

Раздел II. Математическое моделирование

О.В. Бочарова, М.Г. Лебедев

ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА ГОДУНОВА ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

1. Введение

На протяжении нескольких последних лет авторами был выполнен цикл работ, посвященных численному исследованию течений в сверхзвуковых струях, как свободных, так и импактных (то есть, соударяющихся с различными твердыми преградами) [1—5]. Расчеты были проведены в широком диапазоне определяющих параметров, причем варьировались как физические параметры задачи (скорость, давление, плотность в начальном сечении струи), так и геометрические (размеры и форма преград, расстояние между преградой и срезом сопла, откуда истекает струя). Особое внимание было уделено автоколебательным режимам, возникающим при соударении струй с преградами, — явлению, которое широко изучается экспериментально, аналитически и численно на протяжении почти столетия после его открытия Юл. Гартманом [6] (весьма подробный обзор исследований на эту тему можно найти в [7]).

Все расчеты, проведенные авторами, были выполнены методом С.К. Годунова первого порядка точности, то есть в том виде, как он впервые был представлен в статье [8] и описан затем в широко известной монографии [9]. При этом при обсуждении результатов работы неоднократно возникал вопрос о том, насколько оправдано применение разностной схемы низкого порядка, в то время как разработаны и широко используются схемы высокого порядка (даже выше чем десятого). Вместе с тем следует иметь в виду, что в последние годы при помощи данного метода решены многие практически важные задачи. Среди них задачи о течении газов в сверхзвуковых соплах при наличии волн горения и детонации, сопровождаемых большим количеством физико-химических реакций [10, 11]; запуске кольцевого сопла реактивного двигателя [12];

кумуляции взрывных волн в трехмерных замкнутых объемах сложной геометрии [13]; распространении в атмосфере продуктов испарения метеоритных тел с ударом образовавшейся струи о земную поверхность, в том числе покрытую растительным массивом [14]; и др.

Причина, по которой авторами данной работы, как, вероятно, и другими авторами, был выбран метод именно первого порядка, состоит, разумеется, в стремлении к экономии компьютерных ресурсов, что особенно важно при серийных расчетах многопараметрических задач. Как отмечено выше, проблема импактных струй принадлежит именно к таким задачам. Более того, при численном моделировании автоколебательных (квазипериодических) процессов оказывается крайне важно провести расчет достаточно длительной реализации процесса, для того чтобы определить по полученным результатам достоверную статистическую характеристику.

В качестве примера рассмотрим соударение осесимметричной струи, истекающей из сверхзвукового сопла с числом Маха $M_a = 3.2$ при нерасчетности (отношении давления на кромке выходного сечения сопла AB к давлению в окружающей среде) $N = 0.7$, с полкой преградой HFG , изображенной на рис. 1а. Геометрические параметры взаимодействия следующие: глубина полости $h = 10$, расстояние между срезом сопла и преградой $l = 6$ (все геометрические размеры отнесены к радиусу сопла r_a). В качестве начальных данных были взяты так называемые «условия пушечного выстрела», когда в начальный момент времени во всей вычислительной области задаются условия, соответствующие окружающей среде, и только в начальном сечении струи задаются условия, соответствующие срезу сопла. На рис. 1б представлена зависимость давления на дне полости от времени (давление p отнесено к удвоенному скоростному напору на срезе сопла $\rho_a V_a^2$, а время t к величине r_a/V_a).

Начальная стадия процесса ($t < 500$) характеризуется постепенно затухающими низкочастотными колебаниями, соответствующими затеканию струи в полость с последующим опорожнением последней. Далее постоянно прибывающие со струей массы газа начинают растекаться вокруг наружной цилиндрической поверхности GF , течение в полости относительно стабилизируется, а течение перед преградой характеризуется высокочастотными колебаниями, которые передаются и внутрь полости.

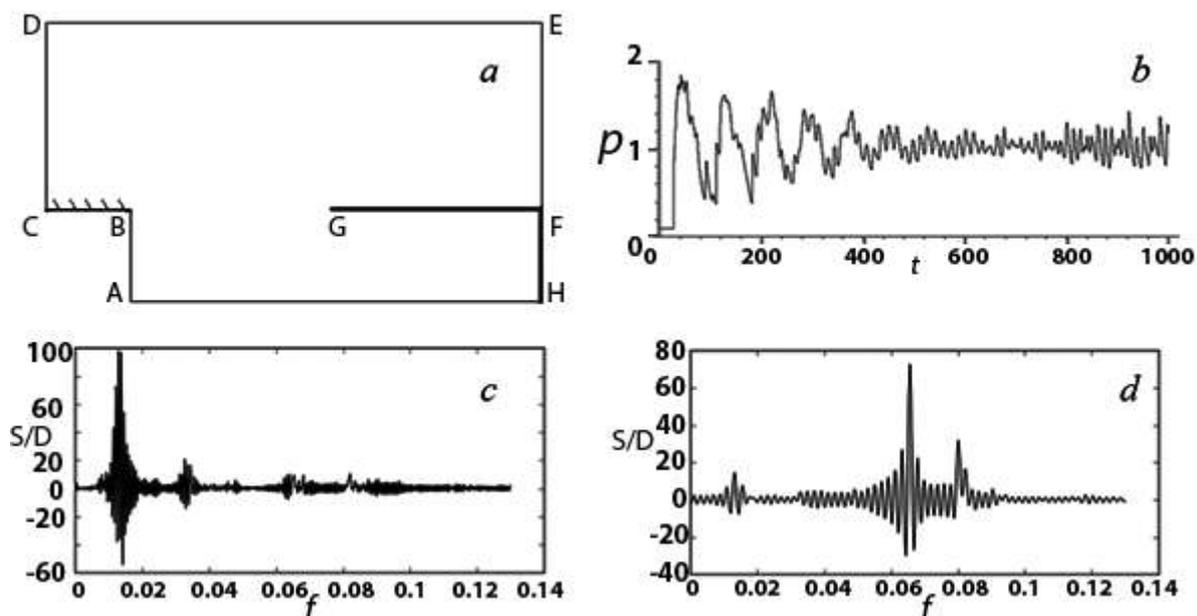


Рис. 1. К расчету взаимодействия сверхзвуковой струи с полой преградой *HFG*. *a*, постановка задачи; *b*, зависимость давления на дне полости (в точке *H*) от времени; *c*, спектральная плотность процесса, изображенного на рис. 1*b*, рассчитанная по интервалу времени $0 \leq t \leq 500$; *d*, то же, рассчитанное по интервалу времени $500 \leq t \leq 1000$.

Рассмотрим спектральные характеристики процесса, построенные на рис.1, *c* и *d*, по реализациям $50 \leq t \leq 500$ и $500 \leq t \leq 1000$, соответственно. Очевидно, что первая из них (рис. 1*c*) дает совершенно неверное описание процесса, представляя лишь его начальную стадию, которая, в действительности, «забывается» при больших значениях времени t . Для верного описания процесса должна быть просчитана достаточно длительная реализация (рис. 1 *d*).

При фиксированном времени расчета (оно задается ограничением на компьютерные ресурсы, которое при серийном счете вариантов существует всегда) длительность рассчитанных реализаций будет зависеть от экономичности численного метода, в частности, от порядка разностной схемы. Эта зависимость даже сильнее обратно пропорциональной, то есть при переходе от схемы первого порядка к схеме порядка n рассчитанная длительность сократится более чем в n раз. Отсюда ясно, что переход к схеме высокого порядка, который может обеспечить выигрыш в точности на рассчитанном отрезке времени порядка нескольких процентов, может в то же время полностью исказить, не только количественно, но и качественно, характеристику нестационарного процесса в целом.

