Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Действительный и комплексный анализ**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические и компьютерные методы решения задач естествознания**

**Математические методы обработки информации и принятия решений**

**Системное программирование и компьютерные науки**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре и обыкновенным дифференциальным уравнениям в объеме, соответствующем программе первого и второго годов обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. основы теории интегралов, зависящих от параметра;
2. основы теории рядов Фурье и интеграла Фурье;
3. основные свойства функций Эйлера;
4. основы теории аналитических функций комплексного переменного;
5. основные принципы конформных отображений;
6. основы операционного исчисления.

**Уметь:**

1. применять при решении задач теоретические факты комплексного анализа;
2. применять теоретические факты об интегралах, зависящих от параметра;
3. использовать функции Эйлера для решения задач;
4. исследовать разложения функций в ряды Фурье и интегралы Фурье;
5. строить и исследовать разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана.

**Владеть:**

1. методами качественного анализа интегралов, зависящих от параметра;
2. методами комплексного анализа для вычисления интегралов от аналитических функций, а также интегралов от функций действительного переменного;
3. навыками построения разложений функций в ряды Фурье.

**4.** Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 6 з.е., в том числе 144 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося,**  **часы** |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
| **Действительный анализ** |  |  |  |  |  |
| 1. Интегралы, зависящие от параметра | **48** | 18 | 18 | **36** | **12** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| 1. Ряды Фурье и интеграл Фурье | **42** | 18 | 14 | **32** | **10** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| **Комплексный анализ** |  |  |  |  |  |
| 1. Комплексные числа. Функции комплексного переменного | **16** | 6 | 6 | **12** | **4** |
| 1. Интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши | **14** | 6 | 4 | **10** | **4** |
| 1. Ряды Тейлора, ряды Лорана | **16** | 6 | 6 | **12** | **4** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: коллоквиум | **6** | 0 | 2 | **2** | **4** |
| 1. Теория вычетов | **20** | 6 | 8 | **14** | **6** |
| 1. Конформные отображения | **16** | 6 | 6 | **12** | **4** |
| 1. Преобразование Лапласа | **12** | 4 | 4 | **8** | **4** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 3 | **2** | 0 | 2 | **2** | **0** |
| Промежуточная аттестация: зачет | **2** | 0 | 0 | **0** | **2** |
| Промежуточная аттестация: устный экзамен | **18** | 0 | 0 | **0** | **18** |
| **Итого** | **216** | **72** | **72** | **144** | **72** |

**7.** Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**7.1.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

|  |
| --- |
| **Контрольная работа № 1** |
| **Вариант 1**  1. Исследовать на равномерную сходимость на области существования интегралы:  а) ; б) .  2. Исследовать интеграл  на непрерывность на области существования.  3. Вычислить интеграл .  4. Определить область существования интеграла  и вычислить этот интеграл.  **Вариант 2**  1. Найти , если .  2. Исследовать на равномерную сходимость  в случаях: a) ; б) .  3. Исследовать на непрерывность .  .  4. Вычислить . Обосновать вычисление.  5. Вычислить . |
| **Контрольная работа № 2** |
| **Вариант 1**  1. Разложить в ряд Фурье на отрезке  функцию , нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на .  2. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию ,  нарисовать график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на .  **Вариант 2**  1. Разложить функцию  по косинусам кратных дуг, нарисовать графики функции  и суммы ряда Фурье.  2. Разложить в ряд Фурье функцию , нарисовать графики функции  и суммы ряда Фурье. |
| **Контрольная работа № 3** |
| **Вариант 1**  1. Разложить функцию  в ряд Лорана по степеням  в кольце , содержащем точку . Указать границы кольца . .  2. Найти все особые точки функции  и определить их вид: .  3. Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы  а) ; б) .  4. Отобразить конформно область  на верхнюю полуплоскость.  **Вариант 2**  1. Найти множество точек , в которых функция  является дифференцируемой.  2. Разложить функцию  в ряд Тейлора с центром в точке  и указать область, где справедливо разложение.  3. Разложить функцию  в ряд Лорана в кольце .  4. Определить все особые точки функции  и классифицировать их, включая точку .  5. Вычислить интеграл .  6. Вычислить интеграл .  7. Конформно отобразить на верхнюю полуплоскость внутренность угла  с выброшенным лучом . |

**Вопросы к коллоквиуму**

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. В каждый билет входит один теоретический вопрос из списка, а также предлагается дополнительная задача. Темы коллоквиума:

**Вопросы к коллоквиуму по теме "Интегралы, зависящие от параметра"**

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (ИЗП). Случай постоянных пределов интегрирования.

