

Б. Р. Данилов¹, С. А. Ложкин²

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ШЕННОНА В ОДНОЙ МОДЕЛИ ГЛУБИНЫ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЕМКОСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВЫХОДОВ ЭЛЕМЕНТОВ*

Введение и основные определения

В настоящей работе проведено исследование варианта модели [1,2] обобщённой глубины схем из функциональных элементов (СФЭ) в произвольном конечном полном базисе $B = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_b\}$. Пусть функциональный элемент (ФЭ) типа \mathcal{E}_i , $1 \leq i \leq b$, имеет арность k_i и реализует функцию алгебры логики (ФАЛ) $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geq 2$ существенно зависит от всех своих булевых переменных. Пусть также ФЭ \mathcal{E}_i присвоены сложностные характеристики, действительные величины, — его базовая глубина d_i и множитель глубины w_i . Элементы считаются различными, когда они отличаются по своим функциональным или сложностным параметрам.

Схему из функциональных элементов без ветвлений входов, которая представляет собой последовательность ФЭ, в которой каждый элемент, кроме первого, соединён с предыдущим и только с ним, а выходом (возможно, не единственным) является последний элемент, будем называть *цепной* СФЭ или просто *цепью*. Выделенным выходом цепи будем называть выход её последнего ФЭ. Если в цепи выделен вход первого её ФЭ, то такую цепь будем называть *инициальной*.

Обобщённая (классическая, структурная) глубина $D(\Sigma)$ ($d(\Sigma)$, $\delta(\Sigma)$) СФЭ Σ — это наибольшая из обобщённых (классических, структурных) глубин её *главных* инициальных цепей, т.е. тех цепных подсхем, выделенным входом которых является вход схемы Σ , а выделенным выходом — выход схемы Σ . Обобщённая (классическая, структурная) глубина инициальной цепи — это сумма обобщённых (базовых) глубин её выделенного входа и выходов всех ФЭ этой цепи (для структурной

¹М.н.с факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: brdaniilov@gmail.com.

²Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru.

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 18-01-00800-а) и госбюджетной темы НИР № 5.4 ВМК МГУ.

глубины — количество ФЭ цепи). Обобщённая глубина $D(v)$ выхода ФЭ (или входа схемы) v типа \mathcal{E}_i , $1 \leq i \leq b$, кратности m определяется по формуле: $D(v) = d_i + (m - 1) \cdot w_i$. Для того, чтобы глубина входа была определена, здесь и далее предполагается, что с каждым входом рассматриваемых нами СФЭ связан некоторый ФЭ базиса. Для сокращения формулировок будем использовать термины D -глубина (d -глубина, δ -глубина) как синонимы для обобщённой (классической, структурной) глубины.

Результат работы получен для одного важного подкласса СФЭ — так называемых усилительных СФЭ (УСФЭ). Пусть в базисе B выделен один усилительный ФЭ, имеющий единственный вход и реализующий тождественную ФАЛ. Без ограничения общности полагаем, что усилительным является элемент \mathcal{E}_1 ($k_1 = 1$, $\varphi_1(x_1) = x_1$). Усилительная СФЭ — это СФЭ, в которой выходы всех ФЭ кратности больше единицы и входы¹ схемы кратности больше единицы принадлежат элементам усилительного типа. Вход схемы, которому сопоставлен усилительный элемент, будем называть усилительным входом.

Обозначим через $P_2(n)$ множество всех ФАЛ, зависящих от заданных на множестве $E_2 = \{0, 1\}$ переменных x_1, \dots, x_n . A -глубина $A_B(f)$, $A \in \{D, d, \delta\}$, ФАЛ f при её реализации в классе УСФЭ — это наименьшая из A -глубин УСФЭ над B , реализующих f . Функция Шеннона $A_B(n)$ для A -глубины ФАЛ из $P_2(n)$ в классе УСФЭ над B — это наибольшая A -глубина ФАЛ из $P_2(n)$.