Этими доводами и руководствовались авторы, прибегнув в своих расчетах к схеме С.К. Годунова первого порядка аппроксимации. Вместе с тем, необходимо было иметь представление о точности рассчитанных таким образом решений, чтобы не оказаться в ловушке, известной по пословице: «простота хуже воровства».

Именно это и является целью настоящей работы. В двух последующих параграфах статьи проводится тестирование схемы С.К. Годунова первого порядка аппроксимации на некоторых модельных одномерных и двумерных нестационарных задачах. Для этой цели использован известный сборник тестовых задач [15], которые решались различными методами повышенного порядка точности, от второго до пятого. Поскольку данное исследование предпринято в связи с численным моделированием проблем газовой динамики струйных течений, в последнем параграфе работы проводится оценка точности решений для задач этого круга путем сравнения с численными результатами других авторов и с экспериментом.

Авторы полагают, что полученные методические результаты важны не только для валидации их собственных численных исследований, но и могут быть полезны для других исследователей, пользующихся в своих расчетах методом С.К. Годунова первого порядка точности.

2. Тестирование на одномерных задачах

В названной выше работе [15] тестировались 10 различных разностных схем. По результатам проведенных сравнений можно условно говорить о лидирующей, средней и замыкающей группах методов из числа исследованных, хотя для различных решенных тестовых задач наилучшие результаты могут давать разные методы. В группе лидеров находится взвешенная существенно неосциллирующая схема третьего порядка [16] (WENO3) и версия этого метода пятого порядка (WENO5), а также центральная схема с ограничителем (JT) [17], имеющая второй порядок точности. Именно с этими методами будет проведено дальнейшее сравнение.

В таблице 1, взятой из работы [15], представлены рассчитанные одномерные задачи (задачи Римана), представляющие собой классические задачи о распаде разрыва. На отрезке $(0, 1)$ (кроме случая задачи «*peak*», которая рассчитывается в области $x \in (0.1, 0.6)$) задачи Римана рассчитываются для времен $t \in (0, T)$. В начальный момент времени задаются постоянные значения в левой части области (ρ_L, u_L, p_L) для

плотности, скорости и давления в интервале $x \in (0, x_0)$ и в правой части (ρ_R, u_R, p_R) для $x \in (x_0, 1)$. Таким образом, каждая тестовая задача определяется восемью параметрами $\rho_L, u_L, p_L, \rho_R, u_R, p_R, x_0, T$. В задаче Ноя (Noh, [18]) показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, в то время как в других задачах $\gamma = 1.4$.

Test	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	x_0	T
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.8	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15
Noh	1	1	10^{-6}	1	-1	10^{-6}	0.5	1
3a	1	-19.59745	1000	1	-19.59745	0.01	0.8	0.012
4	5.99924	19.5975	460.894	5.99242	-6.19633	46.095	0.4	0.035
5	1.4	0	1	1	0	1	0.5	2
6	1.4	0.1	1	1	0.1	1	0.5	2
peak	0.1261192	8.9047029	782.92899	6.591493	2.2654207	3.1544374	0.5	0.0039

Табл. 1. Одномерные тестовые задачи

Граничные условия в этих задачах ставятся в виде постоянных, равных начальным значениям, т. к. за время T образующиеся возмущения не успевают дойти до границ области.

Большинство одномерных задач, рассмотренных ниже, имеют аналитические решения. Ниже численные решения, полученные методом Годунова первого порядка, сравниваются как с этими аналитическими решениями, так и с численными решениями, полученными различными методами в [15]. Сравнение проводится по рассчитанным значениям плотности, так как численное определение именно этого параметра вызывает наибольшие трудности (в частности, и потому что давление и нормальная компонента скорости не претерпевают разрыва на контактных поверхностях).

В оригинальной работе [15] для всех задач бралось 100 ячеек по x , кроме задач 3a и 4, где бралось 200 ячеек сетки.

В методе Годунова размер шага по времени не постоянен и определяется условием Куранта—Фридрихса—Леви, поэтому время остановки счета бралось приблизительно соответствующим тому, что в задачах из работы [15].

Тест 1 (рис. 2) представляет собой задачу, где в результате распада начального разрыва влево движется волна разрежения, вправо – контактный разрыв и ударная волна. Этот тест, где в расчетах по методу Годунова было взято 200 ячеек на рассмотренном интервале, хорошо

демонстрирует известный факт, что данный метод хорошо аппроксимирует ударные волны при более сильном «размазывании» движущихся контактных поверхностей и волн разрежения (рис. 2а). Точность аппроксимации ударной волны в методе Годунова находится на том же уровне, что у схем WENO5 (рис. 2b, где линией представлено аналитическое решение, а точками – расчет) и JT. В то же время контактная поверхность размазывается на примерно вдвое большем числе точек, чем в WENO5 и JT (хотя расчеты по этим схемам проведены с использованием лишь 100 ячеек). Что касается волны разрежения, то в методе Годунова она аппроксимируется с дефектом при переходе через скорость звука (наблюдается небольшой перепад в окрестности звуковой скорости). Рассмотренная простая задача, возможно, представляет наиболее неблагоприятный тест для метода Годунова, хотя в целом результаты, полученные с его помощью, можно считать удовлетворительными.

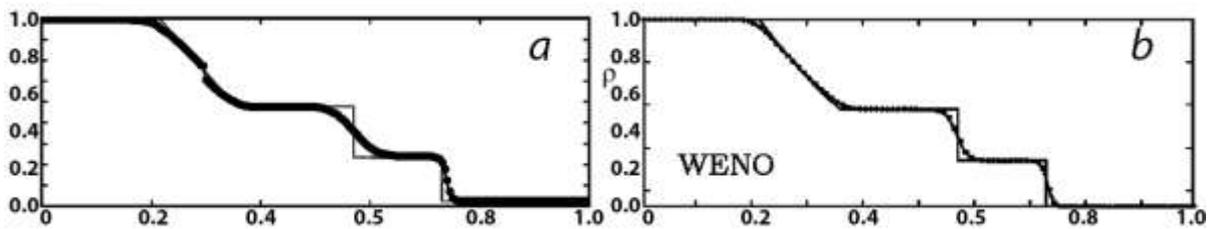


Рис. 2. Тест 1, 200 ячеек, метод Годунова (a), схема WENO (b)

В Тесте 2 в левой и правой симметричных областях задаются одинаковые начальные значения плотности и давления, а скорости равны по величине и противоположны по направлению. Таким образом, два потока разбегаются, образуя область, подобную вакууму, в которой давление и плотность равны нулю, но внутренняя энергия отлична от нуля. В целом ни одна из схем, тестируемых в работе [15], не дает хорошего приближения для этой несколько искусственной проблемы, причем две схемы вообще не справились с расчетом. По-видимому, наилучший результат в этом случае обеспечивает схема JT (рис. 3c), тогда как схема пятого порядка WENO5 дает результаты, вряд ли намного лучшие, чем схема Годунова первого порядка (рис. 3b и 3a, соответственно).

