_i)). \tag{9}$$

Затем (до момента τ_{i+1}) управление $u = u^h(t)$, $\tau_i \le t < \tau_{i+1}$, подается на систему Σ, а управление $v = v^h(t)$, $\tau_i \le t < \tau_{i+1}$, – на вход модели M. Значения ξ_{i+1}^h и $w^h(\tau_{i+1})$ являются результатом работы алгоритма на i-м шаге. Таким образом, вся трудность в решении этих проблем сводится к подходящему выбору модели M и функций U и V.

Итак, задача может быть сформулирована следующим образом. В дальнейшем считаем фиксированным семейство разбиений интервала $[0, \vartheta]$:

$$\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{h=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h), \quad \tau_{0,h} = 0, \quad \tau_{m_h,h} = \vartheta.$$

Задача робастного управления. Требуется указать дифференциальные уравнения модели M

$$\dot{w}^h(t) = f_1(\xi_i^h, w^h(\tau_i), v_i^h), \tag{10}$$

$$t \in \delta_{h,i} = [\tau_{i,h}, \tau_{i+1,h}), \quad \tau_i = \tau_{i,h},$$

$$w^h(0) = w_0^h, \quad w^h(t) \in R,$$

и законы формирования управлений u_i^h и v_i^h (вида (8), (9)) в моменты τ_i такие, что для $h \in (0, h_*(\varepsilon))$, $\delta = \delta(h) \in (0, \delta(h_*(\varepsilon))$ справедливо неравенство

$$\max_{t\in[0,\vartheta]} \|x^h(t) - x_*(t)\|_{R^2} \le \varepsilon. \tag{11}$$

5. Алгоритм решения задачи робастного управления

Перейдем к описанию алгоритма решения указанной задачи. Из отмеченного выше следует, что необходимо указать модель (10) и правила U и V выбора управлений (8), (9), обеспечивающие неравенство (11). Предположим, что известны числа $K, a_1, a_2 \in (0, +\infty)$, $a_1 < a_2$, такие, что решение $x(t)$, $x(t) = \{T(t), C(t)\}$, системы (6) удовлетворяет следующим условиям

$$\max_{0\le t\le\vartheta} \|x(t)\| \le K, \qquad \sup_{0\le t\le\vartheta} \|\dot{x}(t)\| \le K, \qquad C(t) \in [a_1, a_2].$$

Введем некоторую функцию $\gamma(h) : (0,1) \to R^+$ со свойствами:

$$\gamma(h) \to 0, \quad \delta(h) \le h, \quad (h^{1/6} + \omega_C(h))/\gamma(h) \to 0 \quad \text{as} \quad h \to 0.$$

Здесь $\omega_C(h)$ — модуль непрерывности функции $C(t)$. Пусть модель (10) имеет вид

$$\dot{w}^h(t) = \mu \ln\{v_i^h/C_0\} - \alpha\xi_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad w^h(0) = \xi_0^h, \tag{12}$$

а правила U и V формирования управлений u_i^h и v_i^h таковы:

$$v_i^h = C_0 \mathrm{exp}(\pi_i^h), \tag{13}$$

$$u_i^h = \begin{cases} e_1 & \text{если} \quad C_*(\tau_i) - v_i^h > 0 \\ e_2, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{14}$$

Здесь

$$\pi_i^h = \begin{cases} -c_i/(2h^{2/3}), & \text{если } -c_i/(2h^{2/3}) \in [b_1, b_2] \\ b_1, & \text{если } -c_i/(2h^{2/3}) < b_1 \\ b_2, & \text{если } -c_i/(2h^{2/3}) > b_2, \end{cases}$$

$$b_1 = \ln(a_1/C_0), \quad b_2 = \ln(a_2/C_0), \quad c_i = 2\mu(w^h(\tau_i) - \xi_i^h).$$

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. *Существует измеримая по Лебегу функция $\phi(t) \in [e_1 - g_2, e_2 - g_1]$ такая, что предписанный режим $x_*(t) = \{T_*(t), C_*(t)\}$ удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} \dot{T}_*(t) &= \mu \ln\{C_*(t)/C_0\} - \alpha T_*(t), \\ \dot{C}_*(t) &= -P(C_*, T_*) + (1-\varepsilon)m(t)N + \delta(T_*)S + \phi(t), \end{aligned}$$

с начальным состоянием

$$T_*(0) = T(0), \qquad C_*(0) = C(0).$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть уравнения модели выбраны в виде* (10), (12)*, а законы формирования управлений* U *и* V *— в виде* (8), (9), (13), (14). *Тогда по* $\varepsilon > 0$ *можно указать числа* $h_*(\varepsilon) > 0$ *и* $\delta(h_*(\varepsilon)) > 0$ *такие, что имеют место неравенства* (11).

Доказательство теоремы проводится по стандартной схеме [5, 6]. При этом оценивается изменение величины

$$\varepsilon(t) = |w_2^h(t) - C(t)|^2 + \alpha(h) \int\limits_0^t \{|v^h(\tau)|^2 - |E(\tau)|^2\} \, d\tau$$

и устанавливается (при $\delta \leq h$ и всех $i \in [1 : m_h]$) оценка

$$\varepsilon(\tau_i) \leq (1 + c_7(t - \tau_i))\varepsilon(\tau_i) + c_8 \int\limits_{\tau_i}^t \varepsilon(\tau) \, d\tau, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

6. Пример.