Из результатов работы [2] следует, что асимптотика функции Шеннона $d_B(n)$ имеет вид $d_B(n) = \tau'_B n \pm O(\log n)$ и определяется константой τ'_B , которая называется приведённой (классической) глубиной базиса B :

$$\tau'_B = \min_{1 \leq i \leq b, k_i \neq 1} \tau'_i, \quad \tau'_i = \frac{d_i}{\log_2 k_i}, \quad (1)$$

где τ'_i — приведённая (классическая) глубина элемента \mathcal{E}_i , $k_i \neq 1$. В настоящей работе аналогичный результат установлен для функции Шеннона $D_B(n)$ и константы τ_B — приведённой обобщённой глубины B :

$$\tau_B = \tau'_B + \tau''_B, \quad \tau''_B = \min_{m \geq 2} \frac{d_1 + (m - 1) \cdot w_1}{\log_2 m}. \quad (2)$$

Следующая основная теорема 1 является следствием теорем 2 и 3.

Теорема 1. *Имеет место асимптотическая оценка функции Шеннона обобщённой глубины УСФЭ над базисом B :*

$$D_B(n) = \tau_B n \pm O(\log n).$$

¹Кратность входа — это кратность выхода приписанного ему усилительного ФЭ, т.е. степень ветвления входа, увеличенная на количество приписанных ему выходов схемы.

Нижняя оценка функции Шеннона обобщённой глубины ФАЛ

Целью данного раздела является доказательство теоремы 2 о нижней асимптотической оценке функции Шеннона $D_B(n)$ вида:

$$D_B(n) \geq \tau_B n - O(\log n). \quad (3)$$

Назовём приведённую СФЭ с одним выходом схемой *формульного типа* или просто *формулой*, если в ней кратность выхода каждого ФЭ равна единице (при этом на кратности входов ограничений нет). Назовём СФЭ *абсолютной*, если кратность любого её входа равна единице. Сумму кратностей входов СФЭ Σ будем называть её *рангом* $R(\Sigma)$.

Лемма 1. *Для любой абсолютной СФЭ Σ формульного типа над B с k входами имеет место соотношение:*

$$D(\Sigma) \geq \tau'_B \log_2 k. \quad (4)$$

Доказательство. Заметим сначала, что для схемы из условия $D(\Sigma) = d(\Sigma)$. Проведём доказательство индукцией по $\delta(\Sigma)$. Любая формула Σ δ -глубины ноль — это схема без ФЭ, единственный выход которой является входом, и (4) выполняется. Пусть теперь (4) верно для любой формулы, δ -глубина которой меньше t , и пусть формула Σ , $\delta(\Sigma) = t$, имеет вид $\Sigma = \varphi_j(\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{k_j})$, т.е. получена суперпозицией ФЭ \mathcal{E}_j и абсолютных формул Σ'_i , $1 \leq i \leq k_j$, для которых $\delta(\Sigma'_i) < t$. Пусть Σ'_i содержит k'_i входов (при этом $k = \sum_{i=1}^{k_j} k'_i$), тогда по предположению индукции $d(\Sigma'_i) \geq \tau'_B \log_2 k'_i$, откуда, пользуясь (1), получаем цепочку соотношений, завершающих доказательство:

$$\begin{aligned} d(\Sigma) &= d_j + \max_{1 \leq i \leq b} d(\Sigma'_i) \geq \tau'_B \log_2 k_j + \max_{1 \leq i \leq b} (\tau'_B \log_2 k'_i) \geq \\ &\geq \tau'_B \log_2 (k_j \cdot \max_{1 \leq i \leq b} k'_i) \geq \tau'_B \log_2 \sum_{i=1}^{k_j} k'_i = \tau'_B \log_2 k. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 2. *Соотношение (4) выполняется для любой СФЭ Σ над B с одним выходом и k входами.*

