

*Д.В. Чурбанов*

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ И ПРИМЕРЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ НАХОЖДЕНИЯ КООРДИНАТ ДИПОЛЕЙ

Постановка задачи

Пусть функция  $u(x, y)$  является решением задачи Неймана эллиптического уравнения в круговой области  $D = \{(x, y): x^2 + y^2 = R^2\}$  с границей  $\partial D$ :

$$\Delta u(x, y) = -N_1 \frac{\partial \delta}{\partial n_1}(x - \xi_1, y - \eta_1) - N_2 \frac{\partial \delta}{\partial n_2}(x - \xi_2, y - \eta_2), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0, (x, y) \in \partial D, \quad (2)$$

где  $\frac{\partial \delta(s, t)}{\partial n}$  – сингулярный функционал, действие которого на функцию определено по правилу  $\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \delta}{\partial n}(s, t) f(s, t) ds dt = -\frac{\partial f}{\partial n}(0, 0)$ . Здесь  $\frac{\partial f}{\partial n}(x, y)$  представляет собой производную по направлению единичного вектора  $\bar{n}$ . Уравнения с правой частью (1) также исследовались в работах [1-3].

Прямая задача (1), (2) позволяет получить потенциал  $u(x, y)$  в области  $\bar{D}$ , определяемый наличием двух диполей, расположенных в точках  $S_1(\xi_1, \eta_1)$ ,  $S_2(\xi_2, \eta_2)$  области  $D$ , ориентированных по векторам  $\bar{n}_1$  и  $\bar{n}_2$  с моментами  $N_1$  и  $N_2$  соответственно.

В рамках обратной задачи рассматривается вопрос об определении правой части уравнения Пуассона: дипольных моментов  $N_1$ ,  $N_2$ , координат

$$S_1, S_2 \in D^\varepsilon = D \setminus \bigcup_{i=1}^9 (D_{(x_i, y_i)}^\varepsilon = \{(x, y): (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = R^2\})$$

и ориентаций  $\bar{n}_1 = (n_{1x}, n_{1y})$ ,  $\bar{n}_2 = (n_{2x}, n_{2y})$ , ( $|\bar{n}_1|=1$ ,  $|\bar{n}_2|=1$ ) дипольных источников. В обратной задаче дополнительно заданы значения

$$u(x_i, y_i) = c_i, \quad i = 1, \dots, 9,$$

решения задачи (1), (2) на границе области  $(x_i, y_i) \in \partial D$ . Постановки такого типа характерны для моделирования ЭЭГ в медицинской диагностике [4,5]. Обзор методов разрабатываемых для определения ЭЭГ представлен в работе [6].

### Решение прямой и обратной задач

Решение внутренней задачи Неймана (1), (2) можно получить при помощи обобщенной функции Грина [7-9]. Формула для функции  $u(x, t)$  имеет вид:

$$u(x, y) = \frac{(x - \xi_1)l_{1x} + (y - \eta_1)l_{1y}}{\pi[(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2]} + \frac{(x' - \xi_1)l_{1x} + (y' - \eta_1)l_{1y}}{\pi[(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2]} + \frac{(x - \xi_2)l_{2x} + (y - \eta_2)l_{2y}}{\pi[(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2]} + \frac{(x' - \xi_1)l_{1x} + (y' - \eta_1)l_{1y}}{\pi[(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2]}, \quad (3)$$

где  $(x_i, y_i)$  – точка, лежащая на прямой, соединяющей начало координат и точку  $(x, y)$  на расстоянии  $\frac{R^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$  от начала координат. Векторы  $\bar{l}_i = (l_{ix}, l_{iy})$  и  $\bar{n}_i = (n_{ix}, n_{iy})$  коллинеарны, причем  $|\bar{l}_i| = N_i$ ,  $i = 1, 2$ . При  $(x, y) \in \partial D$  точка  $(x', y')$  совпадает с  $(x, y)$  и формула заметно упрощается.

