В.И. Дмитриев

О ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

При математическом моделировании электромагнитных полей в неоднородных средах активно используется метод интегральных уравнений. При редукции краевых задач электродинамики к интегральным уравнениям необходимо вычислять вторые производные от объемного потенциала, что приводит к появлению сингулярных интегралов. Обычно имеющаяся особенность в интеграле выделяется по шару малого радиуса с центром в точке особенности [1]. Однако такое выделение с вычислительной точки зрения неудобно, т.к. область интегрирования при численном решении интегрального уравнения разбивается на подобласти в виде параллелепипедов. Ясно, что в этом случае необходимо вносить поправку в определение главного значения интеграла. Покажем, как изменяется главное значение второй производной объемного потенциала при выделении особенности по параллелепипеду.

Рассмотрим объемный потенциал

$$u(M)=\int\limits_V \frac{\rho(M_0)}{R_{MM_0}}dv_{M_0}, \tag{1}$$

где $R_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Хорошо известно [1], что вторая производная объемного потенциала по какой-либо декартовой координате является несобственным интегралом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int\limits_V \rho(M_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dv_{M_0}, \tag{2}$$

который имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=v.p.\int\limits_V \rho(M_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dv_{M_0}-\frac{4\pi}{3}\rho(M). \tag{3}$$

При этом интеграл в (3) понимается как предельное значение

$$v.p.\int_V \rho(M_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dv_{M_0} = \lim_{\delta\to 0}\int_{V/V_\delta} \rho(M_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dv_{M_0}, \qquad (4)$$

где V/V_δ – объем V за исключением шара радиуса δ с центром в точке M. Из (3) получаем, что объемный потенциал внутри V является решением уравнения Пуассона

$$\Delta u(M) = -4\pi\rho(M). \qquad (5)$$

Использование представления (4) при вычислениях вторых производных объемного потенциала неудобно, т.к. при вычислении интеграла, как правило, область V разбивается на подобласти в виде параллелепипедов. Возникает вопрос о возможности получить формулу (3) при выделении особенности по параллелепипеду, т.е. в (4) считать, что V_δ – параллелепипед со сторонами $h_x = \alpha_x\delta,\ h_y = \alpha_y\delta,\ h_z = \alpha_z\delta.$ Для этого рассмотрим интеграл

$$I_x = \int_{V_\delta} \rho(M_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dv_{M_0}.$$

Если $\rho(M_0)$ – непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция, то

$$I_x^0 = \lim_{\delta\to 0} I_x = \rho(M)\lim_{\delta\to 0}\int_{V_\delta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dv_{M_0} =$$

$$= \rho(M)\lim_{\delta\to 0}\int_{-h_z/2}^{h_z/2} dz \int_{-h_y/2}^{h_y/2} dy \int_{-h_x/2}^{h_x/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dx.$$

Интеграл берется аналитически, и мы получаем

$$I_x^0 = \lim_{\delta\to 0} I_x = -8\lim_{\delta\to 0} arctg\frac{h_y h_z}{h_x\sqrt{h_x^2+h_y^2+h_z^2}} = -8 arctg\frac{\alpha_y\alpha_z}{\alpha_x H}, \qquad (6)$$

где $H = \sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2}$.

Аналогично имеем

$$I_y^0 = \lim_{\delta\to 0} I_y = -8 arctg\frac{\alpha_x\alpha_z}{\alpha_y H};\ I_z^0 = \lim_{\delta\to 0} I_z = -8 arctg\frac{\alpha_x\alpha_y}{\alpha_z H}. \qquad (7)$$

Заметим, что при $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$ (подобласти V_δ – кубы) имеем

$$I_x^0 = I_y^0 = I_z^0 = -8 arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{4\pi}{3},$$

т.е. мы получаем тот же результат, что и при выделении особенности по шару. В общем случае формула (3) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = v.p.\int_V \rho(M_0)\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)dv_{M_0} - I_\beta^0,\ \beta = (x, y, z). \tag{8}$$

Например, при $h_x = h_y = \delta,\ h_z = 2\delta$ имеем

$$I_x^0 = I_y^0 = -8 arctg \frac{2}{\sqrt{6}} \approx -1{,}74\pi;\ I_z^0 = -8 arctg \frac{1}{2\sqrt{6}} \approx -0{,}52\pi.$$

Легко показать, что $I_x^0 + I_y^0 + I_z^0 = -4\pi.$ Так как имеет место тригонометрическая формула

$$arctg a + arctg b + arctg c = arctg \frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc},$$

то получаем

$$arctg \frac{\alpha_y \alpha_z}{\alpha_x H} + arctg \frac{\alpha_x \alpha_z}{\alpha_y H} + arctg \frac{\alpha_x \alpha_y}{\alpha_z H} =$$

$$= arctg \frac{\dfrac{\alpha_x \alpha_y \alpha_z}{H}\left(\dfrac{1}{\alpha_x^2} + \dfrac{1}{\alpha_y^2} + \dfrac{1}{\alpha_z^2} - \dfrac{1}{H^2}\right)}{1 - \dfrac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}{H^2}} = arctg \infty = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$I_x^0 + I_y^0 + I_z^0 = -8\frac{\pi}{2} = -4\pi.$$