Доказательство. Пусть Σ — схема из условия, тогда путём поднятия ветвлений выходов ФЭ ко входам схемы перейдём от неё к схеме $\hat{\Sigma}$ формульного типа. Пусть абсолютная формула Σ' получена из $\hat{\Sigma}$ заменой каждого вхождения переменной x_i некоторой новой для формулы $\hat{\Sigma}$ и отличной от всех других переменных y_p переменной y_j , при которой входу y_j в Σ' сопоставлен тот ФЭ, который приписан входу x_i в $\hat{\Sigma}$. Очевидно, число k' входов схемы Σ' не меньше k , при этом также $D(\Sigma) \geq D(\Sigma')$. Действительно, для любой главной цепи ω' схемы Σ' в Σ существует равная ей с точностью до кратностей выходов ФЭ и кратностей входов главная цепь ω . Однако, любая цепь СФЭ Σ' — это абсолютная формула, поэтому $D(\omega) \geq D(\omega')$. Теперь неравенство (4)

следует из аналогичного неравенства, записанного с использованием леммы 1 для Σ' и k' . \square

Назовём СФЭ с одним входом *усилителем*, если в ней для любого ФЭ v найдётся такой другой элемент или вход схемы v' , что все входы v соединены с v' . Назовём СФЭ *однородной*, если в ней все входы и ФЭ усилительные.

Лемма 3. *Для любого однородного усилителя Σ над B с t выходами имеет место соотношение:*

$$D(\Sigma) \geq \tau_B'' \log_2 t. \quad (5)$$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $\delta(\Sigma)$. Пусть $\delta(\Sigma) = 0$, тогда схема представляет собой вход, который является её выходом кратности t . По определению $D(\Sigma) = d_1 + (t - 1) \cdot w_1$ и неравенство (5) вытекает из (2).

Пусть $\delta(\Sigma) = t$ и СФЭ Σ является результатом стыковки вида $\Sigma''(\Sigma')$, где Σ' — это m' -выходной однородный усилитель, единственный усилительный вход которого соединён с s усилительными элементами v_1, \dots, v_s , являющимися его выходами кратностей m'_1, \dots, m'_s соответственно ($m' = m'_1 + \dots + m'_s$), а СФЭ Σ'' имеет s усилительных входов x_1, \dots, x_s кратностей m''_1, \dots, m''_s и является объединением s однородных усилителей $\Sigma''_1, \dots, \Sigma''_s$, имеющих соответственно m''_1, \dots, m''_s выходов ($m = m''_1 + \dots + m''_s$). При указанной стыковке для каждого i , $1 \leq i \leq s$, вход x_i схемы Σ'' присоединяется к выходу v_i усилителя Σ' . Пусть $m''_0 = \max_{1 \leq i \leq s} m''_i$. Заметим, что $\delta(\Sigma''_i) < t$, $1 \leq i \leq s$, и по предположению индукции $D(\Sigma''_i) \geq \tau_B'' \log_2 m''_i$, откуда, используя (2), получаем цепочку соотношений, завершающих доказательство:

$$D(\Sigma) = d_1 + (s - 1)w_i + \max_{1 \leq i \leq s} D(\Sigma''_i) \geq \tau_B'' (\log_2 s + \log_2 m''_0) \geq \tau_B'' \log_2 t. \quad \square$$

Лемма 4. *Соотношение (5) верно для любой УСФЭ Σ над B с t выходами и одним входом.*

Доказательство. Пусть УСФЭ Σ не однородна, иначе она является однородным усилителем и для Σ всё уже доказано в лемме 3. Если $\delta(\Sigma) = 0$, то $t = 1$ и неравенство (5) очевидно. В противном случае $\delta(\Sigma) > 0$. Рассмотрим операцию удаления из Σ элемента отличного от усилителя, при которой начало выходной дуги удаляемого элемента отождествляется¹ с началом любой из его входных дуг. Такая операция удаления приводит к СФЭ с тем же числом выходов и D -глубиной не превосходящей $D(\Sigma)$. Повторяя указанную операцию, приходим к

¹Если удаляемый ФЭ выходной, то его выход переносится на любой элемент, выход которого поступает на вход удаляемого. Удалить вход, не являющийся усилительным, означает отбросить входную вершину, а ранее соединённую с ней единственную вершину объявить новым входом.