Пусть определена функция

$$F(S_1, S_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2; x_i, y_i) = 2 \frac{(x_i - \xi_1)l_{1x} + (y_i - \eta_1)l_{1y}}{\pi[(x_i - \xi_1)^2 + (y_i - \eta_1)^2]} + 2 \frac{(x_i - \xi_2)l_{2x} + (y_i - \eta_2)l_{2y}}{\pi[(x_i - \xi_2)^2 + (y_i - \eta_2)^2]}.$$

Подставив в формулу (3) значения потенциала на границе  $u(x_i, y_i) = c_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , можно написать систему из девяти уравнений с восемью неизвестными по определению параметров источников

$$F(S_1, S_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2; x_i, y_i) = c_i, \quad i = \overline{1, 9}, \quad (4)$$

где  $l_{ix}, l_{iy}, \xi_i, \eta_i$ ,  $i = 1, 2$  – искомые постоянные,  $c_i, x_i, y_i$  – известные постоянные,  $i = \overline{1, 9}$ . Количество уравнений берется большим количества неизвестных, чтобы избавиться от неединственности, которая может возникнуть, когда число уравнений равно числу неизвестных. Примеры неединственности приведены в последней части работы.

## Численное решение обратной задачи

Рассмотрим задачу минимизации функционала невязки

$$\Psi(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2) = \sum_{i=1}^9 [F(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2; x_i, y_i) - c_i]^2,$$

в открытой области

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in D^\varepsilon, \bar{l}_1, \bar{l}_2 \in R^2. \quad (5)$$

Пусть  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7) = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, l_{1x}, l_{1y}, l_{2x}, l_{2y})$ . Для нахождения безусловного минимума функционала  $\Psi(\bar{p})$  может быть использован рекуррентный алгоритм построения последовательности

$$p_k^{n+1} = p_k^n - \alpha \frac{\partial \Psi(\bar{p})}{\partial p_k}, \quad (6)$$

где величина  $\alpha_n$  выбирается из условия

$$\Psi(\bar{p}^n) - \Psi(\bar{p}^n - \alpha \Psi'(\bar{p}^n)) \geq \varepsilon \alpha_n \|\Psi'(\bar{p}^n)\|, \quad 0.5 < \varepsilon < 1.$$

Как показано в [10], для выпуклого гладкого функционала  $\Psi(\bar{p})$  последовательность (6) является сходящейся, причем монотонно по значениям  $\Psi(\bar{p}^n)$ . Поскольку область восстановления координат диполей ограничена, то не исключено, что последовательность  $\{\bar{p}^n\}$  может выйти по координатам  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , то есть по  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$ , за границы области  $D^\varepsilon$ . В таком случае берется проекция вектора  $\bar{p}^k$ , вышедшего за границы  $\partial D$ , на данное множество  $D^\varepsilon$ . В качестве начального приближения можно выбрать произвольную точку области (5). Итерационный процесс реализуется до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность, определяемая условием

$$\max_{1 \leq i \leq 9} |F(\bar{p}_n, x_i, y_i) - c_i| \leq \delta,$$

где  $\delta$  – задаваемая для осуществления останова величина. Компоненты градиента функционала определяются согласно выражению

$$\frac{\partial \Psi(\bar{p})}{\partial p_k} = 2 \sum_{i=1}^9 \frac{\partial F(\bar{p}; x_i, y_i)}{\partial p_k} [F(\bar{p}; x_i, y_i) - c_i],$$

где частные производные функции  $F(\bar{p}; x_i, y_i)$  вычисляются по формулам для  $j = 1, 2, i = 1, \dots, 9$

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \xi_j} = -2 \frac{((x_i - \xi_j)^2 - (y_i - \eta_j)^2) l_{jx} + 2(x_i - \xi_j)(y_i - \eta_j) l_{jy}}{[(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2]^2},$$

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \eta_j} = -2 \frac{((y_i - \eta_j)^2 - (x_i - \xi_j)^2) l_{jy} + 2(x_i - \xi_j)(y_i - \eta_j) l_{jx}}{[(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2]^2},$$

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial l_{jx}} = -2 \frac{(x_i - \xi_j)}{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2},$$

