

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОЩНОСТИ В УЗЛАХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

1. Введение. Исследование границ допустимого изменения значений электрической мощности, производимой либо потребляемой отдельными элементами электроэнергетических систем переменного тока, играет существенную роль при анализе надежности функционирования энергосистем [1,2], расчете оптимального распределения нагрузки между электростанциями [3,4] и решении задач, связанных с ценообразованием на рынках электроэнергии [5,6].

Реальные электроэнергетические системы имеют сложную структуру: в их состав входят атомные, тепловые и гидравлические электростанции, потребители электрической энергии, коммутационное оборудование, линии электропередачи, трансформаторные подстанции, компенсирующие устройства и т.д. Упрощенно энергосистему можно представить как сеть, состоящую из узлов, соединенных между собой ветвями. Основными параметрами, характеризующими установившийся режим работы сети (далее – режим сети), являются напряжения и мощности узлов (мощность узла представляет собой разность суммарной мощности генерации и суммарной мощности потребления в данном узле). Значения указанных величин связаны между собой системой известных физических закономерностей, таких как закон Ома, первый закон Кирхгофа и т.д.

Режим энергосистемы существует не при любых заданных значениях контролируемых параметров (например, энергосистема не будет функционировать, если потребление мощности в каком-либо узле превысит некоторое предельное значение). Математически это выражается тем фактом, что система уравнений, связывающих между собой значения параметров (уравнений расчета установившегося режима сети [7,8]), является неразрешимой. Кроме того, режим сети может существовать, но при этом характеризоваться недопустимыми значениями параметров: например, слишком низкими либо слишком высокими значениями модулей напряжений узлов, слишком большими значениями потоков мощности по ветвям и т.д. Таким образом, возникают задачи вычисления предельных значений параметров режима, при которых существует режим рассматриваемой энергосистемы, удовлетворяющий заданным условиям допустимости. Одной из задач данного класса, представляющих наибольший практиче-

ский интерес, является задача максимизации потребления и/или генерации активной мощности¹ в выбранном узле (либо группе узлов) энергосистемы. В настоящей статье приведен обзор основных групп методов, применяемых для решения указанной задачи, проведено сравнение отдельных подходов, описаны их достоинства и недостатки. В частности, приведен пример, демонстрирующий, что результаты, полученные в [9] для экстремальных значений мощности одного узла, не удастся обобщить для задачи максимизации/минимизации мощности группы узлов сети.

2. Математическая постановка задачи. Рассмотрим сеть переменного тока, состоящую из $n + 1$ узлов (пронумеруем узлы числами от 0 до n), соединенных ветвями. Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что в узле находится единственный генератор² либо единственный потребитель³ мощности. Обозначим через P_k и Q_k активную и реактивную мощности k -го узла, через δ_k обозначим фазовый угол напряжения в k -м узле, а через

$$U_k = |U_k| e^{i\delta_k}$$

обозначим напряжение в k -м узле.

Для формализации задачи максимизации узловых мощностей составим систему уравнений расчета установившегося режима рассматриваемой сети. Конкретная форма записи указанных уравнений [7,10] зависит от того, какие параметры являются заданными. Как правило, фиксируют значения следующего набора параметров. В одном из узлов (балансирующий узел) поддерживаются заданный модуль напряжения и заданный фазовый угол напряжения, равный нулю. В дальнейшем считается, что балансирующим является 0-й узел, т.е. $|U_0|$ – фиксированное число, $\delta_0 = 0$. Для генераторов (обозначим множество номеров узлов, в которых находятся генераторы, через K_1) задаются значения активной мощности P_k и модуля узлового напряжения $|U_k|$. Для потребителей (обозначим множество номеров узлов, в которых находятся потребители, через K_2) задаются значения активной и реактивной мощностей. В общем случае мощности потребления зависят от подведенного напряжения, поэтому в расчете используются функции $P_k(U_k)$ и $Q_k(U_k)$, выражающие данные зависимости (см. далее пункт 3.1).

¹ Активной (соответственно, реактивной) мощностью называются действительная (соответственно, мнимая) составляющая мощности.

² Будем называть такие узлы генераторными.

³ Будем называть такие узлы потребительскими.

Для расчета установившегося режима необходимо определить фазовые углы напряжений в генераторных узлах ($\delta_j, j \in K_1$), а также модули и фазовые углы напряжений в потребительских узлах ($|U_k|, \delta_k, k \in K_2$) из решения системы уравнений

$$\begin{cases} P_j = \tilde{P}_j(\mathbf{x}), j \in K_1, \\ P_k(U_k) = \tilde{P}_k(\mathbf{x}), k \in K_2, \\ Q_k(U_k) = \tilde{Q}_k(\mathbf{x}), k \in K_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (\delta_j, j \in K_1; |U_k|, \delta_k, k \in K_2)$, $\tilde{P}_k(\cdot)$ и $\tilde{Q}_k(\cdot)$, $k = 0, \dots, n$ – аналитические выражения для суммы потоков активной и реактивной мощности, протекающих со стороны k -го узла по всем ветвям, примыкающим к данному узлу.

Если рассматривается запись в прямоугольной системе координат, то вектор \mathbf{x} состоит из действительных и мнимых компонент напряжений узлов, а уравнения расчета установившегося режима состоят из (1) и уравнений

$$(U'_k)^2 + (U''_k)^2 = (U_k^0)^2, k \in K_1, \quad (2)$$

где $U'_k = \text{Re}U_k$, $U''_k = \text{Im}U_k$, а U_k^0 – заданное значение модуля напряжения k -го узла.

Запишем указанные выражения в явном виде. Введем следующие обозначения:

$S_k = P_k + iQ_k$ – полная мощность k -го узла;

y_{kj} – полная проводимость⁴ ветви, соединяющей k -й и j -й узлы;

y_{kj}^0 – проводимость на землю ветви, соединяющей k -й и j -й узлы;

y_k^{sh} – проводимость шунта в k -м узле.

Пусть ветвь, соединяющая k -й и j -й узлы, является трансформатором, тогда обозначим через τ_{kj} коэффициент трансформации данного трансформатора (отношение низкого напряжения к высокому).

Обозначим через $J(k)$ множество номеров узлов, соединенных ветвями с k -м узлом. Множество $J(k)$ представимо в виде

$$J(k) = J_1(k) \cup J_2(k) \cup J_3(k),$$

где $J_1(k)$ – множество номеров узлов, соединенных с k -м узлом ветвями, не являющимися трансформаторами, $J_2(k)$ – множество номеров узлов,

⁴ Проводимостью называется величина, обратная сопротивлению.

соединенных с k -м узлом ветвями, которые являются трансформаторами, и для которых k -й узел является стороной высокого напряжения, $J_3(k)$ – множество номеров узлов, соединенных с k -м узлом ветвями, которые являются трансформаторами, и для которых k -й узел является стороной низкого напряжения.

Через a^* будем обозначать комплексно-сопряженное число к числу a , через \mathbf{A}^* будем обозначать сопряженную матрицу к матрице \mathbf{A} (т.е. $(a^*)_{jk} = (a_{kj})^*$).

Из первого закона Кирхгофа следует, что полная мощность k -го узла S_k равна сумме потоков мощности, протекающих со стороны k -го узла по всем ветвям, примыкающим к данному узлу. Применяя закон Ома [7], получаем:

$$S_k = S_k^0 + S_k^1 + S_k^2 + S_k^3,$$

где

$$\begin{cases} S_k^0 = U_k U_k^* (y_k^{\text{sh}})^*, \\ S_k^1 = \sum_{j \in J_1(k)} \left(\frac{1}{2} U_k U_k^* (y_{kj}^0)^* + U_k (U_k - U_j)^* y_{kj}^* \right), \\ S_k^2 = \sum_{j \in J_2(k)} \left(U_k U_k^* (y_{kj}^0)^* + U_k \left(U_k - \frac{U_j}{\tau_{kj}} \right)^* y_{kj}^* \right), \\ S_k^3 = \sum_{j \in J_3(k)} \left(\frac{U_k}{\tau_{kj}} \left(\frac{U_k}{\tau_{kj}} - U_j \right)^* y_{kj}^* \right). \end{cases}$$

Данное соотношение может быть переписано в следующем виде:

$$S_k^* = U_k^* \sum_j Y_{kj} U_j, \quad (3)$$

где

$$Y_{kk} = y_k^{\text{sh}} + \sum_{j \in J_1(k)} \left(\frac{y_{kj}^0}{2} + y_{kj} \right) + \sum_{j \in J_2(k)} (y_{kj}^0 + y_{kj}) + \sum_{j \in J_3(k)} \frac{y_{kj}}{|\tau_{kj}|^2},$$

$$Y_{kj} = \begin{cases} -y_{kj} & \text{при } j \in J_1(k), \\ -y_{kj}/\tau_{kj} & \text{при } j \in J_2(k), \\ -y_{kj}/\tau_{kj}^* & \text{при } j \in J_3(k), \\ 0 & \text{при } j \notin J(k), j \neq k. \end{cases}$$