однородному усилителю Σ' , для которого $D(\Sigma) \geq D(\Sigma')$, откуда по лемме 3 вытекает (5). \square

Введём ещё два функционала «сложности» схем. Назовём *шириной* $W(\Sigma)$ СФЭ Σ максимальную мощность тупикового сечения графа этой схемы, а (*структурной*) *сложностью* $\ell(\Sigma)$ СФЭ Σ — количество ФЭ в ней. Шириной $W_B(f)$ (сложностью $\ell_B(f)$) ФАЛ f назовём минимальную ширину (сложность) реализующих f в базисе B схем. Функция Шеннона $\ell_B(n)$ для сложности ФАЛ из $P_2(n)$ в классе СФЭ над B — это наибольшая сложность ФАЛ из $P_2(n)$. Для доказательства нижней асимптотической оценки функции Шеннона $D_B(n)$ используются две леммы: о реализации любой ФАЛ из $P_2(n)$ усилительной схемой по порядку D -глубины, не превосходящей n , и о ширине схем, реализующих ФАЛ из $P_2(n)$.

Лемма 5. Для функции Шеннона D -глубины УСФЭ над базисом B справедливо соотношение: $D_B(n) = O(n)$.

Лемма 5 вытекает, например, из доказанной ниже теоремы 3.

Лемма 6. Существует такая последовательность ФАЛ $(f_n)_{n=1}^\infty$, $f_n \in P_2(n)$, что для некоторой константы a выполняется: $W_B(f_n) \gtrsim a \cdot 2^n / n^3$.

Доказательство. Пусть схема Σ_n минимальна по сложности для ФАЛ f_n . Обозначим через $\ell_i(\Sigma)$, $1 \leq i \leq b$, количество элементов \mathcal{E}_i в СФЭ Σ , а через $e(\Sigma)$ — количество рёбер в ней. С одной стороны $e(\Sigma_n) \leq \delta(\Sigma_n) \cdot W(\Sigma_n)$, а с другой каждое ребро схемы входит в некоторый ФЭ, поэтому: $e(\Sigma_n) = \sum_{i=1}^b \ell_i(\Sigma_n) \cdot k_i \geq \ell(\Sigma_n)$. Следовательно, так как из леммы 5 вытекает $\delta(\Sigma_n) = O(n)$, то $\ell(\Sigma_n) = O(n \cdot W(\Sigma_n))$. Если асимптотическое соотношение из условия леммы не выполняется, то существует подпоследовательность ФАЛ $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$, для которых $W(\Sigma_{n_j}) = O(2^n / n^3)$, и тогда для сложности схем Σ_{n_j} получаем $\ell(\Sigma_{n_j}) = O(2^n / n^2)$, что противоречит известной (см., например, [4]) асимптотике функции Шеннона $\ell_B(n) \sim 2^n / n$.

Теорема 2. Имеет место нижняя асимптотическая оценка (3) функции Шеннона D -глубины УСФЭ над базисом B .

Доказательство. По лемме 6 среди ФАЛ из $P_2(n)$ есть функция f_n , реализуемая только схемами ширины асимптотически не меньшей $a_1 \cdot 2^n / n^3$, где a_1 — некоторая константа. Рассмотрим D -минимальную для f_n УСФЭ Σ . Соответствующее тупиковое сечение делит Σ на две подсхемы Σ_1 и Σ_2 . Обозначим через m число выходов схемы Σ_1 , а через k — число входов схемы Σ_2 . Получим из Σ_1 однородную m' -выходную СФЭ Σ'_1 , $m' = m$, $D(\Sigma'_1) \leq D(\Sigma_1)$, путём удаления элементов, отличных от усилительного, подобно тому как это делалось в лемме 4. Схема Σ'_1 состоит из не более n непересекающихся деревьев-подсхем, исходящих из её входов. Выходами этих подсхем являются концевые вершины деревьев,

а общее количество концевых вершин равно числу выходов схемы Σ_1 и тем самым ширине схемы Σ . Таким образом, для некоторой константы a_2 выполняется соотношение $m \gtrsim a_2 \cdot 2^n/n^3$.