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial l_{jy}} = -2 \frac{(y_i - \eta_j)}{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2}.$$

### Вычислительные эксперименты

На иллюстрациях представлены результаты численных расчетов решения обратной задачи. Вначале задавалось некоторое положение (на рисунках отмечено парой букв  $F_1$  и  $F_2$ ) и некоторая ориентация диполей, по этим данным вычислялись значения  $c_i$  на приемниках, обозначенных крестиками  $X$ . Далее из некоторого начального положения, обозначенного парой букв  $S_1$  и  $S_2$ , организовывался итерационный процесс, описанный в предыдущем пункте. Некоторые итерации данного процесса отмечены стрелочками, причем наклон стрелочек соответствует наклону диполя на данной итерации. В таблицах показано соответствие номеров итераций и величин погрешности на данной итерации.

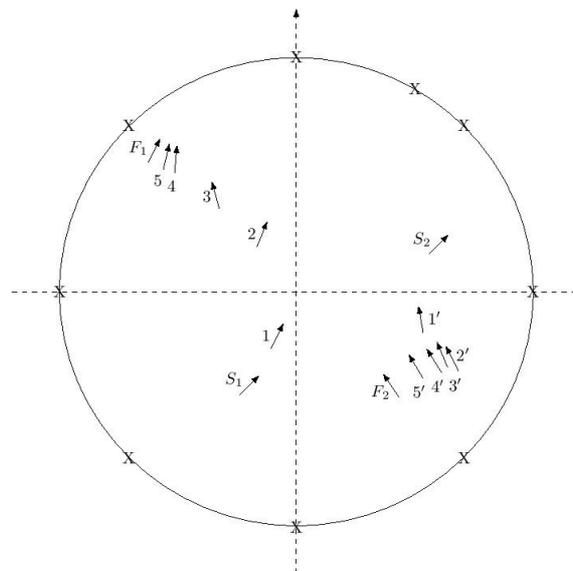


Рис. 1.

Номер на рис.	Итерация	Невязка
1	0	1.642
2	3	0.743
3	12	0.526
4	18	0.266
5	270	0.09

Таблица 1.

В эксперименте, проиллюстрированном на рисунке 1, как и в последующих экспериментах, диполи в начальном положении имеют наклон 45 градусов к горизонтали. На паре рисунков 1, 2 приемники распределены по всей границе области, в то время, как на рисунках 3, 4 они сконцентрированы преимущественно в верхней части.

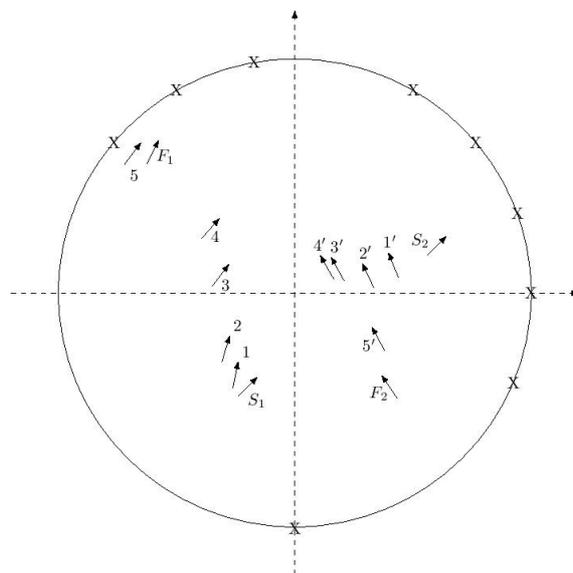


Рис. 2.

Номер на рис.	Итерация	Невязка
1	3	2.569
2	4	2.587
3	5	2.592
4	15	2.134
5	391	0.019

Таблица 2.

Также выбирались различные начальные положения итерационного процесса, на рисунках 1, 3 начальные положения полагались в накрест лежащих секторах круга, когда на рисунках 2, 4 пара начальных положений диполей находится в нижней части круга, а конечные положения диполей находятся в верхней части круга.