Записывая соотношения (3) для каждого узла, получим систему уравнений балансов мощности в узлах сети. Введем следующие обозначения:

$$Y'_{kj} = \operatorname{Re} Y_{kj}, \quad Y''_{kj} = \operatorname{Im} Y_{kj}, \quad \alpha_{kj} = \arg Y_{kj}.$$

Тогда, разделяя (3) на действительные и мнимые части, получаем:

$$P_k = Y'_{kk} |U_k|^2 + \sum_{j \neq k} (Y'_{kj} (U'_k U'_j + U''_k U''_j) + Y''_{kj} (U''_k U'_j - U'_k U''_j)),$$

$$Q_k = -Y''_{kk} |U_k|^2 + \sum_{j \neq k} (-Y''_{kj} (U'_k U'_j + U''_k U''_j) + Y'_{kj} (U''_k U'_j - U'_k U''_j)),$$

или (после перехода от алгебраической формы записи комплексных чисел к тригонометрической):

$$P_k = |U_k| \sum_j |U_j| |Y_{kj}| \cos(\delta_k - \delta_j - \alpha_{kj}), \quad Q_k = |U_k| \sum_j |U_j| |Y_{kj}| \sin(\delta_k - \delta_j - \alpha_{kj}).$$

Таким образом, если используется прямоугольная система координат, то

$$\tilde{P}_k(\mathbf{x}) = Y'_{kk} |U_k|^2 + \sum_{j \neq k} (Y'_{kj} (U'_k U'_j + U''_k U''_j) + Y''_{kj} (U''_k U'_j - U'_k U''_j)),$$

$$\tilde{Q}_k(\mathbf{x}) = -Y''_{kk} |U_k|^2 + \sum_{j \neq k} (-Y''_{kj} (U'_k U'_j + U''_k U''_j) + Y'_{kj} (U''_k U'_j - U'_k U''_j)),$$

а если используется полярная система координат, то

$$\tilde{P}_k(\mathbf{x}) = |U_k| \sum_j |U_j| |Y_{kj}| \cos(\delta_k - \delta_j - \alpha_{kj}),$$

$$\tilde{Q}_k(\mathbf{x}) = |U_k| \sum_j |U_j| |Y_{kj}| \sin(\delta_k - \delta_j - \alpha_{kj}).$$

Если система (1) (либо (1) и (2), если используется прямоугольная система координат) разрешима относительно \mathbf{x} , то остальные неизвестные параметры режима (активная и реактивная мощности балансирующего узла и реактивные мощности генераторных узлов) определяются по явным формулам:

$$P_0 = \tilde{P}_0(\mathbf{x}), \quad Q_0 = \tilde{Q}_0(\mathbf{x}), \quad Q_k = \tilde{Q}_k(\mathbf{x}), \quad k \in K_1.$$

Для того чтобы режим сети являлся допустимым, значения параметров режима должны удовлетворять заданным ограничениям: в частно-

сти, значения перетоков мощности по ветвям не должны превышать заданных величин, значения модулей напряжений потребительских узлов и значения реактивных мощностей генераторных узлов должны находиться в заданных диапазонах и т.д. Указанные ограничения называются системными. Математически данные ограничения выражаются системой неравенств относительно значений параметров режима.

Таким образом, задача вычисления пределов допустимого изменения мощности узлов сети может быть формализована как следующая задача нелинейной условной оптимизации:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}}) \rightarrow \max_{(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}})}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}}) \leq \mathbf{0}, \end{cases}$$

где вектор переменных \mathbf{x} введен выше, вектор $\tilde{\mathbf{S}}$ состоит из управляющих параметров, регулирующих мощности узлов, целевая функция $f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}})$ соответствует мощности генерации либо потребления в заданном узле (либо в группе узлов), ограничения-равенства $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}}) = \mathbf{0}$ соответствуют уравнениям расчета установившегося режима сети и, возможно, дополнительным условиям, отражающим специфику конкретной моделируемой энергосистемы (например, устанавливающим взаимосвязь между активной и реактивной мощностью некоторого узла, либо устанавливающим взаимосвязь между мощностями различных узлов и т.д.), а ограничения-неравенства $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}}) \leq \mathbf{0}$ формализуют системные ограничения.

Пример. Рассмотрим сеть, состоящую из двух узлов (№ 0 и № 1), соединенных ветвью. Узел № 0 (балансирующий узел) характеризуется значением модуля напряжения $|U_0| = 500$ кВ. В 1-м узле находится потребитель мощности, характеризующийся значениями активной (P_1) и реактивной ($Q_1 = -80$ Мвар) мощности⁵. Проводимость ветви равна $1/(5 + 50i)$ См.

Рассмотрим задачу максимизации активной мощности потребления в 1-м узле в предположении, что системные ограничения отсутствуют:

⁵ Положительные значения P_1 и Q_1 соответствуют генерации мощности, отрицательные значения соответствуют потреблению мощности.

$$\begin{cases} P_1 \rightarrow \min_{(P_1, Q_1, |U_1|, \delta_1)}, \\ P_1 = \frac{5}{2525} (|U_1|^2 - 500|U_1| \cos \delta_1) + \frac{25000}{2525} |U_1| \sin \delta_1, \\ Q_1 = \frac{50}{2525} (|U_1|^2 - 500|U_1| \cos \delta_1) - \frac{2500}{2525} |U_1| \sin \delta_1, \\ Q_1 = -80. \end{cases}$$

Максимальная мощность потребления в 1-м узле приблизительно равна 2188.74 МВт. Если бы в 1-м узле генерировалась активная мощность (при фиксированном значении Q_1) и рассматривалась задача максимизации активной мощности данного узла, то решение указанной задачи приблизительно равнялось бы 2672.74 МВт. На рис. 1 приведен вид зависимости модуля напряжения 1-го узла от активной мощности данного узла.

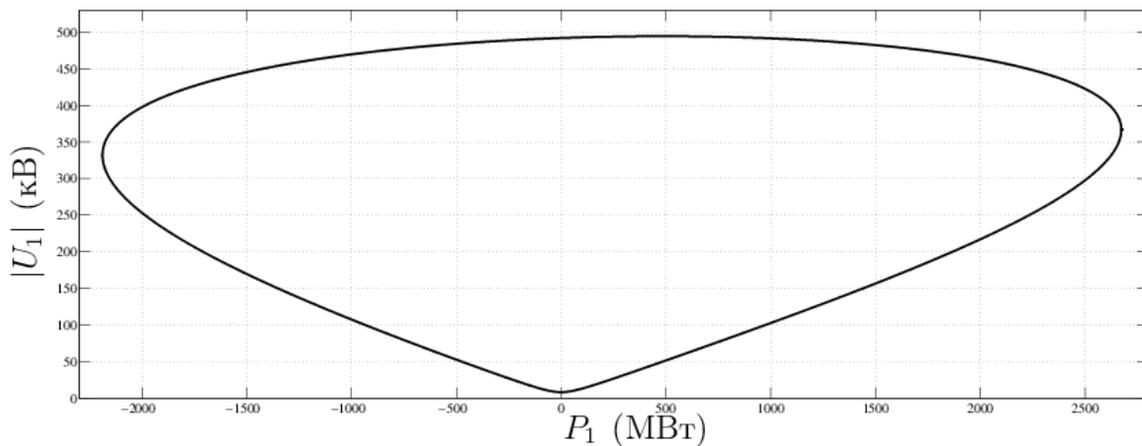


Рис. 1. Зависимость модуля напряжения 1-го узла от активной мощности данного узла

Графическое изображение границы области разрешимости уравнений расчета установившегося режима сети, состоящей из трех узлов, можно найти в [11].

3. Методы решения задачи максимизации узловых мощностей.

3.1. Основные классы рассматриваемых моделей. Подходы, применяемые для вычисления предельных значений мощности узлов, зависят от физических свойств рассматриваемой энергосистемы. Одной из наиболее существенных характеристик, влияющих на выбор используе-

мого метода, является вид зависимости мощности, потребляемой нагрузками, от значений подведенных напряжений. Например [12], активная мощность, потребляемая осветительной нагрузкой, состоящей из люминесцентных ламп, пропорциональна модулю напряжения в степени β , где $\beta \approx 0.08$, для осветительной нагрузки, состоящей из ламп накаливания, $\beta \approx 1.54$, для обогревательного оборудования $\beta \approx 2$, а для электродуговых печей $\beta \approx 2.3$.