Сопоставим каждому из выходов схемы Σ'_1 его D -глубину. По лемме 5 $D_B(n) = O(n)$, поэтому то же самое верно и для этих глубин. Сгруппируем выходы так, чтобы в i -й группе I_i находились выходы с D -глубиной из интервала $((i-1)\log_2 n, i\log_2 n)$. Интервалов, соответствующих непустым группам, будет p штук, где $p = O(n/\log_2 n)$. Так как $m \gtrsim a_2 \cdot 2^n/n^3$, то существует по крайней мере одна группа I_j , $1 \leq j \leq p$, для мощности которой выполняется неравенство $|I_j| \gtrsim a_3 \cdot 2^n/n^4$, при некоторой константе a_3 .

По построению разбиения на группы, D -глубины вершин, входящих в I_j , отличаются не более чем на $\log_2 n$. Схема Σ'_1 состоит из не более n деревьев поэтому во множестве I_j можно выделить подмножество I'_j выходных вершин схемы Σ'_1 , которые принадлежат одному и тому же дереву T , такое что $|I'_j| \gtrsim a_4 \cdot 2^n/n^5$, где a_4 некоторая константа. Тогда по лемме 4, применяемой к дереву T , D -глубина выходов схемы Σ'_1 , попадающих в I'_j , не меньше чем $\tau''_B n - O(\log n)$, следовательно то же самое по выше сделанному замечанию верно и для всего множества I_j .

Перейдём к подсхеме Σ_2 . Пусть J — множество входных вершин схемы Σ_2 , соответствующих выходам схемы Σ'_1 из I_j , тогда $|J| \gtrsim a_3 \cdot 2^n/n^4$. В схеме Σ_2 можно выделить подсхему с не менее $|J|$ входами, которая сводит входы из множества J к одной вершине. Лемма 2 позволяет утверждать, что тогда существует цепь между этой вершиной и вершиной из J с D -глубиной не менее $\tau'_B n - O(\log n)$.

Так как начало этой цепи из множества J соответствует вершине из I_j , то в схеме Σ существует главная цепь с D -глубиной не менее $(\tau'_B + \tau''_B)n - O(\log n)$. \square

Верхняя оценка функции Шеннона обобщённой глубины ФАЛ

Целью данного раздела является доказательство теоремы 3 о верхней асимптотической оценке функции Шеннона $D_B(n)$ вида:

$$D_B(n) \leq \tau_B n + O(\log n). \quad (6)$$

Доказательство проводится путём построения для любой f , $f \in P_2(n)$, реализующей её УСФЭ и опирается на технику φ -разложения, описанную авторами, например, в [5]. Приведём формулировки лемм 7, 8, доказанные в [5]. Начнём с необходимых определений.

Обозначим множество всех двоичных наборов длины n через E_2^n , а набор переменных (x_1, \dots, x_n) — через \tilde{x}^n . Пусть базис B_0 состоит из ФЭ \mathcal{E}_\neg , $\mathcal{E}_\&$, \mathcal{E}_\vee , которые реализуют соответственно ФАЛ \bar{x}_1 , $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$; будем называть базис B_0 *стандартным*.