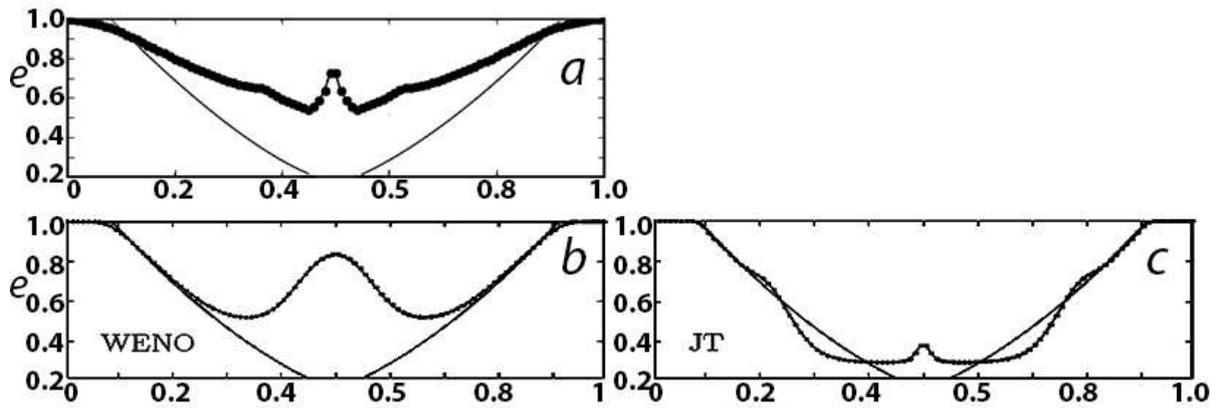


Рис. 3. Тест 2, 100 ячеек, внутренняя энергия e ($t = 0.15$). Метод Годунова (a), схема WENO (b), схема JT (c)

В задаче Ноя две ударные волны бесконечной интенсивности движутся в разные стороны от центра, оставляя за собой область постоянного давления и плотности. Небольшой дефект в виде провала в центральной части области есть как у метода Годунова (рис. 4a), так и у всех схем, опробованных в [15]. Например, у схемы пятого порядка WENO5 провал не меньше (рис 4b).

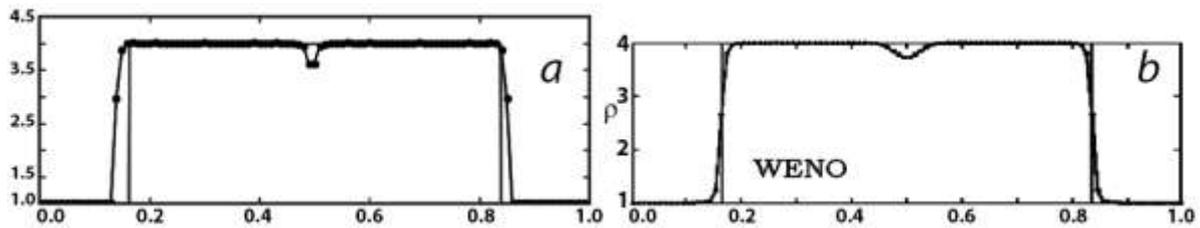


Рис. 4. Тест Noh, 100 ячеек, метод Годунова (a), схема WENO (b)

В задаче Тест 3а при $x = 0.8$ образуется стационарная контактная поверхность, которую метод Годунова (рис. 5a) разрешает лучше, чем схема WENO5 пятого порядка (рис. 5b) и центральная схема с ограничителем JT.

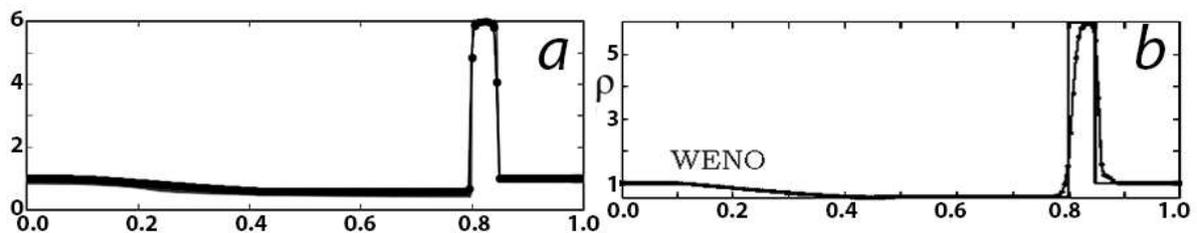


Рис. 5. Тест 3а, 200 ячеек, метод Годунова (a), схема WENO (b)

В задаче Тест 4 две ударные волны движутся в разные стороны, а между ними находится движущаяся контактная поверхность. Метод Годунова аппроксимирует ударные волны отлично (рис. 6a). Однако

движущаяся контактная поверхность сильно размазана, сильнее чем в схеме пятого порядка WENO5 (рис. 6b) и центральной схеме с ограничителем JT второго порядка. Однако, схема третьего порядка WENO3 размазывает данную поверхность разрыва на том же уровне, что и метод Годунова, несмотря на третий порядок аппроксимации.

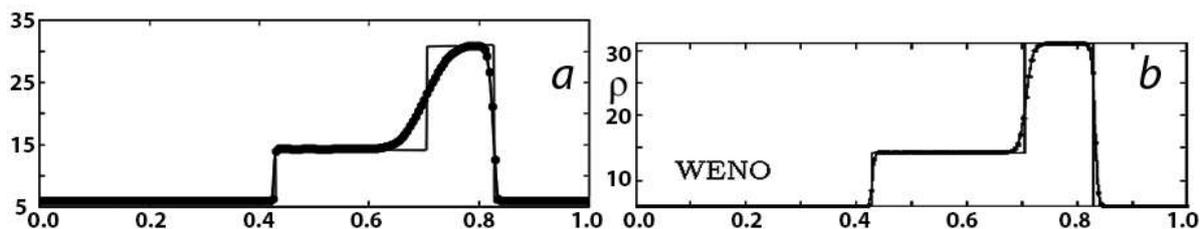


Рис. 6. Тест 4, 200 ячеек, метод Годунова (a), схема WENO (b)

В задаче Тест 5 образуется неподвижная контактная поверхность, она аппроксимируется методом Годунова очень хорошо (рис. 7a), лучше чем центральной схемой с ограничителем JT (рис 7b). Это обстоятельство является весьма важным при решении струйных задач, так как в этом случае приходится иметь дело именно с такими поверхностями (границами между окружающей средой и струей).

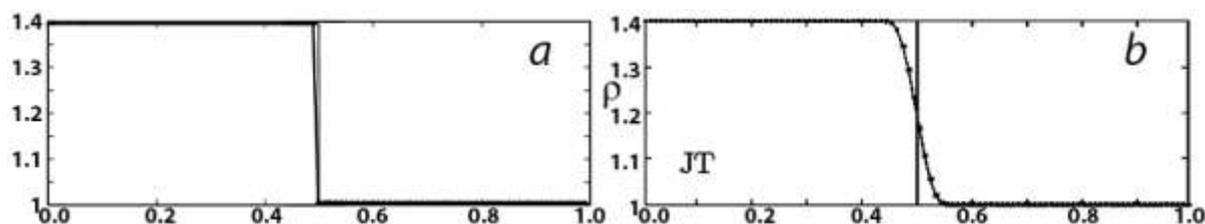


Рис. 7. Тест 5, 100 ячеек, метод Годунова (a), схема JT (b)

В отличие от предыдущей задачи, скорости в левой и правой областях в задаче Тест 6 одинаковые, но не нулевые, и образуется движущийся контактный разрыв. Он довольно сильно размазывается (рис. 8a), однако другие методы из работы [15], в частности, JT тоже сильно размазывают его (рис 8b).