Однако при моделировании крупных энергосистем, как правило, учитывают характеристики не каждого отдельного потребителя, а их совокупностей. Данные характеристики могут быть аппроксимированы следующим образом [10]:

$$P = P_{\text{ном}} \left(a_P \left| \frac{U}{U_{\text{ном}}} \right|^2 + b_P \left| \frac{U}{U_{\text{ном}}} \right| + c_P \right),$$

$$Q = Q_{\text{ном}} \left(a_Q \left| \frac{U}{U_{\text{ном}}} \right|^2 + b_Q \left| \frac{U}{U_{\text{ном}}} \right| + c_Q \right),$$

где P , Q – активная и реактивная мощности узла, U – напряжение узла, $U_{\text{ном}}$ – номинальное напряжение узла, $P_{\text{ном}}$, $Q_{\text{ном}}$ – значения активной и реактивной мощности, потребляемой нагрузкой при $U = U_{\text{ном}}$, a_P , b_P , c_P , a_Q , b_Q , c_Q – числовые коэффициенты, такие что $a_P + b_P + c_P = 1$, $a_Q + b_Q + c_Q = 1$. При этом на практике традиционно ограничиваются применением упрощенных моделей. Наиболее широко используются следующие два случая [10]:

$$P, Q \sim \text{const}, \quad (4)$$

т.е. нагрузка задается постоянной мощностью, либо

$$P, Q \sim |U|^2, \quad (5)$$

т.е. нагрузка задается постоянной проводимостью.

В большинстве источников, посвященных задаче определения экстремальных значений мощностей узлов энергосистем, полагается, что либо мощности всех потребительских узлов задаются условием (4), либо мощности всех потребительских узлов задаются условием (5). Обзоры методов максимизации узловых мощностей, применяемых для указанных моделей, приведены в пунктах 3.2 и 3.3 соответственно.

3.2. Задание нагрузок постоянными мощностями.

3.2.1. Постановка задачи. В случае, когда мощности узлов не зависят от напряжений, задача вычисления пределов допустимого изменения узловых мощностей ставится следующим образом. Выбирается группа узлов, мощности которых изменяются в соответствии с заданной траекторией (в одних узлах может увеличиваться генерация, а в других – потребление). Как правило (например, см. работу Ван Катсема и Вурнаса [1]), указанная траектория имеет вид:

$$\begin{cases} P_j = d_j^0 + \lambda d_j^1, j = 1, \dots, n, \\ Q_k = l_k^0 + \lambda l_k^1, k \in K_2, \end{cases} \quad (6)$$

где λ – скалярный параметр, $d_j^0, d_j^1, j = 1, \dots, n, l_k^0, l_k^1, k \in K_2$ – фиксированные числа.

Требуется определить максимальное значение параметра λ , при котором разрешима система, состоящая из уравнений расчета установившегося режима (1) (либо (1) и (2)), уравнений, задающих траекторию изменения узловых мощностей (6), и неравенств, являющихся формализацией системных ограничений. Используя введенные в пункте 2 обозначения (в данном случае управляющим параметром, регулирующим изменение значений мощностей, является λ), запишем указанную задачу в следующей форме:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \rightarrow \max_{(\mathbf{x}, \lambda)}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda) \leq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (7)$$

Далее в данном пункте будем считать, что система уравнений

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (8)$$

представляет собой результат подстановки (6) в уравнения расчета установившегося режима.

Важным подклассом задачи (7), позволяющим получить верхнюю оценку ее значения, является задача максимизации узловых мощностей в отсутствие ограничений-неравенств:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \rightarrow \max_{(\mathbf{x}, \lambda)}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (9)$$

Описания подходов к решению задачи с ограничениями-равенствами (9) и задачи со смешанными ограничениями (7) приведены в подпунктах 3.2.2 и 3.2.3 соответственно.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: \mathbf{g}_x – матрица частных производных функций \mathbf{g} по переменным \mathbf{x} , т.е. $(\mathbf{g}_x)_{kj} = \partial g_k / \partial x_j$, а \mathbf{g}_λ – вектор-столбец частных производных функций \mathbf{g} по переменной λ , т.е. $(\mathbf{g}_\lambda)_k = \partial g_k / \partial \lambda$.

3.2.2. Задача с ограничениями типа равенств. Обозначим решение задачи (9) через $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$.

В случае схем, состоящих из двух узлов, задача (9) может быть решена в явном виде [1,7]. В случае многоузловых схем, в силу нелинейности функций \mathbf{g} относительно переменных \mathbf{x} , поставленную задачу не удастся решить аналитически, и для ее решения придется применять численные методы. Наиболее распространенными подходами к решению задачи (9) являются методы прямого вычисления (см. работы Сауэра, Эванса и др. [13], Ван Катсема [14], Альварато и Юнга [15], Канисареса, Альварато и др. [16,17], Канисареса [18], Чианга и Жана-Жумо [19], Гу, Милано и др. [20]), методы продолжения решения (см. работы Аджарапу и Кристи [21], Канисареса и Альварато [17], Бедриньяны и др. [22], Чианга и др. [23], а также Нино, Кастро и др. [24]), подходы, основанные на использовании метода Ньютона с оптимизацией длины шага (см. работы Зарате, Кастро и др. [25], Ху и Ванга [26], Фуджисавы и Кастро [27], Тавареца и др. [28]), метод модифицированных функций Лагранжа (см. статью Сато [29]) и последовательное квадратичное программирование (см. работы Обадины и Берга [30] а также Лу и др. [31]).

3.2.2.1. Методы прямого вычисления. Так как точка $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ содержится среди стационарных точек задачи (9), то для ее вычисления может быть использована система Лагранжа данной задачи [13,14]:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_x(\mathbf{x}, \lambda)^T \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ \langle \mathbf{g}_\lambda(\mathbf{x}, \lambda), \mathbf{w} \rangle = 1, \end{cases} \quad (10)$$

где через \mathbf{w} обозначен вектор множителей Лагранжа, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение.

Похожая система уравнений может быть получена из следующих соображений: так как точка $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ является точкой седло-узловой бифуркации⁶ [1,18,32,33], то для ее вычисления может быть использована

⁶ В данной точке происходит слияние и исчезновение двух решений системы (8) относительно \mathbf{x} .

система уравнений, соответствующая необходимым условиям точки бифуркации указанного типа [15–20]:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_x(\mathbf{x}, \lambda)^T \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\rho}\| = 1, \end{cases} \quad (11)$$

где через $\boldsymbol{\rho}$ обозначен собственный вектор матрицы $\mathbf{g}_x(\mathbf{x}, \lambda)^T$, отвечающий нулевому собственному значению.

В литературе, посвященной задаче максимизации узловых мощностей, методы поиска точки $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ путем решения системы уравнений (10) либо (11) называют методами прямого вычисления.

Замечание. Системы (10) и (11) практически одинаковы (см. [1] и обзор Канисареса [34]). При этом, в некоторых случаях, в расчетах целесообразнее использовать систему (10) – например [1], при решении системы (10) методом Ньютона матрица формируемой линейной системы является симметрической⁷, в то время как система (11) не обладает указанным свойством.

Так как для решения системы (10) относительно переменных $(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{w})$ (соответственно, системы (11) относительно переменных $(\mathbf{x}, \lambda, \boldsymbol{\rho})$) нужно применять численные методы⁸, то возникает задача выбора начального приближения, которое обеспечило бы сходимость используемого метода к точке $(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mathbf{w}^*)$, где \mathbf{w}^* – вектор Лагранжа, отвечающий точке $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ (соответственно, к точке $(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \boldsymbol{\rho}^*)$, где $\boldsymbol{\rho}^*$ – нормированный собственный вектор матрицы $\mathbf{g}_x(\mathbf{x}^*, \lambda^*)^T$, отвечающий нулевому собственному значению).

Один из подходов к выбору начального приближения для $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ (обозначим данное приближение через $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda})$) состоит в следующем [17]: $\hat{\lambda}$ полагается равным нулю, а в качестве $\hat{\mathbf{x}}$ используется решение уравнений расчета установившегося режима сети при $\lambda = \hat{\lambda} = 0$. Недостатком такого подхода является то, что при достаточно больших значениях λ^* численный метод, применяемый для решения системы уравнений (10) (либо (11)), может разойтись либо сойтись к точке, не являющейся решением.

⁷ Данная матрица представляет собой гессиан функции Лагранжа задачи (9).