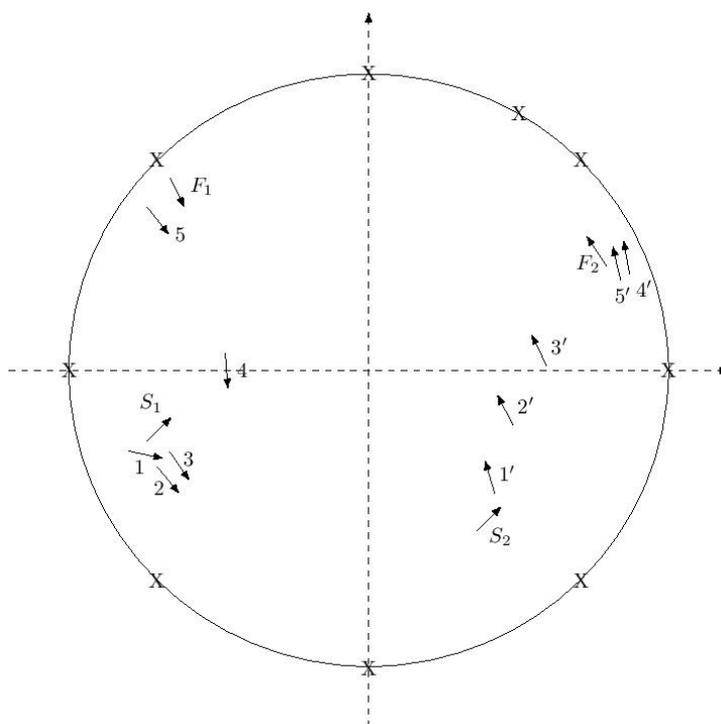


Рис. 3.

Номер на рис.	Итерация	Невязка
1	1	1.447
2	4	1.198
3	12	0.992
4	15	0.891
5	768	0.062

Таблица 3.

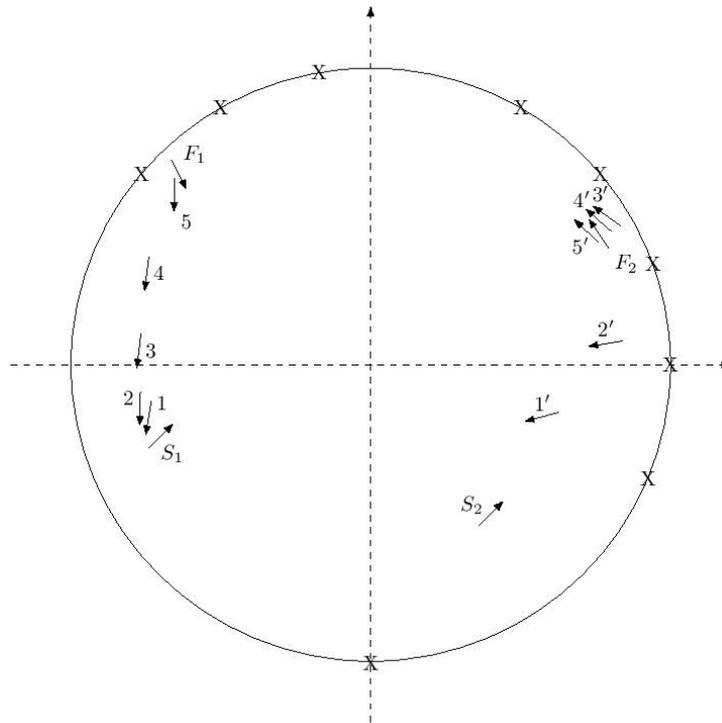


Рис. 4.

Номер на рис.	Итерация	Невязка
1	4	3.112
2	5	3.151
3	50	0.873
4	500	0.229
5	1497	0.099

Таблица 4.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что восстановление параметров диполей данным градиентным методом возможно при различных сочетаниях расположения приемников и диполей.