В задаче «пик плотности» в результате распада начального разрыва образуются две движущиеся, близко расположенные ударные волны. В узкой зоне между ними имеет место пик плотности. Метод Годунова «срезает» величину этого пика, вырабатывая значение 25 вместо 40 (рис. 9a). Ошибку такого же порядка допускает схема WENO3; хотя схема пятого порядка WENO5 и центральная схема с ограничителем JT (рис. 9b) дают точное значение указанного пика. Впрочем, один из методов,

оттестированных в [15], вообще прекратил счет при решении данной задачи.

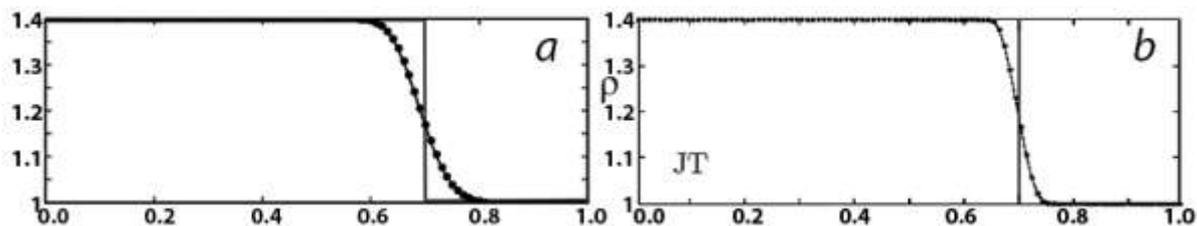


Рис. 8. Тест 6, 100 ячеек, метод Годунова (a), схема JT (b)

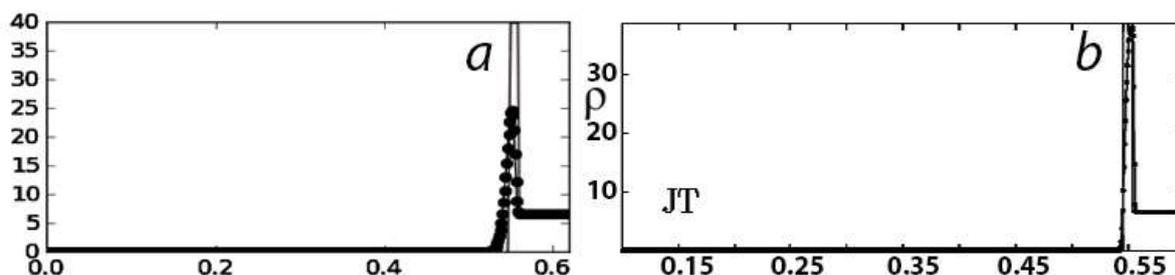


Рис. 9. Тест «пик плотности», 800 ячеек, метод Годунова (a), схема JT (b)

Общие выводы о целесообразности применения метода Годунова первого порядка в газодинамических расчетах будут даны в конце следующего параграфа.

3. Тестирование на двумерных задачах

Ниже будут описаны три задачи, взятые из работы [15], а именно задачи 3, 12 и 17. Эти задачи решаются в квадрате $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$. Квадрат разделен на четыре области прямыми $x = 1/2$, $y = 1/2$. Задачи Римана в начальный момент времени определяются постоянными значениями параметров в каждом квадранте. Эти постоянные значения для давления p , плотности ρ , x -компоненты скорости u и y -компоненты скорости v представлены в таблице 2, взятой из работы [15]), вместе с временем остановки счета T . Во всех этих задачах показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. Все задачи задаются таким образом, чтобы решения одномерных римановых задач между квадрантами представляли собой ровно одну волну (ударную (S), разрежения (R) или контактный разрыв (J)). Начиная слева и двигаясь по часовой стрелке получим Тест 3: S, S, S, S; Тест 12: J, S, S, J; Тест 17: S, J, R, J. В оригинальной работе расчеты выполнялись на 400×400 ячейках разностной сетки. На такой же сетке проведены настоящие расчеты методом Годунова.

case	left				right				T
	p	ρ	u	v	p	ρ	u	v	
3	0.3	0.5323	1.206	0.0	1.5	1.5	0.0	0.0	0.3
	0.029	0.138	1.206	1.206	0.3	0.5323	0.0	1.206	
12	1.0	1.0	0.7276	0.0	0.4	0.5313	0.0	0.0	0.25
	1.0	0.8	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.7276	
17	1.0	2.0	0.0	-0.3	1.0	1.0	0.0	-0.4	0.3
	0.4	1.0625	0.0	0.2145	0.4	0.5197	0.0	-1.1259	

Табл. 2. Двумерные тестовые задачи

Ниже изолинии плотности в момент времени T , рассчитанные для указанных задач методом Годунова, сопоставляются с результатами расчетов методом WENO5 (рис. 10—12, a и b , соответственно). Можно отметить, что метод Годунова верно воспроизводит образующиеся структуры течений, вплоть до мелких деталей. При этом толщины образующихся поверхностей разрыва, хотя и превышают значения, полученные по схеме пятого порядка WENO5, но сравнимы с ними. Что же касается значений толщин, вырабатываемых схемой третьего порядка WENO3, то они даже несколько выше полученных методом Годунова.

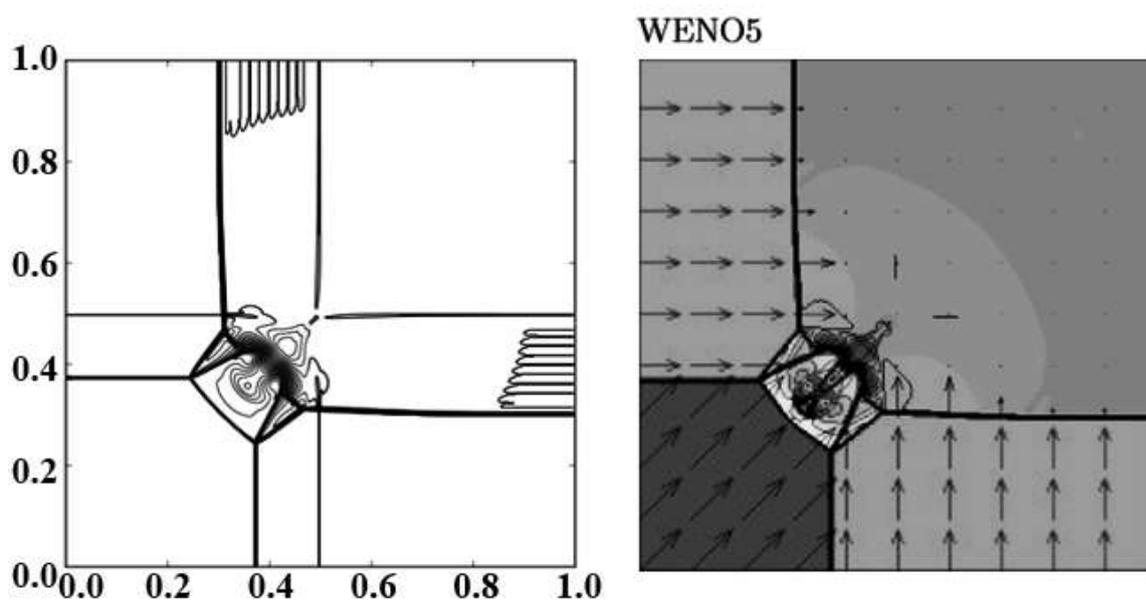


Рис. 10. Тест 3,

ячеек, ρ

метод Годунова (a), WENO5 (b)