⁸ Как правило, применяется метод Ньютона.

Более точные приближения для $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ могут быть построены с помощью методов, предложенных в статьях [17,21–24,35,36]. Метод аппроксимации решения задачи (9), разработанный Зенгом и др. [35], основывается на использовании ряда полученных авторами соотношений между значениями узловых напряжений и мощностей, справедливых в окрестности точки $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$. Другой подход к приближенному вычислению точки $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ заключается в проведении нескольких итераций методов продолжения решения (представляющих собой отдельный класс методов решения задачи (9)), подробно рассматриваемых в следующем подпункте.

Для построения начального приближения для \mathbf{w}^* и \mathbf{p}^* были предложены следующие подходы: в статье Сауэра и др. [13] в качестве указанного приближения использовался вектор, состоящий из -1 , в работе Ван Катсема (см. статью [14] и ее обсуждение там же) использовался вектор, состоящий из -2 , в работах Канисареса, Альварадо и др. (см. статьи [16,17] и обсуждение статьи [14]) в качестве указанного приближения использовался собственный вектор матрицы $\mathbf{g}_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda})^T$, вычисляемый с помощью обратного степенного метода [37].

Рассмотренные подходы к выбору начального приближения основываются на эмпирических соображениях. Влияние выбора начального приближения на сходимость метода, применяемого для решения системы (10) (либо (11)), требует дальнейшего изучения.

3.2.2.2. Методы продолжения решения. Основная идея методов продолжения решения [33] состоит в последовательном построении набора точек кривой (8)

$$(\mathbf{x}^j, \lambda^j), j = 0, 1, 2, \dots,$$

соответствующих изменяющимся значениям величины, используемой для параметризации данной кривой (параметра продолжения). Построение указанного набора точек осуществляется по следующей схеме. В качестве точки $(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$ можно использовать решение уравнений (8), соответствующее некоторому заведомо существующему режиму сети. Предположим, что построены решения

$$(\mathbf{x}^0, \lambda^0), \dots, (\mathbf{x}^j, \lambda^j).$$

Вычисление точки $(\mathbf{x}^{j+1}, \lambda^{j+1})$ осуществляется в три этапа. На первом этапе выбирается способ параметризации⁹ кривой (8): например, в [17,21,22]

⁹ Данный способ может как изменяться от шага к шагу, так и оставаться неизменным.

в качестве параметра используется одна из компонент вектора (\mathbf{x}, λ) , выбираемая на каждом шаге в соответствии с заданными правилами, в статье [23] параметром является длина дуги кривой (8), а в работе [24] параметром являются потери активной мощности на одной из ветвей сети, выбираемой на каждом шаге в соответствии с заданным критерием.

На втором этапе строится точка $(\bar{\mathbf{x}}^{j+1}, \bar{\lambda}^{j+1})$, являющаяся приближением для $(\mathbf{x}^{j+1}, \lambda^{j+1})$. В качестве указанного приближения может быть выбрана точка на касательной к кривой (8), проходящей через точку $(\mathbf{x}^j, \lambda^j)$, т.е. [17,21–24]:

$$(\bar{\mathbf{x}}^{j+1}, \bar{\lambda}^{j+1}) = (\mathbf{x}^j, \lambda^j) + \sigma \mathbf{t},$$

где $\sigma > 0$ – управляющий параметр, регулирующий длину шага, а \mathbf{t} – касательный вектор к кривой (8). Если $j > 1$, то в качестве приближения для точки $(\mathbf{x}^{j+1}, \lambda^{j+1})$ может быть выбрана точка на секущей, проходящей через точки $(\mathbf{x}^{j-1}, \lambda^{j-1})$ и $(\mathbf{x}^j, \lambda^j)$, т.е. [23]:

$$(\bar{\mathbf{x}}^{j+1}, \bar{\lambda}^{j+1}) = (\mathbf{x}^j, \lambda^j) + \sigma (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^{j-1}, \lambda^j - \lambda^{j-1}).$$

На третьем этапе вычисляется точка $(\mathbf{x}^{j+1}, \lambda^{j+1})$, принадлежащая кривой (8). Например, в [21–24] для построения указанной точки численно решается система уравнений, состоящая из (8) и соотношения, задающего значение параметра продолжения, выбранного на первом этапе, а в [17] точка $(\mathbf{x}^{j+1}, \lambda^{j+1})$ определяется как точка пересечения кривой (8) и гиперплоскости, перпендикулярной к касательному вектору \mathbf{t} (похожая идея используется в работе Ибы и др. [36]). В качестве начального приближения (для применяемого численного метода) используется точка, вычисленная на втором этапе.

Формирование последовательности точек кривой (8) продолжается, пока не будет достигнута достаточно малая окрестность точки $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$. Например, может быть использовано следующее соображение [21]. В точке, соответствующей решению задачи (9), компонента касательного вектора, соответствующая параметру λ , равна нулю. Таким образом, если на j -м шаге значение данной компоненты меняет знак, то это означает, что точка $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ принадлежит дуге кривой (8), заключенной между точками $(\mathbf{x}^{j-1}, \lambda^{j-1})$ и $(\mathbf{x}^j, \lambda^j)$. Для вычисления $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ с большей точностью можно либо вернуться на $(j-1)$ -й шаг и повторить вычисления для мо-

дифицированного значения σ , либо воспользоваться методами прямого вычисления.

Замечание. Размерности систем, решаемых на каждой итерации рассмотренных методов продолжения ($n + |K_2| + 1$, если используется запись в полярной системе координат, либо $2n + 1$, если используется запись в прямоугольной системе координат), примерно в два раза меньше размерности систем методов прямого вычисления ($2(n + |K_2|) + 1$, если используется запись в полярной системе координат, либо $4n + 1$, если используется запись в прямоугольной системе координат). Но при использовании методов продолжения решения возникает задача выбора значения управляющего параметра, регулирующего длину шага: для слишком больших значений σ численный метод, применяемый для решения уравнений на третьем этапе, может разойтись, а при слишком маленьких значениях σ для вычисления точки $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ с высокой точностью потребуется значительное количество итераций. В настоящее время вопрос выбора значения указанного управляющего параметра, обеспечивающего наиболее быструю сходимость к решению задачи (9), остается открытым. Ряд подходов к выбору значения σ , основанных на эмпирических соображениях, можно найти в [17,22,23].

3.2.2.3. Подходы, основанные на использовании метода Ньютона с оптимизацией длины шага. При решении системы уравнений (8) при фиксированном значении λ , достаточно близком к λ^* , методом Ньютона без регулировки длины шага итерационный процесс может расходиться, так как в окрестности точки \mathbf{x}^* матрица \mathbf{g}_x является плохо обусловленной, а в точке \mathbf{x}^* данная матрица является вырожденной [1]. Использование метода Ньютона с оптимизацией длины шага [38–40] позволяет избежать указанных проблем. Данный метод состоит в следующем. Приближение для решения системы (8) при фиксированном значении λ строится по правилу:

$$\mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{x}^j - \theta_j \left(\mathbf{g}_x(\mathbf{x}^j, \lambda) \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^j, \lambda),$$

$$\theta_j \in \underset{\theta}{\operatorname{Argmin}} \left(\left\| \mathbf{G}(\mathbf{x}^{j+1}, \lambda) \right\|^2 \right),$$

где $\mathbf{G}(\cdot, \lambda)$ – вектор, состоящий из многочленов Тейлора второго порядка (с центрами в точке \mathbf{x}^j) для функций $\mathbf{g}(\cdot, \lambda)$. Если для выбранного значения λ у системы (8) существует действительное решение, то построенный метод сходится к данному решению. Если у рассматриваемой системы нет действительных решений, то метод сходится к неко-

торой точке $\tilde{\mathbf{x}}$, такой что при $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ матрица \mathbf{g}_x является вырожденной [39] (при этом значения θ_j стремятся к нулю). Указанные свойства рассмотренного метода были использованы рядом авторов [25–28] для решения задачи (9).

В [25,26] предложен следующий подход для вычисления точки $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$. В соответствии с заданными правилами строятся возрастающая последовательность значений параметра λ и соответствующая последовательность решений системы (8) относительно \mathbf{x} , вычисляемых с помощью метода Ньютона с оптимизацией длины шага (начальный элемент данной последовательности соответствует некоторому установившемуся режиму сети). Если для очередного значения λ система (8) является неразрешимой в действительных числах (в этом случае метод Ньютона с оптимизацией длины шага сойдется к точке, в которой матрица \mathbf{g}_x является вырожденной¹⁰), то вычисленное значение параметра λ корректируется таким образом, чтобы уменьшить невязку системы уравнений (8). Вычисления продолжают аналогичным образом, пока не будет выполнен заданный критерий останова.