Первый алгоритм был протестирован на модельном примере. На рисунках представлены результаты компьютерного моделирования при следующих значениях параметров:

$$\begin{array}{ll}
c_1 = c_2 = c_3 = 1, & \sigma = 1 + 0.5t, \\
c_4 = 0.5, & Q(t) = 5\sin(t), \\
\delta_k = 0,65, & L(t) = 1, \\
\delta_m = 0,0833, & \mu(t) = 1.2\sin(t), \\
\beta = 0,1, & I(t) = 1 + 0.15t^2, \\
\gamma = 0,1, & A(t) = 2t^{1/2}, \\
f = 2, & \alpha = 0,1, \\
a_1 = 30, & a_2 = 60.
\end{array}$$

Начальные условия для системы были следующими:

$$\begin{array}{ll}
T(0) = 1, & T_1(0) = 0.5, \\
M(0) = 35, & K(t) = 10.
\end{array}$$

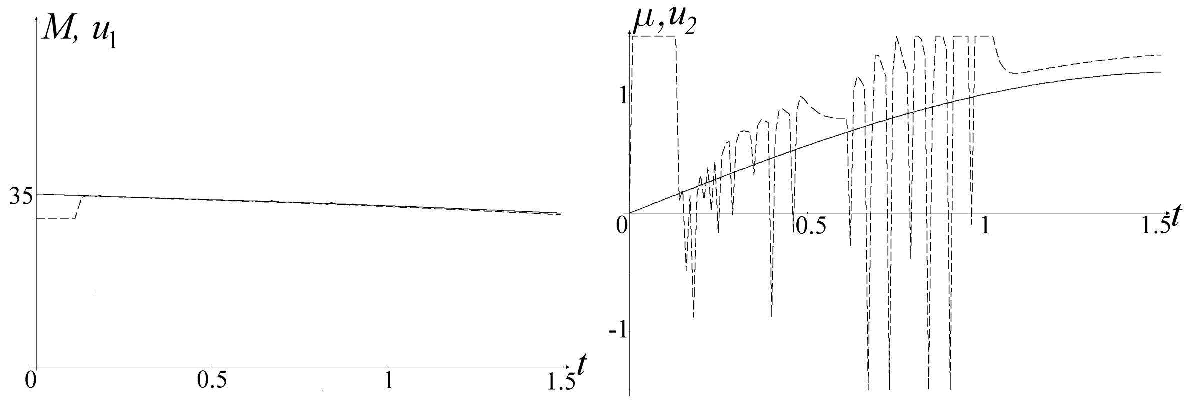

Рис. 1. $\delta = 0.001$

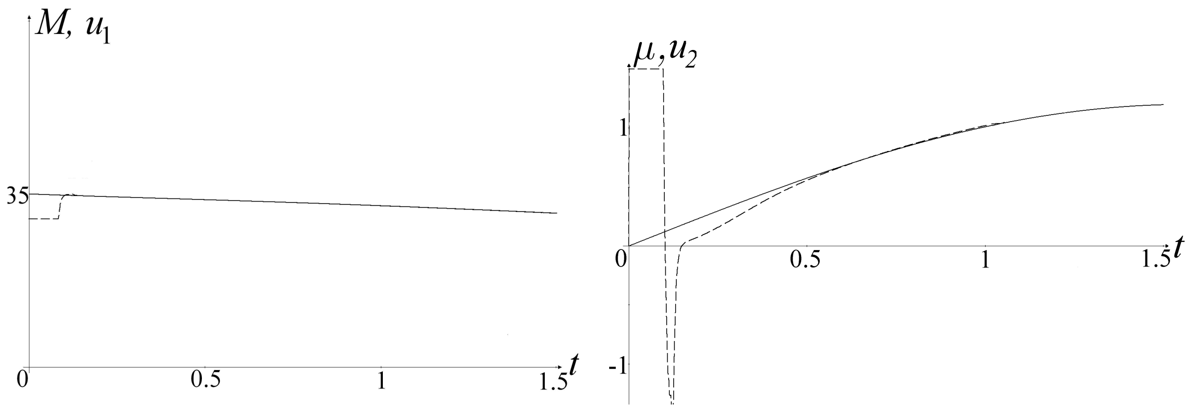

Рис. 2. $\delta = 0.0001$

Список литературы

1. *Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I.* On identification of nonobservable contamination inputs // Environmental Modelling & Software. — 2005.— No 20.— P. 1057–1061.
2. *Keesman K.J., Maksimov V.I.* On feedback identification of unknown characteristics: a bioreactior case study // International Journal of Control.— 2008.— Vol. 81, No. 1.— P. 134–145.
3. *Максимов В.И.* Об отслеживании эталонного решения управляемой системы уравнений фазового поля // Труды Математического института им.В.А.Стеклова.— 2010.— Т. 271.— С. 1–11.
4. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернет.— 1983.— № 2.— С. 29–41.
5. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions.— Gordon and Breach, 1995.

6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1984.

7. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1978.

8. *Nordhaus W.D.* Managing the global commons. The economics of climate change.— The MIT Press, 1994.

9. *Svirezhev Yu.S., Brovkin V., Bloh W., Schellnhuber H.J., Petschel-Held G.* Optimisation of reduction of global CO_2 emission based on a simple model of the carbon cycle // Enviromental Modeling and Assessment.— 1999. *4*.— P. 23-33.

10. *Brucker T., Petschel-Held G., Toth F.L., Fússel H.-M., Helm C., Leimbach M., Schellnhuber H.J.* Climate change decision-support and the tolerable windows approach // Enviromental Modeling and Assessment.— 1999. *4*.— P. 217-234.