Число, двоичной записью которого является набор $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} \in E_2^n$, будем записывать через $v(\tilde{\alpha})$. Назовём *альтернированием* $\text{alt}(\tilde{\alpha})$ булевого

набора $\tilde{\alpha}$ минимальное число отрезков постоянства, на которые он распадается, уменьшенное на единицу, а альтернированием $\text{alt}(f)$ ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, — альтернирование двоичного набора \tilde{f} , $\tilde{f} \in E_2^{2^n}$, составленного из значений ФАЛ f , взятых на наборах значений её аргументов, расположенных в порядке следования задаваемых ими с помощью ν -нумерации чисел. Назовём ФАЛ h *ступенчатой*, если $\text{alt}(h) \leq 1$. Через $\lfloor a \rfloor$ ($\lceil a \rceil$) обозначим ближайшее к a снизу (сверху) целое число.

Лемма 7. Для целого n , $n \geq 2$, и любой отличной от константы ФАЛ g , $g \in P_2(n)$, в классе формул над базисом B_0 найдётся реализующая g формула Σ , для которой выполняются неравенства:

$$\delta(\Sigma) \leq 2 \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2(\text{alt}(g)) \rceil + 1, \quad (7)$$

$$\ell(\Sigma) \leq \frac{3}{2} \cdot n \lceil \log_2 n \rceil \text{alt}(g). \quad (8)$$

Замечание. Как это вытекает из доказательства леммы (см. [5]) формула Σ реализуется как дизъюнкция или конъюнкция ступенчатых ФАЛ в количестве s , $s \leq \text{alt}(g)$, и имеет вид дизъюнктивного или конъюнктивного двоичного дерева с s входами, где каждая ступенчатая ФАЛ реализуется как троичное дерево из подсхем вида $(x \vee y \& z)$, глубина которого является величиной $O(\log n)$. Следовательно, кратность любого входа схемы Σ имеет порядок $O(3^{a_1 \cdot \log n} \cdot \text{alt}(g)) = O(n^{a_2} \cdot \text{alt}(g))$, для некоторых постоянных a_1, a_2 .

Пусть Δ — разбиение множества E_2^n на попарно непересекающиеся непустые подмножества $\delta_1, \dots, \delta_p$ (компоненты разбиения), объединение которых равно E_2^n . Определим мультиплексорную ФАЛ $\mu_\Delta = \mu(\tilde{x}^n, \tilde{y}^p)$, связанную с разбиением Δ , равенством

$$\mu_\Delta(\tilde{x}^n, \tilde{y}^p) = \bigvee_{i=1}^p \chi_{\delta_i}(\tilde{x}^n) u_i,$$

где χ_{δ_i} — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i . Заметим, что стандартную мультиплексорную ФАЛ μ_n порядка n ,

$$\mu_n(\tilde{x}^n, u_0, \dots, u_{2^n-1}) = \bigvee_{\tilde{\sigma}=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot u_{\nu(\tilde{\sigma})},$$

можно рассматривать как мультиплексорную ФАЛ μ_Δ , связанную с тривиальным разбиением Δ таким, что $\delta_{\nu(\tilde{\sigma})} = \{\tilde{\sigma}\}$ для каждого $\tilde{\sigma} \in E_2^n$.

Лемма 8. Пусть $\varphi = \varphi(y_1, \dots, y_p)$ — существенная ФАЛ, а Δ — разбиение множества E_2^n на d , $d \leq p$, компонент. Тогда существуют ФАЛ $g_i(\tilde{x}^n, u_i)$, $1 \leq i \leq p$, такие что:

$$\varphi(g_1(\tilde{x}^n, u_1), \dots, g_p(\tilde{x}^n, u_p)) = \mu_\Delta(\tilde{x}^n, u_1, \dots, u_d), \quad (9)$$

и при этом в случае $1 \leq j \leq d$ переменная u_j либо антимонотонна, либо монотонна для g_j , а в случае $d+1 \leq j \leq p$ является фиктивной для g_j .