На первом этапе методов, предложенных в статьях [27,28], в соответствии с заданными правилами строится убывающая последовательность значений параметра λ (начальный элемент данной последовательности соответствует значению мощностей, при которых заведомо не существует режима сети). Если для очередного элемента указанной последовательности (обозначим номер данного шага через j) система (8) является разрешимой в действительных числах, то применяются следующие подходы. В работе [27] λ^* определяется с помощью метода деления отрезка $[\lambda^j, \lambda^{j-1}]$ пополам и метода Ньютона с оптимизацией длины шага. В [28] значение λ увеличивается таким образом, чтобы система уравнений (8) стала неразрешимой в действительных числах, после чего продолжается построение убывающей последовательности значений λ , стремящейся к λ^* справа (данный подход позволяет избежать процедуры деления отрезка пополам).

3.2.2.4. Метод модифицированных функций Лагранжа. Модифицированной функцией Лагранжа задачи (9) называется сумма функции Лагранжа указанной задачи и штрафного квадратичного слагаемого:

$$L_v(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{w}) = L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{w}) + \frac{V}{2} \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda)\|^2,$$

¹⁰ Индикатором данной ситуации является стремление параметра, регулирующего длину шага, к нулю.

где \mathbf{w} – вектор множителей Лагранжа, $L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{x}, \lambda) + \langle \mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda), \mathbf{w} \rangle$ – функция Лагранжа задачи (9), ν – положительная величина (параметр штрафа). При естественных предположениях и при достаточно больших значениях ν минимум функции $L_\nu(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{w}^*)$ (\mathbf{w}^* – вектор Лагранжа, отвечающий точке $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$) по переменным (\mathbf{x}, λ) достигается только на решениях задачи (9) [41].

Метод модифицированных функций Лагранжа [42–44] заключается в построении решения задачи (9) путем решения последовательности задач безусловной минимизации¹¹:

$$L_{\nu_k}(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{w}^k) \rightarrow \min_{(\mathbf{x}, \lambda)}, \quad (\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $\{\nu_k\}$ – монотонно неубывающая последовательность положительных значений параметра штрафа, $\{\mathbf{w}^k\}$ – последовательность приближений для \mathbf{w}^* , вычисляемых на каждом шаге в соответствии с заданным правилом, \tilde{n} – размерность вектора \mathbf{x} . Указанный процесс продолжается, пока не будет выполнен заданный критерий останова.

3.2.2.5. Последовательное квадратичное программирование. Основная идея метода последовательного квадратичного программирования [42,46] состоит в следующем. Предположим, что известно k -е приближение к решению задачи (9) и соответствующему вектору Лагранжа: $(\mathbf{x}^k, \lambda^k, \mathbf{w}^k)$. Итерация рассматриваемого метода заключается в вычислении стационарной точки задачи квадратичного программирования, аппроксимирующей задачу (9) в окрестности точки $(\mathbf{x}^k, \lambda^k)$, и соответствующего ей вектора Лагранжа (обозначим указанную стационарную точку через $(\mathbf{x}_{\text{SQP}}^k, \lambda_{\text{SQP}}^k)$, а соответствующий ей вектор Лагранжа – через $\mathbf{w}_{\text{SQP}}^k$):

$$\begin{cases} -f(\mathbf{x}^k, \lambda^k) + \langle -f'(\mathbf{x}^k, \lambda^k), (\mathbf{x}, \lambda) - (\mathbf{x}^k, \lambda^k) \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle H_k((\mathbf{x}, \lambda) - (\mathbf{x}^k, \lambda^k)), (\mathbf{x}, \lambda) - (\mathbf{x}^k, \lambda^k) \rangle \rightarrow \min_{(\mathbf{x}, \lambda)}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^k, \lambda^k) + \mathbf{g}'(\mathbf{x}^k, \lambda^k)((\mathbf{x}, \lambda) - (\mathbf{x}^k, \lambda^k)) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (13)$$

где

¹¹ Например, в [29] для решения задач безусловной минимизации использован метод сопряженных направлений Пауэлла [45].

$$H_k = \frac{\partial^2 L}{\partial (\mathbf{x}, \lambda)^2} (\mathbf{x}^k, \lambda^k, \mathbf{w}^k),$$

$L(\cdot, \cdot, \cdot)$ – функция Лагранжа задачи (9).

Далее, полагая $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}_{\text{SQP}}^k$, $\lambda^{k+1} = \lambda_{\text{SQP}}^k$, $\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}_{\text{SQP}}^k$, получаем следующее приближение для $(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mathbf{w}^*)$. Процесс продолжается аналогичным образом, пока не будет выполнен заданный критерий останова.

Как показано в [42], применение метода последовательного квадратичного программирования для решения задачи с ограничениями-равенствами (9) эквивалентно применению метода Ньютона для решения системы Лагранжа данной задачи (см. подпункт 3.2.2.1), так как генерируемые данными методами последовательности совпадают. Таким образом, основное значение метода последовательного квадратичного программирования состоит в том, что аналогичная идея может быть использована для решения задачи со смешанными ограничениями (7) (см. далее подпункт 3.2.3).

3.2.3. Задача со смешанными ограничениями. Идеи, лежащие в основе метода модифицированных функций Лагранжа и метода последовательного квадратичного программирования для задач с ограничениями-равенствами, могут быть обобщены на случай задач со смешанными ограничениями [29–31].

Метод модифицированных функций Лагранжа для задачи (7) основывается [42] на преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства путем введения дополнительных переменных (обозначим их через φ_j , $j = 1, \dots, m$, где m – размерность вектора $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda)$):

$$h_j(\mathbf{x}, \lambda) \leq 0 \quad \rightarrow \quad h_j(\mathbf{x}, \lambda) + \varphi_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Далее решается последовательность задач безусловной минимизации (по переменным \mathbf{x} , λ , $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$), аналогичная (12)¹².

Метод последовательного квадратичного программирования для задачи (7) состоит [42] в последовательном решении задач квадратичного программирования, аппроксимирующих задачу (7): в окрестности текущего приближения целевая функция аппроксимируется квадратичной функцией, а ограничения-равенства и ограничения-неравенства линеаризуются (аналогично (13)).

¹² При этом минимизация по переменным $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ (при фиксированных значениях \mathbf{x} , λ и множителей Лагранжа) может быть выполнена явно.

Еще одним распространенным подходом к решению задачи (7) являются использование прямодвойственных методов внутренней точки и их модификаций (см. работы Паркера и др. [47], Ирисарри, Ванга и др. [48], Дая, МакКэлли и др. [49] а также Барбозы и Хектеуэра [50]). Основная идея данных методов состоит в следующем [51–53]. Запишем задачу (7) в форме

$$\begin{cases} \lambda \rightarrow \max_{(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{v})}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda) + \mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ v_j \geq 0, j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (14)$$

где $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ – вектор дополнительных неотрицательных переменных. Введем обозначения:

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} \mid v_j \geq 0, j = 1, \dots, m \},$$

$$\mathbf{V}^0 = \{ \mathbf{v} \mid v_j > 0, j = 1, \dots, m \}.$$

Задаче (14) ставится в соответствие задача с ограничениями-равенствами:

$$\begin{cases} \lambda + \mu \xi(\mathbf{v}) \rightarrow \max_{(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{v})}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda) + \mathbf{v} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (15)$$

где μ – положительная величина (барьерный параметр), $\xi(\cdot)$ – непрерывная на множестве \mathbf{V}^0 функция, бесконечно убывающая при приближении к $\mathbf{V} \setminus \mathbf{V}^0$ [42] (данная функция называется барьером). Например, в работе [47] используется обратный барьер:

$$\xi(\mathbf{v}) = -\sum_{j=1}^m \frac{1}{v_j},$$

а в работах [48–50] используется логарифмический барьер:

$$\xi(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^m \ln v_j.$$

Построение решения задачи (14) осуществляется путем последовательного вычисления приближений для стационарных точек задачи (15) при изменяющихся значениях барьерного параметра μ (стремящихся к нулю). Система Лагранжа задачи (15) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu \frac{\partial}{\partial v_j} \xi(\mathbf{v}) + w_j^h = 0, j = 1, \dots, m, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{w}^g + \mathbf{h}_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{w}^h = \mathbf{0}, \\ \langle \mathbf{g}_\lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{w}^g \rangle + \langle \mathbf{h}_\lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{w}^h \rangle = 1, \end{array} \right. \quad (16)$$

где через \mathbf{w}^g обозначены множители Лагранжа к (8), а через $\mathbf{w}^h = (w_1^h, \dots, w_m^h)$ обозначены множители Лагранжа к ограничениям $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Выбираются начальное значение барьерного параметра $\mu = \mu^0$ и начальное приближение $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \mathbf{v}^0, (\mathbf{w}^g)^0, (\mathbf{w}^h)^0)$, такое что $v_j^0 > 0$, $j = 1, \dots, m$. Для системы (16) проводится итерация метода Ньютона с регулировкой длины шага, и вычисленная точка $(\mathbf{x}^1, \boldsymbol{\lambda}^1, \mathbf{v}^1, (\mathbf{w}^g)^1, (\mathbf{w}^h)^1)$ становится следующим приближением. Далее в соответствии с заданным правилом определяется новое значение барьерного параметра $\mu = \mu^1$. Указанный процесс продолжается, пока не будет выполнен заданный критерий останова.