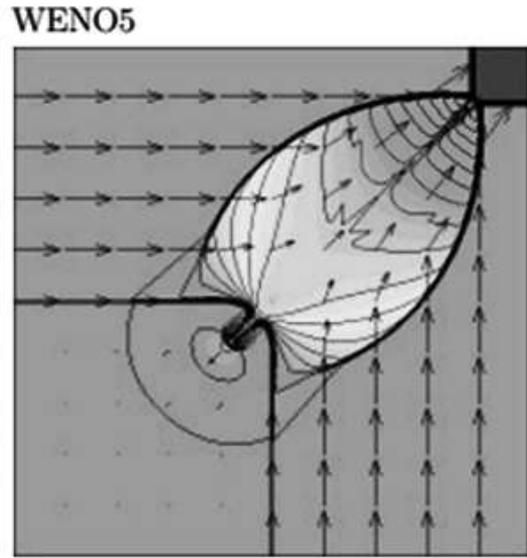
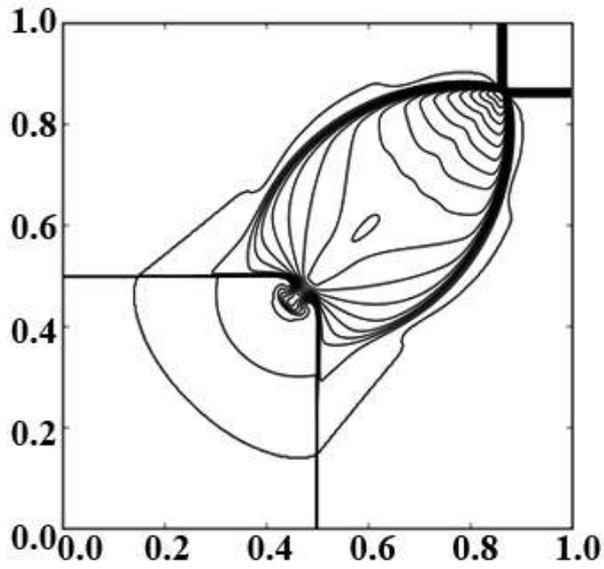


Рис. 11. Тест 12, ячейек, ρ (b)

метод Годунова (a), WENO5

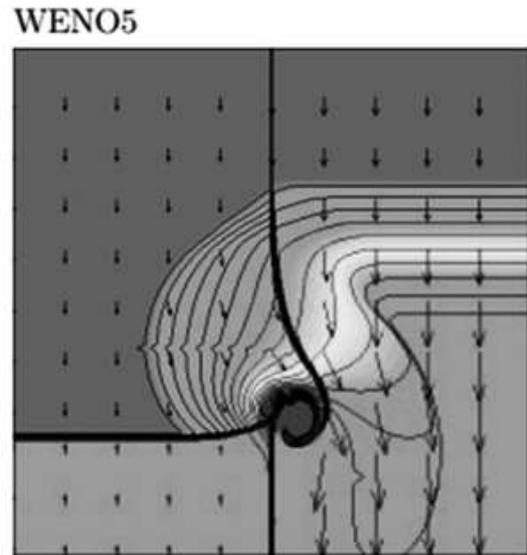
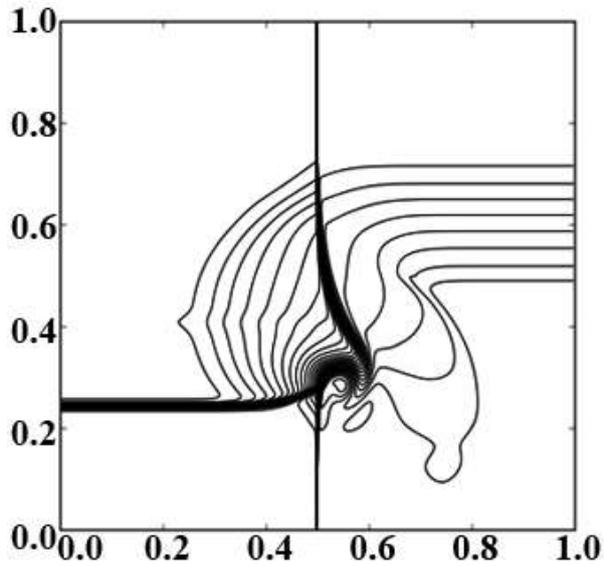


Рис. 12. Тест 17, ячейек, ρ

метод Годунова (a), WENO5 (b)

Таким образом, результаты проведенного тестирования показывают, что в большинстве случаев схема С.К. Годунова, обладающая минимальным порядком аппроксимации, способна реализовать одномерные и двумерные численные решения с разрывами,

лишь немного уступая в точности лучшим из разностных схем, протестированных в работе [15], имеющих более высокий порядок точности (вплоть до пятого). Особенно хорошо реализуются ударные волны и неподвижные контактные разрывы, хотя аппроксимация подвижных контактных разрывов и волн разрежения несколько хуже. Заметим, что некоторым измельчением разностной сетки можно существенно повысить точность полученных результатов; при этом следует иметь в виду, что с точки зрения расходования компьютерных ресурсов уменьшение шага сетки для схемы первого порядка может быть выгоднее, чем переход к схеме более высокого порядка с сохранением шага сетки.

4. Применение к практическим задачам газовой динамики

Начиная с середины прошлого века, ведется активное исследование течений газа в сверхзвуковых струях, вытекающих в атмосферу либо спутный поток. Интерес к этим течениям обусловлен, в первую очередь, потребностями авиационной и ракетной техники, но также и применением в различных отраслях промышленности (металлургической, химической и др.). Методы исследований включают в себя физический и численный эксперимент, причем численное исследование струйных течений может быть основано на различных моделях – уравнениях Эйлера, Навье—Стокса или Рейнольдса.

Сверхзвуковая нерасчетная струя (т.е. с отношением N (см. Введение), большим или меньшим единицы) обладает квазипериодической ударно-волновой структурой (рис. 13).

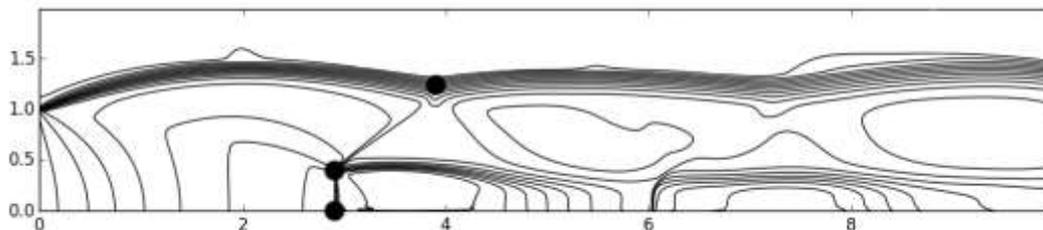


Рис. 13. Свободная сверхзвуковая струя , , изолинии числа Маха по результатам расчета методом Годунова [9].

Эту структуру создаёт висячая ударная волна, начинающаяся вблизи кромки сопла и идущая к оси симметрии, от которой она отражается с образованием диска Маха. Отраженная волна идет к границе струи и, в свою очередь, отражается от нее. Данная точка отражения может рассматриваться как граница первой ячейки («бочки») струи.

За диском Маха следует область дозвукового течения, где, впрочем, поток снова быстро разгоняется до сверхзвуковых значений. Отраженная от границы струи ударная волна снова приходит на ось, снова отражается от нее, и таким образом возникает периодическая структура струи.

Три указанные выше точки (границы диска Маха и точка прихода первой отраженной ударной волны на границу струи) можно рассматривать как основные геометрические параметры, определяющие структуру нерасчетной струи. Поэтому важно их правильное определение в численном расчете. На рис. 13 они представлены жирными черными кружками.