2. Собственные ИЗП. Случай переменных пределов интегрирования.

3. Равномерная сходимость несобственных ИЗП. Примеры. Критерий Коши.

4. Признаки равномерной сходимости несобственных ИЗП (Вейерштрасса, Дирихле-Абеля, Дини).

5. Непрерывность и интегрируемость несобственных ИЗП на отрезке.

6. Дифференцируемость несобственных ИЗП.

7. Интегрируемость несобственных ИЗП на полупрямой.

8. Вычисление интеграла Дирихле.

9. Свойства Г-функции Эйлера.

10. Свойства В-функции Эйлера. Связь между эйлеровыми интегралами.

11. Вывод асимптотической формулы для интеграла .

12. Асимптотическая формула для функции . Формула Стирлинга.

**Задачи для коллоквиума**

1. Пусть . Доказать, что

.

2. Доказать, что  сходится неравномерно по , но замена  превращает его в равномерно сходящийся интеграл.

3. Задана функция 

Показать, что функция  определена и непрерывна на , функция  интегрируема на  для любого , но .

4. Пусть функция  непрерывна на  и интеграл  сходится равномерно на . Доказать, что этот интеграл сходится

равномерно на .

5. Задана функция  Показать, что интеграл  сходится равномерно на , а интеграл  сходится неравномерно на .

6. Задана функция  Показать, что при любом  функция  монотонна на  и ,

но интеграл  сходится неравномерно на . Какое условие признака Дирихле нарушено?

7. Пусть интеграл  сходится равномерно на множестве  и для любого  функция  монотонна на  и стремится к нулю при . Доказать, что  при  сходится к нулю равномерно на .

8. Доказать, что интеграл сходится неравномерно на , а ряд  сходится равномерно на .

**7.2.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

|  |
| --- |
| **Работа для проведения зачетной комиссии** |
| 1. Разложить функцию  в тригонометрический ряд Фурье в интервале . К чему сходится полученное выражение в точке ?  2. Обосновать возможность дифференцирования под знаком интеграла и вычислить интеграл: .  3. Исследовать на равномерную сходимость на множестве: .  4. Разложить в ряд Лорана на указанном множестве .  5. Применить методы ТФКП для вычисления интеграла, обосновать применимость метода: .  6. Отобразить конформно сектор  на . |

**Вопросы к экзамену**

Экзамен сдается в устной форме. В экзаменационном билете – два вопроса из приведенного ниже списка (по одному из каждого раздела).

**Действительный анализ**

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (ИЗП).

2. Признаки равномерной сходимости несобственных ИЗП (Вейерштрасса, Дирихле-Абеля, Дини).

3. Непрерывность и интегрируемость несобственных ИЗП на отрезке.

4. Дифференцируемость несобственных ИЗП.

5. Интегрируемость несобственных ИЗП на полупрямой.

6. Вычисление интеграла Дирихле.

7. Свойства Г-функции Эйлера.

8. Свойства В-функции Эйлера. Связь между эйлеровыми интегралами.

9. Асимптотическая формула для функции . Формула Стирлинга.

10. Ортонормированные системы. Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства.

11. Замкнутость и полнота ортонормированных систем.

12. Теорема Фейера.

13. Замкнутость тригонометрической системы. Следствия из замкнутости.

14. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции.

15. Локальная теорема Фейера.

16. Простейшие условия равномерной сходимости и почленной дифференцируемости рядов Фурье.

17. Уточнённые условия равномерной сходимости ряда Фурье.

18. Условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Сходимость ряда Фурье кусочно-гельдеровой функции.

19. Принцип локализации Римана.

20. Свойства преобразования Фурье.

21. Условия разложимости функции в интеграл Фурье.

**Комплексный анализ**

1. Стереографическая проекция.

2. Функции комплексного переменного. Предел. Непрерывность.

3. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Аналитичность.

4. Теорема Коши и её обобщение.

5. Интегральная формула Коши.

6. Принцип максимума модуля аналитической функции.

7. Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума.

8. Разложение гармонических функций в ряды. Ряд Фурье для гармонической функции.

9. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Теорема Лиувилля.