Кроме того, если Φ реализуется абсолютной формулой Φ над B , в записи которой переменная y_i появляется левее переменной y_j тогда и только тогда, когда $i < j$, а Δ — разбиение E_2^n на последовательные отрезки, то для любого j , $1 \leq j \leq p$, компоненты $g_{j,\sigma}(\tilde{x}^n)$, $\sigma \in E_2$, ФАЛ $g_j(\tilde{x}^n, u_j)$, т. е. ФАЛ вида $g_{j,\sigma}(\tilde{x}^n) = g_j(\tilde{x}^n, \sigma)$, меняют свои значения только на границах отрезков разбиения Δ и делают это не более $k_B \cdot \delta(\Phi)$ раз, где $k_B = \max_{1 \leq i \leq b} k_i$.

Лемма 9. Для любого натурального числа k существует абсолютная формула Σ над B с не менее k входами, для которой:

$$D(\Sigma) \leq \tau'_B \log_2 k + 2d_j, \quad \text{где } a = 2d_j, \tau'_B = \tau'_j. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть величина τ'_B достигается (1) на ФЭ \mathcal{E}_j базиса B , т. е. $\tau'_B = \tau'_j = d_j / \log_2 k_j$. Построим формулу Σ в виде квазиполного¹ корневого k_j -ичного ориентированного дерева, состоящего из $t = \left\lceil \frac{k-1}{k_j-1} \right\rceil$, ФЭ \mathcal{E}_j , листьями которого являются входы формулы, а корнем — её выход. Число входов формулы Σ равно $k_j + (k_j - 1)(t - 1)$ и поэтому не меньше k . Кроме того, глубина дерева равна $\lceil \log_{k_j}(t + 1) \rceil$ и не превосходит $(\log_{k_j} k + 1)$, следовательно для Σ выполняется неравенство (10), в котором также учтена D -глубина входов Σ . \square

Обозначим через m_B значение величины m , на котором достигается минимум в (2), т. е. $\tau''_B = d_1 + (m_B - 1)w_1$.

Лемма 10. Для любого натурального числа t существует однородный усилитель Σ над B с t выходами, для которого:

$$D(\Sigma) \leq \tau''_B \log_2 t + a, \quad \text{где } a = 2(d_1 + (m_B - 1)w_1). \quad (11)$$

Доказательство. Построим усилитель Σ в виде квазиполного корневого m_B -ичного ориентированного дерева, состоящего из $t = \left\lceil \frac{m-m_B}{m_B-1} \right\rceil$, ФЭ \mathcal{E}_1 , листьями которого являются выходные элементы усилителя, а корнем — его вход. При условии, что каждый выходной элемент усилителя имеет кратность выхода m_B , число выходов схемы Σ будет равно $m_B + (m_B - 1)t$ и поэтому не меньше t . Чтобы число выходов было в точности равно t , уменьшим кратность некоторых выходных вершин. Глубина дерева равна $\lceil \log_{m_B}(t + 1) \rceil$ и не превосходит $(\log_{m_B} t + 1)$, следовательно для Σ выполняется неравенство (11), где также учтена D -глубина входа. \square

Из полноты базиса B следует (см., например, [6]), что существуют формулы Σ_0, Σ_1 над B , реализующие константы 0, 1, а также формулы $\Sigma_{\&}, \Sigma_{\vee}, \Sigma_{\neg}$, реализующие соответственно ФАЛ $x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1$.

Теорема 3. Имеет место верхняя асимптотическая оценка (6) функции Шеннона D -глубины УСФЭ над базисом B .

¹Назовём корневое дерево квазиполным, если глубина любых двух его листьев отличается не более, чем на единицу.

Доказательство. В качестве доказательства укажем способ построения УСФЭ Σ , которая реализует произвольную ФАЛ f , $f \in P_2(n)$. Напишем для f её разложение через стандартную мультиплексорную ФАЛ порядка n вида:

$$f(\tilde{x}^n) = \mu_n(\tilde{x}^n, f_0, \dots, f_{2^n-1}), \quad (12)$$

где $f_{v(\tilde{\sigma})} = f(\tilde{\sigma})$, $\tilde{\sigma} \in E_2^n$.