До сих пор не утратило своего значения обширное экспериментальное исследование сверхзвуковых нерасчетных струй, предпринятое в 50-х годах прошлого века [19]. Экспериментальные результаты для трех характерных точек, полученные в [19] для условий, указанных в подписи к рис. 13, отлично совпадают с результатами расчета методом Годунова. Заметим, что эти расчеты проведены на равномерной сетке с размерами ячейки сетки $\Delta x = \Delta y = 0.0125r_a$. Размеры расчетной области по вертикальной координате были $0 \leq y \leq Y = 5r_a$, а по горизонтальной - $r_a \leq x \leq X$, где координата X выбиралась таким образом, чтобы течение в сечении струи $X = \text{const}$ было всюду сверхзвуковым.

На рис. 14 сравниваются результаты расчетов по трем характерным расстояниям (длина первой ячейки свободной струи, расстояние от сопла до диска Маха и вертикальный размер диска Маха) с результатами экспериментов [19]. Сравнения проведены для случаев $M_a = 1$ при различных значениях нерасчетности N и $N = 3$ при различных значениях числа Маха на срезе сопла M_a (как и выше, линейные размеры отнесены к радиусу сопла r_a).

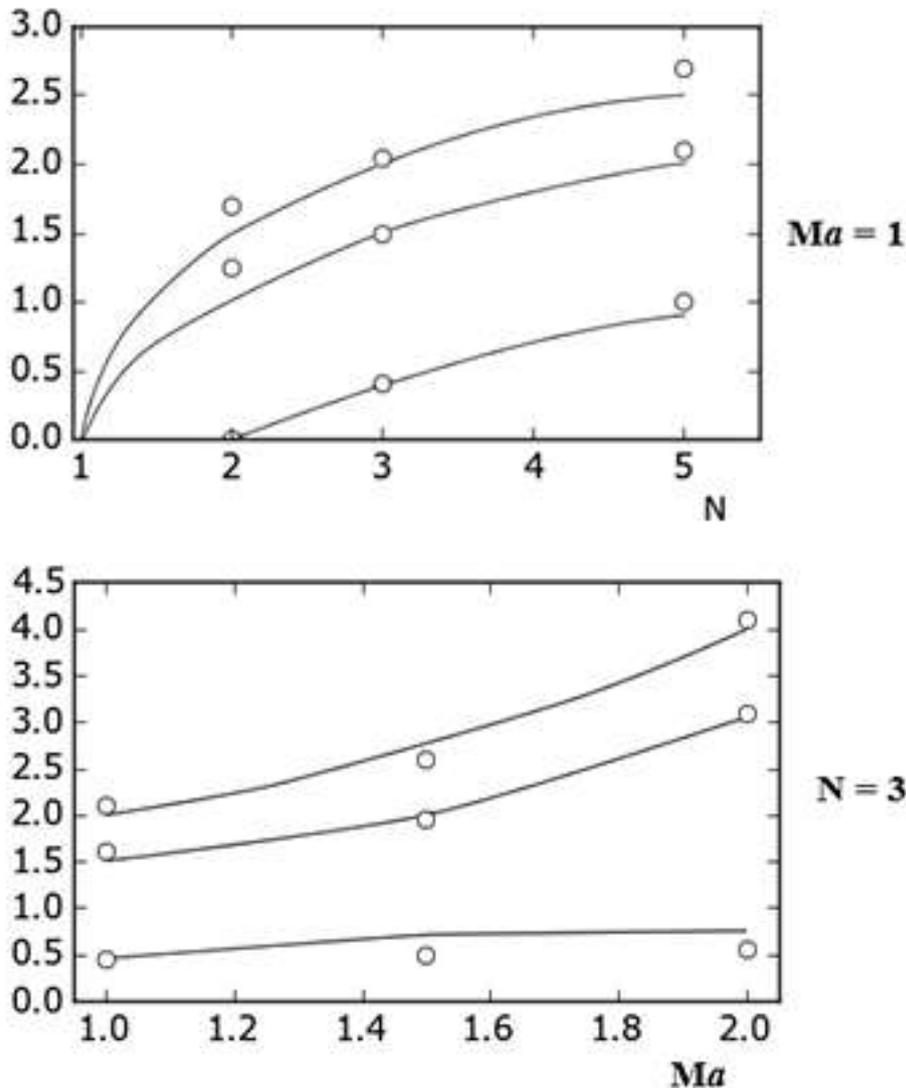


Рис. 14. Сравнение результатов расчета методом Годунова (белые кружки) с экспериментальными данными [19] по длине первой ячейки струи (верхняя кривая), расстоянию от сопла до диска Маха (средняя кривая) и размеру диска Маха (нижняя кривая).

Можно отметить вполне удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных результатов по рассматриваемым характерным размерам для всего рассмотренного диапазона определяющих параметров. Заметим, между прочим, что в определенном диапазоне параметров Ma , N отражение висячей ударной волны от оси симметрии происходит в так называемом квазирегулярном режиме, с исчезающе малым размером диска Маха. При $Ma = 1$ эксперимент [19] дает значение нерасчетности $N = 2$, при котором диск Маха начинает

приобретать конечные размеры; результаты расчета предсказывают то же значение.

На рис. 15 построено распределение локального числа Маха по оси симметрии струи в сравнении с экспериментальными данными [20]. Имеет место хорошее совпадение расчетных и экспериментальных результатов в пределах первой и начала второй ячейки струи и разумное совпадение при дальнейшем удалении от сопла. Некоторое расхождение результатов вдали от сопла следует отнести за счет диссипативных эффектов, имеющих место в физическом эксперименте.

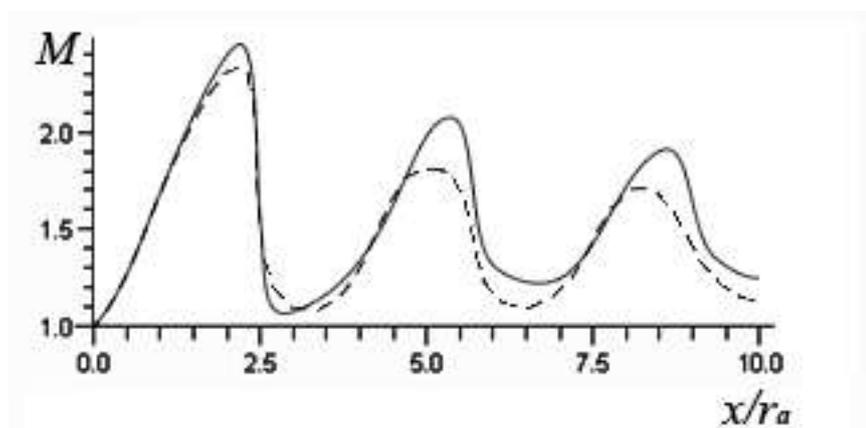


Рис. 15. Распределение числа Маха по оси симметрии свободной струи при $M_a = 1$, $N \approx 2$; сплошная кривая – расчет методом Годунова, пунктир – эксперимент [20].

Наконец, на рис. 16 проводится сравнение поперечных профилей давления в различных сечениях нерасчетной струи, истекающей из сопла с числом Маха $M_a = 1$ при нерасчетности $N=2.64$, рассчитанных в настоящей работе методом Годунова и в работе [21] с использованием пакета VP2/3. Следует заметить, что в [21] расчеты проведены на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса с замыканием по дифференциальной модели турбулентности SST, причем невязкие члены в уравнениях аппроксимировались по разностным схемам как первого, так и второго порядка. Таким образом, в данном случае проводится сравнение результатов, полученных не только различными численными методами, но и на основе разных физических моделей. На рис. 16 приводятся также экспериментальные данные для данного течения из работы [22].