10. Неопределённый интеграл. Теорема Морера.

11. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций.

12. Аналитичность суммы степенного ряда. Теорема Тейлора.

13. Теорема единственности аналитических функций. Нули аналитической функции.

14. Ряды Лорана. Теорема Лорана.

15. Классификация изолированных особых точек. Устранимая особая точка. Полюс.

16. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.

17. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Основная теорема о вычетах.

18. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.

19. Логарифмический вычет. Теорема Руше. Принцип аргумента.

20. Аналитическое продолжение с вещественной оси. Элементарные функции.

21. Аналитическое продолжение с помощью рядов и через границу. Принцип непрерывности.

22. Аналитическое продолжение Гамма-функции Эйлера. Формула дополнения.

23. Основные принципы конформных отображений: принцип соответствия границ и принцип симметрии Римана-Шварца.

24. Свойство аналитической однолистной функции в области.

25. Локальное свойство однолистной функции. Отображение области на область при конформном отображении.

26. Дробно-линейная функция и её свойства.

27. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями.

28. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Случай круга и верхней полуплоскости.

29. Следствие из решения задачи Дирихле для круга. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами.

30. Функция Грина (функция источника).

31. Преобразование Лапласа и его основные свойства.

32. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с помощью преобразования Лапласа.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Коллоквиум,*  *Экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *Контрольная работа, зачет* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципи-ального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки  (владения, опыт деятельности)**  *Экзамен* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

|  |  |
| --- | --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**   1. основы теории интегралов, зависящих от параметра; 2. основы теории рядов Фурье и интеграла Фурье; 3. основные свойства функций Эйлера; 4. основы теории аналитических функций комплексного переменного; 5. основные принципы конформных отображений; 6. основы операционного исчисления.   **Уметь:**   1. использовать функции Эйлера для решения задач; 2. исследовать разложения функций в ряды Фурье и интегралы Фурье; 3. строить и исследовать разложения аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана. | ОПК-1.Б |
| **Уметь:**   1. применять при решении задач теоретические факты комплексного анализа; 2. применять теоретические факты об интегралах, зависящих от параметра.   **Владеть:**   1. методами комплексного анализа для вычисления интегралов от аналитических функций, а также интегралов от функций действительного переменного. | ОПК-2.Б |
| **Владеть:**   1. методами качественного анализа интегралов, зависящих от параметра; 2. навыками построения разложений функций в ряды Фурье. | ПК-2.Б |

**8.** Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Часть 2. М.: «Проспект», изд-во МГУ. 2004.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М.: Физматлит, 2014.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука. 1990; М.: АСТ, Астрель. 2004.
4. Леонтьева Т.А. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Научный мир. 2004.
5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Физматлит. 2004.
6. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. М.: Мир. 2005.

Дополнительная литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2. М.: Высшая школа. 1988, М.: Дрофа. 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. 2. М.: Наука. 1991.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, ч. 2. М.: МГУ. 1991, М.: Дрофа. 2001.
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). М.: Факториал, 1996.
5. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу, т. 2. М.: Наука. 1986. Т. 3. М.: Физматлит. 1995.
6. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967, М.: URSS. 2007.
7. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука. 1984.
8. Волковыский Л.И., Лунц Г.И., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1975 и последующие издания.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1987, М.: Лань. 2002.
10. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1989.
11. Сборник задач по теории аналитических функций (под ред. Евграфова М.А.). М.: Наука. 1974.
12. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 1, 2. М.: Наука. 1967, 1968.
13. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука. 1984, М.: Высшая школа. 1999.

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

**9.** Язык преподавания - русский.

**10.** Преподаватели:

профессора факультета ВМК МГУ И.С.Ломов, С.Д.Икрамов, Н.Ю.Капустин, В.Н.Денисов, Н.В.Соснин,

доценты факультета ВМК МГУ Т.А.Леонтьева, А.В.Домрина, Л.В.Крицков, Д.Ю.Сычугов, С.А.Волошин, Е.А.Григорьев, М.В.Абакумов, Э.А.Шагиров, Е.Ю.Ечкина, Е.Н. Хайлов,

ассистенты факультета ВМК МГУ А.И.Аристов, А.Ю.Мокин.

**11.** Авторы программы:

профессор факультета ВМК МГУ И.С.Ломов, доценты факультета ВМК МГУ Т.А.Леонтьева, А.В.Домрина.