Замечание. Методы, рассмотренные в разделе 3.2.3, могут быть применены для решения задачи максимизации узловых мощностей и в том случае, когда используются модели нагрузки, отличные от (4), в частности, когда мощности потребления в узлах пропорциональны произвольно заданным степеням модулей напряжений соответствующих узлов [30,47]. Однако, в отдельных случаях (см. далее пункт 3.3) учет особенностей моделируемой системы позволяет решить задачу в явном виде.

3.3. Задание нагрузок постоянными проводимостями. В случае, когда нагрузки задаются постоянными проводимостями, задачи максимизации узловых мощностей, как правило, ставятся следующим образом (соответствующие обозначения введены в пункте 2):

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}}) \rightarrow \max_{(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}})}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{S}}) = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (17)$$

где целевая функция соответствует мощности одного узла либо суммарной мощности группы узлов, а вектор \tilde{S} состоит из проводимостей нагрузок в узлах, и, возможно, дополнительных параметров, связывающих значения проводимостей нагрузок отдельных узлов.

Особенностью рассматриваемого случая, является то, что система узловых балансов мощностей линейна относительно узловых напряжений [9,54], что позволяет сводить задачи с ограничениями (17) к задачам безусловной оптимизации и получать для некоторых задач данного класса аналитические решения. Например, в статье Богданова и Давидсона [9] была аналитически решена задача вычисления предельных значений активной мощности произвольно заданного узла сети переменного тока при условии, что нагрузки во всех узлах (за исключением балансирующего) задаются постоянными проводимостями, значения которых зафиксированы для всех узлов, за исключением исследуемого. Было показано, что при необременительных условиях на значения параметров сети (проводимостей ветвей, коэффициентов трансформации и т.д.) активная мощность исследуемого узла, как функция от значения проводимости нагрузки в данном узле, непрерывна на всей числовой прямой и имеет два экстремума (максимум и минимум), определяемые в явном виде.

Замечание. Экстремумы мощности исследуемого узла равны найденным значениям и в том случае, когда мощность исследуемого узла не зависит от напряжения.

Тем не менее, результаты, полученные в [9], не удается обобщить на случай задачи максимизации генерируемых/потребляемых мощностей узлов при изменении проводимостей нагрузок в группе узлов сети (состоящей из двух или более узлов) в соответствии с линейной траекторией, параметризованной с помощью скалярного параметра. У мощностей узлов, входящих в рассматриваемую группу, и суммарной мощности указанных узлов, как функций от значения введенного параметра, в общем случае может существовать более одного максимума/минимума (см. Приложение). При этом для нахождения стационарных точек данных функций необходимо определить корни многочленов степени выше трех, что требует применения численных методов.

Численное решение задачи вычисления предельных значений мощностей узлов при изменении проводимостей нагрузок в нескольких узлах в соответствии с заданной траекторией, параметризованной с помощью скалярного параметра, приведено в статье Семлена, Гао и др. [54], где для решения поставленной задачи (сведенной к задаче безусловной оптимизации) используется метод секущих.

Для решения задачи определения максимума суммарной активной мощности, передаваемой в группу узлов сети в отсутствие каких-либо до-

полнительных условий, связывающих мощности отдельных узлов, могут быть применены результаты, полученные для изучаемой в теории электрических цепей задачи максимизации активной мощности, передаваемой при соединении активного и пассивного многополюсников [55–62].

Многополюсником называется электрическая схема, имеющая несколько выделенных точек (полюсов) для соединения с другими схемами. Если в многополюснике содержатся источники ЭДС, то данный многополюсник называется активным, иначе – пассивным. В работах [55–59] был получен ряд результатов (позднее развитых и обобщенных в статьях Дезоера [60] и Видьясагара [61]), касающихся условий, при которых достигается максимум передаваемой активной мощности, и явного вида данного максимума. Однако полученные в указанных работах условия являются недостижимыми на практике, как показал Кальваер в статье [62]. В указанной работе Кальваер также привел аналитическое решение задачи максимизации передаваемой активной мощности для определенных классов многополюсников, для которых условия, обеспечивающие максимум передаваемой мощности, не соответствуют вырожденной (с физической точки зрения) ситуации. Было показано, что если матрица сопротивлений активного многополюсника¹³ (обозначим данную матрицу через \mathbf{r}^1 , а ее элементы обозначим через r_{kj}^1) имеет вид $\mathbf{r}^1 = i\tilde{\mathbf{r}}$, где $\tilde{\mathbf{r}}$ – заданная вещественнозначная симметрическая положительно определенная матрица, а матрица сопротивлений пассивного многополюсника (обозначим данную матрицу через \mathbf{r}^2 , а ее элементы обозначим через r_{kj}^2) является вещественнозначной, то максимум активной мощности, передаваемой при соединении рассматриваемых схем, достигается при $\mathbf{r}^2 = \tilde{\mathbf{r}}$. Также было показано, что в случае, когда

$$\forall k, j \quad r_{kj}^1 = |r_{kj}^1| e^{i\psi}, \quad r_{kj}^2 = |r_{kj}^2| e^{i\zeta},$$

где $r_{kj}^1, \forall k, j, \psi, \zeta$ – заданные числа, максимум активной мощности, передаваемой при соединении рассматриваемых схем, достигается при следующих значениях модулей элементов матрицы \mathbf{r}^2 : $|r_{kj}^2| = |r_{kj}^1|$. Максимумы передаваемой мощности для указанных случаев были определены в явном виде.

Применение результатов, полученных в [55–62], сопряжено с дополнительными трудностями, так как приведенные выражения для мак-

¹³ В работах [55–62] многополюсники заданы эквивалентными схемами Тевенина [63]. Активный многополюсник характеризуется значениями напряжений холостого хода и значениями элементов матрицы сопротивлений, пассивный многополюсник характеризуется значениями элементов матрицы сопротивлений.

симула передаваемой мощности содержат значения параметров эквивалентных схем Тевенина [63] для многополюсников, в то время как при моделировании реальных электроэнергетических систем задаются значения сопротивлений (либо проводимостей) отдельных ветвей и напряжений отдельных источников, и построение эквивалентной схемы Тевенина представляет собой отдельную задачу (один из подходов к приближенному вычислению параметров эквивалентных схем представлен в [64]).

4. Заключение. В настоящей статье описаны основные математические методы, применяемые для решения задачи вычисления экстремальных значений мощностей узлов энергосистем переменного тока для двух моделей нагрузок, наиболее часто используемых на практике – нагрузок, задаваемых постоянными мощностями, и нагрузок, задаваемых постоянными проводимостями. Приведен обзор численных методов, применяемых для решения указанной задачи в общих постановках, и рассмотрены частные случаи, для которых удастся получить аналитические решения. Описаны основные вопросы разработки данных подходов, требующие дальнейших исследований.

Литература

1. Van Cutsem T., Vournas C. Voltage stability of electric power systems. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.
2. Grigsby L.L. Power system stability and control. Boca Raton: CRC Press, 2007.
3. Dommel H.W., Tinney W.F. Optimal power flow solutions // IEEE Trans. Power Apparatus and Systems. 1968. Vol. 87. N 10. P. 1866–1876.
4. Hogan W.W. Financial transmission right formulations. Working paper, Center for Business and Government, John F. Kennedy School of Government, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 2002.
5. Давидсон М.Р., Догадушкина Ю.В., Крейнес Е.М. и др. Математическая модель управления энергосистемой в условиях конкурентного оптового рынка электроэнергии и мощности в России // Изв. РАН, ТИСУ. 2009. № 2. С. 84–94.
6. Стофт С. Экономика энергосистем. Введение в проектирование рынков электроэнергии. М.: Мир, 2006.
7. Горнштейн В.М., Мирошниченко Б.П., Пономарёв А.В. и др. Методы оптимизации режимов энергосистем. М.: Энергия, 1981.
8. Идельчик В.И. Электрические системы и сети. М.: Энергоатомиздат, 1989.