### Неединственность определения координат диполей

Для уравнения (1) ставится обратная задача об определении только координат  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in D^\varepsilon$  дипольных источников при известных дипольных моментах  $N_1$  и  $N_2$ , ориентациях  $\bar{n}_1, \bar{n}_2$  по дополнительным заданным значениям  $u(x_i, y_i) = c_i, i = 1, \dots, 4$  решения задачи (1), (2) на

границе области,  $(x_i, y_i) \in \partial D$ . Константы  $N_1$  и  $N_2$ , и  $c_i, i = 1, \dots, 4$ , а также направления  $\bar{n}_1$  и  $\bar{n}_2$  заданы.

Задача об определении координат источников по потенциалам сводится к системе аналогичной (4), из четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ , где  $l_{1x}, l_{1y}, l_{2x}, l_{2y}, c_i, x_i, y_i$ , – искомые постоянные,  $c_i, x_i, y_i$  – заданные постоянные,  $i = 1, \dots, 4$ .

Решение данной системы, как и прежде, сводится к задаче об отыскании минимума функционала

$$\Psi(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2) = \sum_{i=1}^4 [F(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2; x_i, y_i) - c_i]^2,$$

минимизация которого проводится градиентным методом описанным выше. Поскольку в случае, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных предполагается неединственность, то для отыскания всех возможных решений градиентный метод применяется для различных пар начальных значений  $(\xi_{10}, \eta_{10}), (\xi_{20}, \eta_{20})$  из множества точек  $\{(x, y): (ih, jh) \in D, i, j = 1..n\}$  ( $h = 0.5$ ) при одних и тех же данных на приемниках  $c_i, i = 1, \dots, 4$ .

В ходе вычислительного эксперимента бралась серия решений, причем один источник был фиксирован (обозначен цифрой II), а другой, обозначенный арабскими цифрами от 1 до 4, равномерно смещался в горизонтальном (рисунки 5 (а, б)), вертикальном (рисунки 5 (в, г)) и радиальном направлениях (рисунки 5 (д, е)). После вычислялись значения на приемниках  $c_i$ . Далее при помощи описанного выше алгоритма находились решения, дающие близкие с некоторой точностью значения на приемниках. При обнаружении второго решения, на иллюстрациях оно помечалось геометрическими фигурами и цифрой, соответствующей исходному решению. Например, паре (1, II) соответствует дополнительно обнаруженное решение, помеченное треугольниками и парой цифр (1, 1'). Обнаружено, что в случае дипольных источников, в отличие от точечных зарядов [11], возможно наличие третьего решения. Примеры обнаружения третьего решения можно найти на рисунках 5 (а, в). В обоих случаях оно соответствует решению (1, II) и обозначено крестиками вместе с парой цифр (1'', 1'').