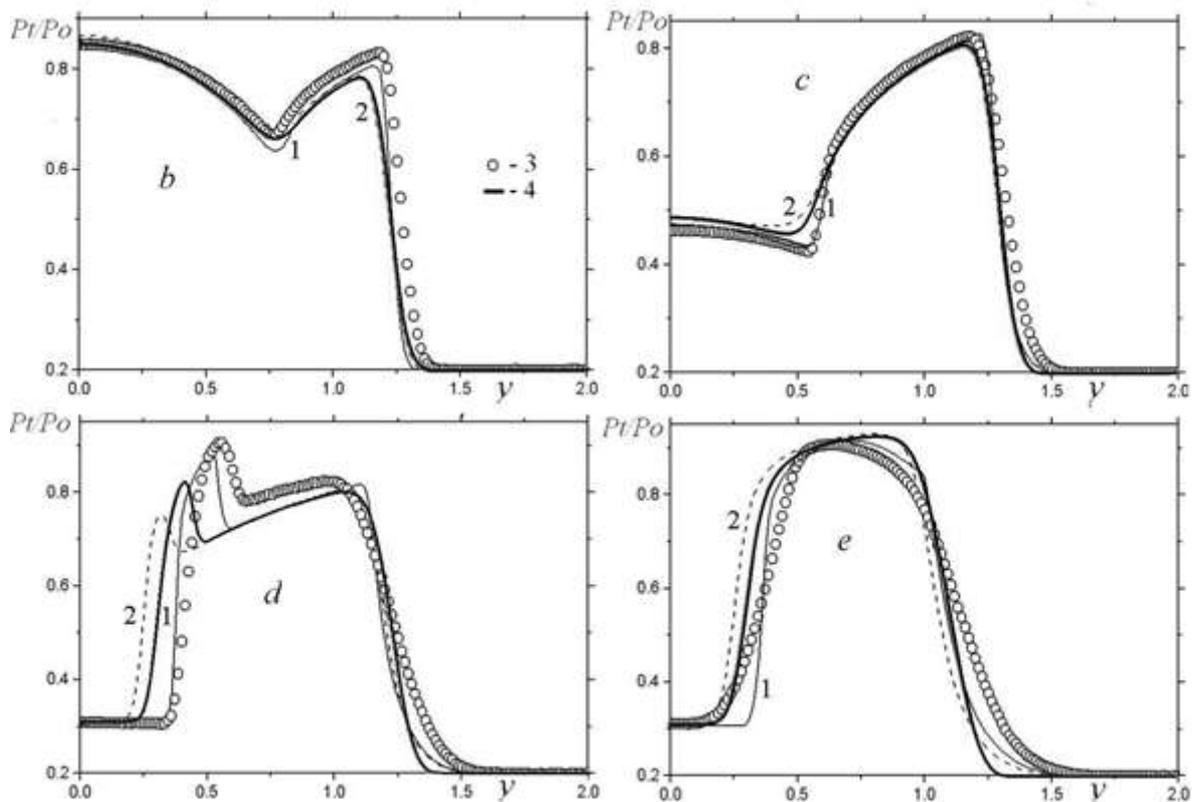


Рис. 16. Сравнение рассчитанных (1,2) и экспериментальных (3) поперечных профилей давления, измеренных трубкой Пито и отнесенных к полному давлению в форкамере Pt/P_0 из [21, 22]. $Ma = 1$, $N = 2.64$. 1, 2 – расчеты по схемам 1 и 2 порядка [21], соответственно; 3 – экспериментальные данные [22]; 4 – расчет методом Годунова.

$$b - x = 1; c - 2; d - 3; e - 4.$$

Результаты на рис. 16 приведены как для сечений, расположенных до диска Маха (b, c, d) так и ниже по потоку от него (e); здесь, как и раньше, координаты x, y отнесены к радиусу сопла r_a . Метод Годунова вполне адекватно описывает общий характер течения, как с качественной, так и количественной стороны, несмотря на то, что он реализует модель невязкого течения, пренебрегая некоторыми реальными эффектами в струйных течениях. С точки зрения точности расчетов, можно видеть, что кривые, рассчитанные методом Годунова первого порядка, находятся посередине между кривыми, рассчитанными пакетом VP2/3 с помощью разностных схем первого и второго порядка. Наибольшее различие между результатами эксперимента и расчетов по разным схемам наблюдается в сечении $x = 3$ (d). Это вполне объяснимо, т.к. для данного набора определяющих параметров указанное сечение находится непосредственно

ниже по потоку от диска Маха (ср. рис. 14), в связи с чем характер течения в этом сечении особенно сложен.

Обратим также внимание на тот факт, что расчет течения невязкого газа методом Годунова дает более резкое изменение характеристик течения у границы струи, особенно в дальних сечениях. Это объясняется сильным размывом границы струи под действием диссипативных эффектов в эксперименте и в расчетах по уравнениям Рейнольдса. Расчет же по модели невязкого газа методом Годунова дает скачок параметров течения на контактной поверхности (границе струи) – ср. со сказанным в п. 1 по поводу задачи Тест 5 (рис. 7).

Общий вывод, который можно сделать на основании проведенных сравнений, состоит в том, что разностная схема Годунова первого порядка точности обеспечивает вполне адекватное описание течений в сверхзвуковых свободных нерасчетных струях, во всяком случае, на протяжении двух первых ячеек струи.

Заметим теперь, что поскольку интерес авторов обращен на решение задач о соударении струй с твердыми преградами (см. Введение), то важно также оценить точность расчетов методом Годунова задач о сверхзвуковом обтекании затупленных тел. Такая оценка была выполнена одним из авторов в работе [23] и повторена в настоящей работе. В частности, проведено сравнение результатов расчета сверхзвукового осесимметричного обтекания цилиндра с плоским торцом при числе Маха набегающего потока $M_a = 3$. На рис. 17а построено распределение давления по линии растекания (ось симметрии + образующая плоской торцевой поверхности + образующая боковой цилиндрической поверхности; начало отсчета в точке торможения на торце тела). Приводятся также результаты расчета методом прямых [24]. В последнем случае в явном виде выделялась поверхность ударной волны с использованием соотношений Рэнкина—Гюгонио и окрестность особой угловой точки сопряжения торцевой и боковой поверхностей тела с помощью асимптотического решения [25] (подробности методики описаны в [23]). Решения, полученные двумя методами, очень хорошо совпадают всюду вплоть до угловой точки, где течение характеризуется бесконечным градиентом давления (и других параметров). Оба решения

на торцевой поверхности также хорошо согласуются с экспериментальными данными (не приведены на рисунке; см. [23]).

Для области вниз по потоку от угловой точки (рис. 17b) представлено сравнение численных решений, рассчитанных методом Годунова, с экспериментальными данными [26] вдоль линий $y = 0.208$ и 0.408 над цилиндрической поверхностью $y = 0$ (линейные размеры всюду отнесены к радиусу цилиндра). Вдоль этих линий совпадение с экспериментом очень хорошее. Заметим, что непосредственно на боковой поверхности за угловой точкой образуется зона локального отрыва, в связи с чем модель невязкого течения теряет точность и совпадение с экспериментом в этой локальной области ухудшается.