Используя лемму 9, построим абсолютную формулу Φ с p , $2^n \leq p < 2^n + k_B$, входами, для которой $D(\Phi) \leq \tau_B' n + O(1)$. Пусть Φ реализует ФАЛ ϕ . По лемме 8 найдём для ФАЛ ϕ и тривиального разбиения Δ множества E_2^n ФАЛ $g_i(\tilde{x}^n, u_i)$, $1 \leq i \leq p$,

$$g_i(\tilde{x}^n, u_i) = g_{i,\sigma_i}(\tilde{x}^n) \cdot u_i^{\sigma_i} \vee g_{i,\bar{\sigma}_i}(\tilde{x}^n), \quad (13)$$

такие что справедливо разложение (9) и что для любого $\sigma \in E_2$ выполняется неравенство $\text{alt}(g_{i,\sigma}) \leq k_B \cdot \delta(\Phi)$. Заметим, что $\delta(\Phi) = O(d(\Phi))$ и что $d(\Phi) = D(\Phi)$, поэтому $\text{alt}(g_{i,\sigma}) = O(n)$. Используя лемму 7, для каждого указанного выше i и σ построим формулу $G_{i,\sigma}$, реализующую ФАЛ $g_{i,\sigma}$, и такую что $\delta(G_{i,\sigma}) = O(\log n)$. По замечанию к лемме 7 кратность любого входа формулы $G_{i,\sigma}$ является для некоторой константы a_3 величиной $O(n^{a_3})$. Реализуем ФАЛ g_i по разложению (13) формулой G_i , являющейся соответствующей суперпозицией формул $\Sigma_{\&}$, Σ_{\vee} , Σ_{\neg} , $G_{i,0}$, $G_{i,1}$. Формулы G_i объединим в одну схему Σ' , содержащую p выходов. Учитывая вышесказанное каждый вход схемы Σ' имеет кратность равную $O(2^n \cdot n^{a_3})$. Получим теперь схему $\hat{\Sigma}$ как суперпозицию $\Sigma'(\Sigma'')$, в которой однородная схема Σ'' , $D(\Sigma'') = \tau_B'' n + O(\log n)$, представляет собой объединение n однородных усилителей, построенных по лемме 10 и разветвляющих входы x_1, \dots, x_n в необходимом для схемы Σ' количестве. Для $\hat{\Sigma}$ выполняется соотношение $D(\hat{\Sigma}) \leq \tau_B'' n + O(\log n)$. Усилительная СФЭ Σ получается суперпозицией $\Phi(\hat{\Sigma})$ в соответствии с разложением (9) и упрощением после подстановки констант на место входов подсхем $\Sigma_{\&}$, Σ_{\vee} в соответствии с (12). Для D -глубины УСФЭ Σ справедливо соотношение (6). \square

Литература

1. Данилов Б. Р. Асимптотическое оценки функции Шеннона в одной модели глубины схем из функциональных элементов с емкостными параметрами выходов элементов // Труды X международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г.). — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 112–113.
2. Данилов Б. Р. О поведении функции Шеннона для задержки схем в модели, где задержка соединений определяется типами соединяемых элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. Т. 3, № 31. С. 78–100.

3. *Лупанов О. Б.* О схемах функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. Вып. 23. М: Наука, 1970. С. 43–82.
4. *Ложкин С. А.* Основы кибернетики. — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004. 251 с.
5. *Ложкин С. А., Данилов Б. Р.* О задержке схем из функциональных элементов в модели с произвольным распределением задержек элементов базиса по входам // Прикладная математика и информатика. 2011. № 39. С. 107–129. (In English: *Lozhkin S. A., Danilov B. R.* Delay in networks of functional elements in a model with an arbitrary distribution of basis element input delays // Computational Mathematics and Modeling (Springer New York). 2012. Vol. 23, no. 4. P. 487–506).
6. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. А. Садовниченко. 4-е изд., стер. М.: Высш шк.; 2003. 384 с.