9. Богданов И.П., Давидсон М.Р. Определение границ допустимого изменения активной мощности в узле сети переменного тока // Вестник Московского университета. Серия 15, Вычислительная математика и кибернетика. 2011. № 2 (сдана в печать).
10. Веников В.А., Глазунов А.А., Жуков Л.А. и др. Электрические системы. Электрические сети. М.: Высшая школа, 1998.
11. Hiskens I.A., Davy R.J. Exploring the power flow solution space boundary // IEEE Trans. Power Systems. 2001. Vol. 16. N 3. P. 389–395.
12. Grigsby L.L. The electric power engineering handbook. Boca Raton: CRC Press LLC, 2001.
13. Sauer P.W., Evans R.J., Pai M.A. Maximum unconstrained loadability of power systems // Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1990. Vol. 3. P. 1818–1821.
14. Van Cutsem T. A method to compute reactive power margins with respect to voltage collapse // IEEE Trans. Power Systems. 1991. Vol. 6. N 1. P. 145–156.
15. Alvarado F.L., Jung T.H. Direct detection of voltage collapse conditions // Proc. Bulk Power System Voltage Phenomena – Voltage Stability and Security, EL-6183, EPRI, January 1989. P. 5.23–5.38.
16. Cañizares C.A., Alvarado F.L., DeMarco C.L. et al. Point of collapse methods applied to AC/DC power systems // IEEE Trans. Power Systems. 1992. Vol. 7. N 2. P. 673–683.
17. Cañizares C.A., Alvarado F.L. Point of collapse and continuation methods for large AC/DC systems // IEEE Trans. Power Systems. 1993. Vol. 8. N 1. P. 1–8.
18. Cañizares C.A. Conditions for saddle-node bifurcations in AC/DC power systems // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. 1995. Vol. 17. N 1. P. 61–68.
19. Chiang H.D., Jean-Jumeau R. A more efficient formulation for computation of the maximum loading points in electric power systems // IEEE Trans. Power Systems. 1995. Vol. 10. N 2. P. 635–646.
20. Gu W., Milano F., Jiang P. et al. Improving large-disturbance stability through optimal bifurcation control and time domain simulations // Electric Power Systems Research. 2008. Vol. 78. N 3. P. 337–345.
21. Ajarapu V., Christy C. The continuation power flow: a tool for steady state voltage stability analysis // IEEE Trans. Power Systems. 1992. Vol. 7. N 1. P. 416–423.
22. Bedriñana M., Bedoya D., Castro C.A. Hybrid Method for Calculating the Maximum Loading Point using Continuation Load Flow and Nonlinear Programming Techniques // Proc. IEEE Power Tech Conference, Lausanne, Switzerland, 2007. P. 1929–1934.

23. Chiang H.D., Flueck A.J., Shah K.S. et al. CPFLOW: A practical tool for tracing power system steady-state stationary behavior due to load and generation variations // *IEEE Trans. Power Systems*. 1995. Vol. 10. N 2. P. 623–634.
24. Nino E.E., Castro C.A., da Silva L.C.P. et al. Continuation load flow using automatically determined branch megawatt losses as parameters // *IEE Proc. Generation, Transmission and Distribution*. 2006. Vol. 153. N 3. P. 300–308.
25. Zarate L.A.L., Castro C.A., Ramos J.L.M. et al. Fast computation of voltage stability security margins using nonlinear programming techniques // *IEEE Trans. Power Systems*. 2006. Vol. 21. N 1. P. 19–27.
26. Hu Z., Wang X. Efficient computation of maximum loading point by load flow method with optimal multiplier // *IEEE Trans. Power Systems*. 2008. Vol. 23. N 2. P. 804–806.
27. Fujisawa C.H., Castro C.A. Simple method for computing power systems maximum loading conditions // *Proc. IEEE Power Tech Conference, Bucharest, Romania, 2009*.
28. Tavares B.L., Bedriñana M., Castro C.A. New method based on load flow with step size optimization for calculating the maximum loading point // *Proc. IEEE Power Tech Conference, Bucharest, Romania, 2009*.
29. Sato H. Computation of power system loadability limits // *IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exhibition 2002: Asia Pacific*. Vol. 3. P. 1707–1711.
30. Obadina O.O., Berg G.J. Determination of voltage stability limit in multimachine power systems // *IEEE Trans. Power Systems*. 1988. Vol. 3. N 4. P. 1545–1554.
31. Lu J., Liu C.W., Thorp J.S. New methods for computing a saddle-node bifurcation point for voltage stability analysis // *IEEE Trans. Power Systems*. 1995. Vol. 10. N 2. P. 978–989.
32. Магницкий Н.А. Современные методы анализа нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 2004.
33. Seydel R. From equilibrium to chaos: practical bifurcation and stability analysis. New York: Elsevier, 1988.
34. Cañizares C.A. Applications of optimization to voltage collapse analysis // *IEEE/PES Summer Meeting, San Diego, USA, July 14, 1998*.
35. Zeng Z.C., Galiana F.D., Ooi B.T. et al. A simplified approach to estimate maximum loading conditions in the load flow problem // *IEEE Trans. Power Systems*. 1993. Vol. 8. N 2. P. 646–654.

36. Iba K., Suzuki H., Egawa M. et al. Calculation of critical loading condition with nose curve using homotopy continuation method // IEEE Trans. Power Systems. 1991. Vol. 6. N 2. P. 584–593.
37. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980.
38. Iwamoto S., Tamura Y. A load flow calculation method for ill-conditioned power systems // IEEE Trans. Power Apparatus and Systems. 1981. Vol. 100. N 4. P. 1736–1743.
39. Overbye T.J. A power flow measure for unsolvable cases // IEEE Trans. Power Systems. 1994. Vol. 9. N 3. P. 1359–1365.
40. Braz L.M.C., Castro C.A., Murari C.A.F. A critical evaluation of step size optimization based load flow methods // IEEE Trans. Power Systems. 2000. Vol. 15. N 1. P. 202–207.
41. Поляк Б.Т. Методы минимизации при наличии ограничений // Итоги науки и техники. Серия Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 147–197.
42. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
43. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.
44. Bertsekas D.P. Nonlinear programming. Belmont: Athena Scientific, 1999.
45. Аоки М. Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977.
46. Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. New York: Springer-Verlag, 1999.
47. Parker C.J., Morrison I.F., Sutanto D. Application of an optimisation method for determining the reactive margin from voltage collapse in reactive power planning // IEEE Trans. Power Systems. 1996. Vol. 11. N 3. P. 1473–1481.
48. Irisarri G.D., Wang X., Tong J. et al. Maximum loadability of power systems using interior point non-linear optimization method // IEEE Trans. Power Systems. 1997. Vol. 12. N 1. P. 162–172.
49. Dai Y., McCalley J.D., Vittal V. Simplification, expansion and enhancement of direct interior point algorithm for power system maximum loadability // IEEE Trans. Power Systems. 2000. Vol. 15. N 3. P. 1014–1021.
50. Barboza L.V., Hecktheuer L.A. Identifying critical limits for the maximum loadability of electric power systems // Proc. Large Engineering Systems Conference on Power Engineering, 2007. P. 148–153.
51. Wu Y.C., Debs A.S., Marsten R.E. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows // Proc. Power Industry Computer Application Conference, 1993. P. 138–145.

52. Granville S. Optimal reactive dispatch through interior point methods // IEEE Trans. Power Systems. 1994. Vol. 9. N 1. P. 136–146.
53. Granville S., Mello J.C.O., Melo A.C.G. Application of interior point methods to power flow unsolvability // IEEE Trans. Power Systems. 1996. Vol. 11. N 2. P. 1096–1103.
54. Semlyen A., Gao B., Janischewskyj W. Calculation of the extreme loading condition of a power system for the assessment of voltage stability // IEEE Trans. Power Systems. 1991. Vol. 6. N 1. P. 307–315.
55. Nambiar K.K. A generalization of the maximum power transfer theorem // Proc. IEEE (Lett.). 1969. Vol. 57. N 7. P. 1339–1340.
56. Baudrand H. On the generalizations of the maximum power transfer theorem // Proc. IEEE (Lett.). 1970. Vol. 58. N 10. P. 1780–1781.
57. Lin P.M. Determination of available power from resistive multiports // IEEE Trans. Circuit Theory (Corresp.). 1972. Vol. 19. N 4. P. 385–386.
58. Spiney F. On generalizations of the maximum power transfer problem // Proc. IEEE (Lett.). 1972. Vol. 60. N 7. P. 903–904.
59. Mathis B.A., Mathis H.F. Maximum power transfer from a multiple-terminal network to a single impedance // Proc. IEEE (Lett.). 1972. Vol. 60. N 6. P. 746.
60. Desoer C.A. The maximum power transfer theorem for n-ports // IEEE Trans. Circuit Theory. 1973. Vol. 20. N 3. P. 328–330.
61. Vidyasagar M. Maximum power transfer in n ports with passive loads // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1974. Vol. 21. N 3. P. 327–330.
62. Calvaer A.J. On the maximum loading of active linear electric multiports // Proc. IEEE. 1983. Vol. 71. N 2. P. 282–283.
63. Bakshi U.A., Bakshi V.U. Basic electrical engineering. Pune: Technical Publications, 2009.
64. Li W., Wang Y., Chen T. Investigation on the Thevenin equivalent parameters for online estimation of maximum power transfer limits // IET Generation, Transmission and Distribution. 2010. Vol. 4. N 10. P. 1180–1187.