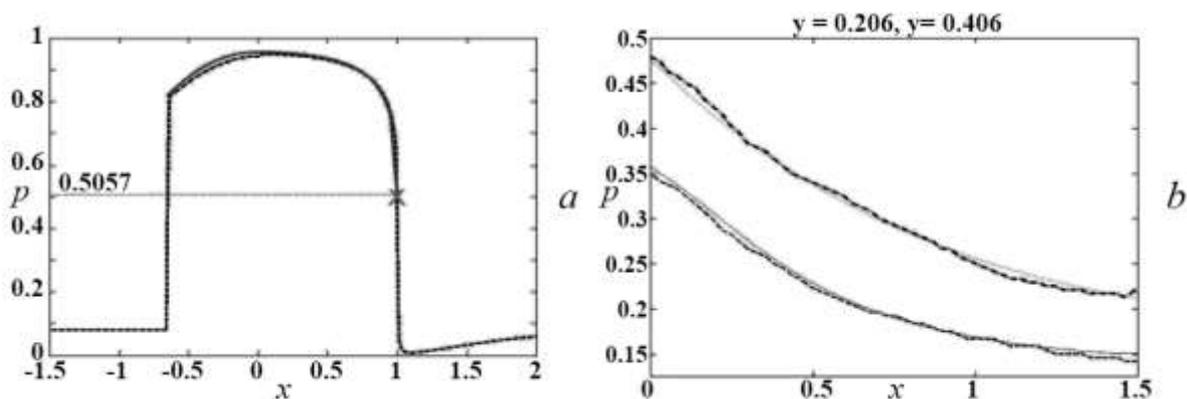


Рис. 17. Сравнение распределения давления при обтекании цилиндра с плоским торцом с результатами расчетов методом прямых [24, 25] (a) на линии растекания и экспериментальными результатами [26] (b) над боковой поверхностью тела; пунктир – результаты расчетов методом Годунова (обтекание при числе Маха $M_a = 3$, давление отнесено к удвоенному скоростному напору в набегающем потоке).

Таким образом, метод Годунова первого порядка аппроксимации позволяет также получать вполне адекватные численные решения задачи о сверхзвуковом обтекании затупленных тел.

В заключение заметим, что в работе [27] было исследовано течение, порождаемое гиперзвуковым сферическим источником внутри цилиндрического канала. Это течение характеризуется отражением ударной волны от оси симметрии с образованием зоны обратного

(циркуляционного) течения. Численное исследование в [27] было проведено как методом Годунова первого порядка, так и методом адаптивной искусственной вязкости [28] второго порядка на нерегулярной сетке. В большинстве рассчитанных случаев совпадение решений, полученных обоими методами, находилось в пределах 1-2%, лишь в наиболее сложных с вычислительной точки зрения случаях достигая 4-5% (см. [27]). Это еще раз говорит о надежности метода С.К. Годунова первого порядка как вычислительного инструмента для определения весьма сложных решений.

Литература

1. Бочарова О.В., Лебедев М.Г. Моделирование нестационарного взаимодействия струи с преградой. // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 8. С. 31—36.
2. Lebedev M., Bocharova O. Self-oscillatory regimes of the sonic jet/flat plate interaction: Theoretical predictions vs. experimental data. // West-East High Speed Flow Field Conference, 19-22 November 2007, Moscow, Russia. Workbook. Moscow: TsAGI, 2007. P. 190—191.
3. Бочарова О.В. Моделирование автоколебательного взаимодействия звуковой недорасширенной струи с преградой. // Ученые записки ЦАГИ. 2010. Т. 41. № 2. С. 59—64.
4. Бочарова О.В., Лебедев М.Г. Автоколебательные режимы взаимодействия сверхзвуковых перерасширенных струй с преградами // Химическая физика. 2011. Т. 30. № 7. С. 40—47.
5. Бочарова О.В. Моделирование процесса автоколебаний в сверхзвуковой струе, натекающей на трубку Гартмана // Математическое моделирование. 2013 Т. 25. № 9. С. 75—91.
6. Hartmann J. On a new method for the generation of sound waves // Physical Review. 1922. V. 20. N 6. P. 719—727.
7. Raman G., Srinivasan K. The powered resonance tube: From Hartmann's discovery to current active flow applications. // Progress in Aerospace Science. 2009. V. 45. P. 97—123.
8. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 42. № 3. С. 271—306.

9. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400с.
10. Туник Ю.В. Детонационное горение водорода в сопле Лавалья с центральным коаксиальным цилиндром. // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 5. С. 142—148.
11. Туник Ю.В. Численное моделирование детонационного горения в высокоскоростном потоке водород-кислородной смеси. // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 2. С. 107—114
12. Афонина Н.Е., Громов В.Г., Левин В.А., Мануйлович И.С., Марков В.В., Смехов Г.В., Хмелевский А.Н. Исследование запуска кольцевого сопла в натурной и виртуальной импульсной аэродинамической установке. // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 158—165.
13. Базаров С.Б., Набоко И.М. Фокусировка взрывных волн: трехмерное математическое моделирование // Химическая физика. 2008. Т. 27. № 10. С. 58—62.
14. Ситник В.В. Разрушение лесного массива ударной волной, вызванной падением крупного космического тела // Химическая физика. 2009. Т. 28. № 5 С.45--55.
15. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations. // SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. V. 28. P. 995—1017.
16. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. // Journal Computational Physics. 1996. V. 126. P. 202—228.
17. Jiang G.-S., Tadmor E. Non-oscillatory central schemes for multidimensional hyperbolic conservations laws. // SIAM Journal on Scientific Computing. 1998. V. 19. P. 1892—1917.
18. Noh W.F. Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and artificial heat flux. // Journal Computational Physics. 1987. V. 72. P. 78—120.
19. Love E.S., Grisby C.E., Lee L.P., Woodling M.J. Experimental and theoretical studies of axisymmetric free jets // NASA Techn. Rep. R-6, 1959.
20. Henderson B., Bridges J., Wernet M. An experimental study of the oscillatory flow structure of tone-producing supersonic impinging jets // J. Fluid Mech. 2005. V. 542. P. 115—137.

21. Исаев С.А., Липницкий Ю.М., Баранов П.А., Панасенко А.В., Усачов А.Е. Моделирование турбулентной сверхзвуковой недорасширенной струи, истекающей в затопленное пространство, с помощью модели переноса сдвиговых напряжений // Инж.-физ. Журнал. 2012. Т. 85. № 6. С. 1253—1267.
22. Запрягаев В.И., Кавун И.Н., Киселев Н.П. Структура течения на начальном участке сверхзвуковой струи, истекающей из сопла с шевронами // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 61. № 2. С. 71—80.
23. Лебедев М.Г., Ситник В.В. К расчету течений сжимаемого газа с бесконечными градиентами скорости и давления // Сб. «Прикладная математика и информатика, № 20». М.: МАКС Пресс, 2005. С. 40—57.
24. Гишинский С.М., Теленин Г.Ф., Тиняков Г.П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 9—28.
25. Guderley K.G. Singularities at the sonic velocity // Wright-Patterson Air Force Base Rep/ F-TR-1171-ND/ 1948.
26. Рябинков Г.М., Рябинков А.Г. Экспериментальное исследование обтекания цилиндра с плоским торцом // Сб. «Проблемы прикладной математики и механики». М.: Наука, 1971. С. 269—277.
27. Бочарова О.В., Лебедев М.Г., Попов И.В., Ситник В.В., Фрязинов И.В. Отражение ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 8. С. 33—50.
28. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках // Математическое моделирование. 2014. Т. 24. № 6. С. 109—127.