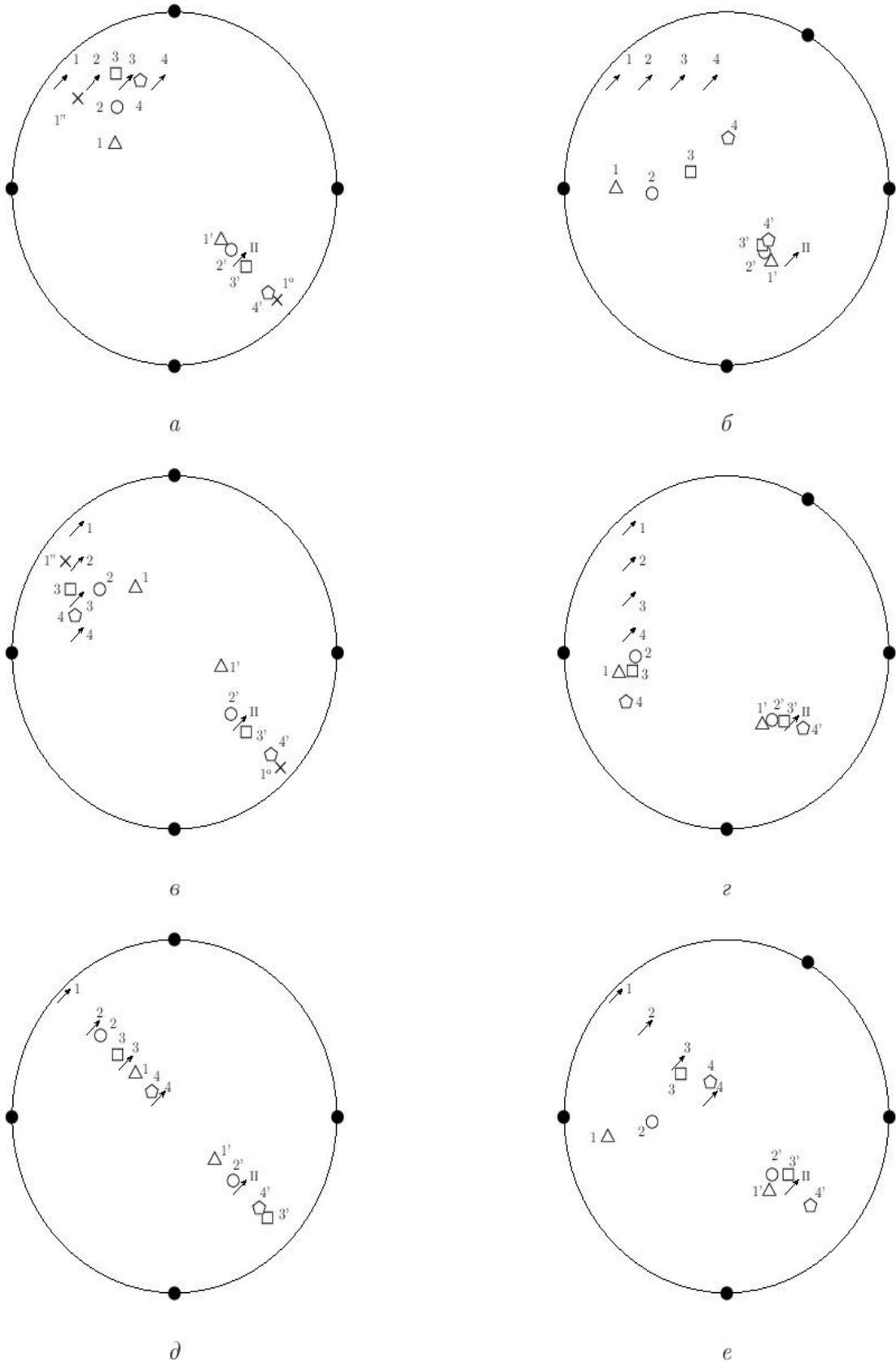


Рис. 5.

## Список литературы

1. El Badia A., Farah M. Identification of dipole sources in an elliptic equation from boundary measurements: application to the inverse eeg problem. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2006, V 14, N 4, pp 331- 353.
2. Clerc M. et al Source localization using rational approximation on plane sections. *Inverse Problems.* 2012. V 28, N 5. pp 05501-8.
3. Clerc M., Kybic J. A common formalism for the integral formulations of the forward eeg problem. *IEEE Trans. Medical Imaging.* 2008. V 24. pp 12-28.
4. Гнездецкий В.В. Обратная задача ЭЭГ и клиническая электроэнцефалография. М.: МЕДпресс-информ. 2004.
5. Ливанов М.Н. Пространственная организация процессов головного мозга. М.: Наука. 1972.
6. Cassar T., Grech R. Review of solving the inverse problem in eeg source analysis. *Journal of Neuroengineering and Rehabilitation.* 2008. V 5. N 25.
7. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1992.
8. В.Я. Арсенин Методы математической физики и специальный функции. М.: Наука. 1972.
9. Ю.М. Крикунов. Обобщенная функция Грина задачи Неймана и задачи ТЗ для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Тр. сем. по краевым задачам Казанского гос. Ун-та. Казань. 1985.
10. Третьяков А.А., Березнев В.А., Карманов В.Г. О стабилизирующих свойствах градиентного метода. *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ.,* 1986, Т. 26, №1, С. 134-137.
11. Чурбанов Д.В., Щеглов А.Ю. Пример неединственности восстановления правых частей эллиптического уравнения. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. Матем. и киберн.* 2012. № 1. С. 49-51.