Приложение. Рассмотрим 14-узловую схему, представляющую собой модификацию 14-узловой тестовой схемы, разработанной Институтом инженеров по электротехнике и радиоэлектронике (IEEE)¹⁴.

Узел № 0 является балансирующим, $\delta_0 = 0$, $|U_0| = 230$ кВ. Нагрузки узлов № 1–13 задаются постоянными проводимостями:

¹⁴ <http://www.energy.komisc.ru/cgi-bin/main.pl?page=8&extrapage=5>.

$$P_j = p_j |U_j|^2, \quad Q_j = q_j |U_j|^2, \quad j=1, \dots, 13.$$

Значения проводимостей нагрузок зафиксированы для всех указанных узлов, за исключением 1-го, 2-го и 11-го: $p_j = p_j^0$, $q_j = q_j^0$, $j \neq 0, 1, 2, 11$.

Значения p_j^0 и q_j^0 приведены в табл. 1.

Таблица 1. Проводимости нагрузок в узлах

№ узла	p^0 (См)	q^0 (См)
3	$-0.904 \cdot 10^{-3}$	$0.074 \cdot 10^{-3}$
4	$-0.144 \cdot 10^{-3}$	$-0.030 \cdot 10^{-3}$
5	$-0.847 \cdot 10^{-3}$	$0.393 \cdot 10^{-3}$
6	0.0	0.0
7	0.0	$1.331 \cdot 10^{-3}$
8	$-2.231 \cdot 10^{-3}$	$-1.255 \cdot 10^{-3}$
9	$-0.681 \cdot 10^{-3}$	$-0.439 \cdot 10^{-3}$
10	$-0.265 \cdot 10^{-3}$	$-0.136 \cdot 10^{-3}$
12	$-1.021 \cdot 10^{-3}$	$-0.439 \cdot 10^{-3}$
13	$-1.127 \cdot 10^{-3}$	$-0.378 \cdot 10^{-3}$

Значения параметров ветвей – активных (R) и реактивных (X) сопротивлений, мнимых частей проводимостей на землю¹⁵ (B), модулей коэффициентов трансформации¹⁶ ($|\tau|$) – приведены в табл. 2.

¹⁵ Действительные части проводимостей ветвей на землю равны нулю.

¹⁶ Мнимые части коэффициентов трансформации равны нулю.

Таблица 2. Параметры ветвей

№ узла (начало ветви)	№ узла (конец ветви)	R (Ом)	X (Ом)	B (мкСм)	$ \tau $
0	1	10.25	31.30	99.8	
0	4	28.58	117.99	93.0	
1	2	24.86	104.73	82.8	
1	3	30.74	93.27	64.3	
1	4	30.13	91.98	65.4	
2	3	35.45	90.47	24.2	
3	4	7.06	22.28	0.0	
3	6	0.0	105.81	0.0	0.511
3	8	0.0	276.26	0.0	0.516
4	5	0.0	115.80	0.0	0.536
5	10	12.56	26.30	0.0	
5	11	16.25	33.83	0.0	
5	12	8.75	17.23	0.0	
6	7	0.0	23.30	0.0	
6	8	0.0	14.55	0.0	
8	9	4.21	11.18	0.0	
8	13	16.81	35.76	0.0	
9	10	10.85	25.40	0.0	
11	12	29.22	26.43	0.0	
12	13	22.61	46.03	0.0	

Проводимость шунта в 8-м узле равна $1436.7i$ мкСм.

Пусть проводимости нагрузок в 1-м, 2-м и 11-м узлах изменяются в соответствии со следующей траекторией: $p_1 = \gamma$, $p_2 = 0.9\gamma$, $p_{11} = 0.5\gamma$, $q_1 = 0.8p_1$, $q_2 = p_2$, $q_{11} = 0.5p_{11}$, где γ – скалярный параметр. Графики активной мощности 1-го узла и суммарной активной мощности 1-го, 2-го и 11-го узлов как функций от γ приведены на рис. 2 и 3.

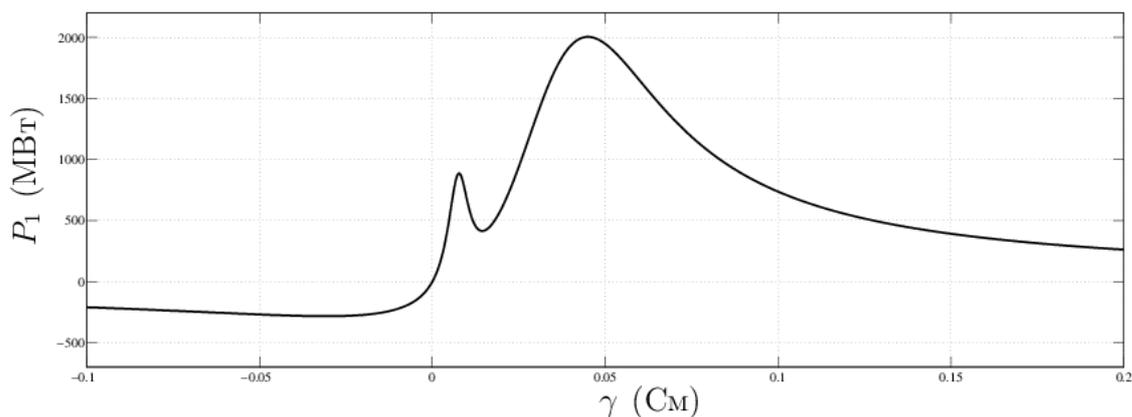


Рис. 2. Активная мощность 1-го узла

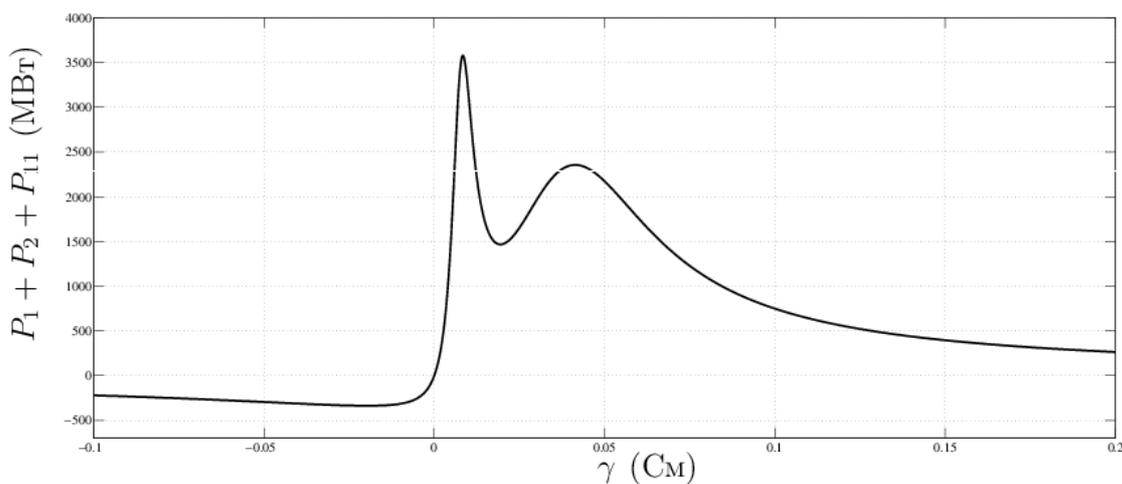


Рис. 3. Суммарная активная мощность 1-го, 2-го и 11-го узлов

Таким образом, у каждой из рассмотренных функций существует более одного локального максимума и более одного локального минимума.