Таким образом, вне зависимости от способа выделения особенности объемный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона (5). Следовательно, интегральное представление решения уравнения Лапласа (третья формула Грина) в однородном пространстве имеет один и тот же вид при разных способах выделения особенности, а именно:

$$u(M) = -\int_V G_0(M, M_0)\Delta u(M_0)dv_{M_0}, \tag{10}$$

где

$$G_0(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}}.$$

Естественно, полученный результат переносится на уравнение Гельмгольца

$$L(u) = \Delta u + k_0^2 u = -f(M), \qquad (11)$$

и формула (10) принимает вид:

$$u(M) = -\int\limits_V G(M, M_0) L(u(M_0)) dv_{M_0}, \qquad (12)$$

где

$$G(M, M_0) = \frac{e^{ik_0 R_{MM_0}}}{4\pi R_{MM_0}}.$$

Представление (12) позволяет получить интегральное уравнение для уравнения Гельмгольца с переменным волновым коэффициентом

$$k^2(M) = \begin{cases} k_0^2 = const & \text{при} \quad \mathrm{M} \notin \mathrm{V} \\ k_1^2 & \text{при} \quad \mathrm{M} \in \mathrm{V}. \end{cases} \qquad (13)$$

Для этого запишем уравнение (11) при $k^2(M)$ в виде:

$$\Delta u + k_0^2 u = -f(M) + \left(k_0^2 - k(M)\right) u(M).$$

Тогда, согласно (12), получим интегральное уравнение

$$u(M) + \int\limits_V \left(k_0^2 - k(M_0)\right) G(M, M_0) u(M_0) dv_{M_0} = u_0(M), \qquad (14)$$

где

$$u_0(M) = \int\limits_V G(M, M_0) f(M_0) dv_{M_0}. \qquad (15)$$

Как было показано выше, при решении интегрального уравнения (14) мы имеем право разбивать область V на подобласти ΔV_i в виде параллелепипеда, и только при вычислении вторых производных от потенциала

$$u(M) = \int\limits_V u(M_0) G(M, M_0) dv_{M_0}$$

необходимо учитывать вид разбиения.

Однако при решении векторных задач электродинамики ситуация меняется. Рассмотрим решение уравнений Максвелла в неоднородной среде:

$$rot\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon(M)\mathbf{E} + \mathbf{j}; \; rot\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}. \qquad (16)$$

Эта система легко сводится к уравнению для электрического поля

$$rot rot\mathbf{E} = k^2(M)\mathbf{E} + i\omega\mu_0\mathbf{j}, \tag{17}$$

где $k^2(M) = \omega^2\mu_0\varepsilon(M)$, ω – частота поля, μ_0 – магнитная проницаемость, $\varepsilon(M)$ – диэлектрическая проницаемость (в общем случае комплексная), $\mathbf{j}$ – электрический ток, возбуждающий поля. При этом магнитное поле определяется через электрическое:

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu_0} rot\mathbf{E}. \tag{18}$$

Теперь интегральное представление необходимо получить для оператора $k^2\mathbf{E} - rot rot\mathbf{E} = \mathbf{B}(\mathbf{E})$. Для этого оператора в безграничном однородном пространстве для векторных функций, удовлетворяющих условию излучения на бесконечности, известен векторный аналог второй формулы Грина:

$$\int\limits_V \left(\mathbf{E}(M_0) rot rot\mathbf{Q}(M_0) - \mathbf{Q}(M_0) rot rot\mathbf{E}(M_0)\right) dv_{M_0} = 0. \tag{19}$$

Выражение (19) можно записать для оператора $\mathbf{B}$, а в качестве функции $\mathbf{Q}(M)$ можно использовать тензорную функцию фундаментальных решений векторного уравнения Гельмгольца $\hat{\mathbf{G}}(M, M_0)$. Тогда вместо (19) имеем

$$\int\limits_V \left(k^2\hat{\mathbf{G}} - rot rot\hat{\mathbf{G}}(M, M_0)\right)\mathbf{E}(M_0) dv_{M_0} =$$

$$= \int\limits_V \hat{\mathbf{G}}(M, M_0)\left(k^2\mathbf{E} - rot rot\mathbf{E}(M_0)\right) dv_{M_0}, \tag{20}$$

где

$$\hat{\mathbf{G}}(M, M_0) = G(M, M_0)\hat{\mathbf{I}} = \frac{e^{ikR_{MM_0}}}{4\pi R_{MM_0}}\hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интеграл в левой части (20) является несобственным и понимается в предельном смысле.

$$\int\limits_V \left(k^2\hat{\mathbf{G}} - rot rot\hat{\mathbf{G}}\right)\mathbf{E} dv_{M_0} = v.p.\int\limits_V \left(k^2\hat{\mathbf{G}} - rot rot\hat{\mathbf{G}}\right)\mathbf{E} dv_{M_0} +$$

$$+ \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{V_\delta} \left(k^2\hat{\mathbf{G}} - rot rot\hat{\mathbf{G}}\right)\mathbf{E} dv_{M_0},$$

где V_δ – область выделения особенности с центром в точке M . Т.к. $\hat{\mathbf{G}}$ при выделении особенности удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{B}(\hat{\mathbf{G}}) = k^2\hat{\mathbf{G}}(M, M_0) - rotrot\,\hat{\mathbf{G}}(M, M_0) = 0,$$

а электрическое поле является, согласно (17), решением уравнения

$$k^2\mathbf{E}(M) - rotrot\,\mathbf{E}(M) = -i\omega\mu_0\mathbf{j}(M),$$

то выражение (20) записывается в виде:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{V_\delta}\left(k^2\hat{\mathbf{G}}(M, M_0) - rotrot\,\hat{\mathbf{G}}(M, M_0)\right)\mathbf{E}(M_0)dv_{M_0} =$$

$$= -i\omega\mu_0\int_V \hat{\mathbf{G}}(M, M_0)\mathbf{j}(M_0)dv_{M_0}. \qquad (21)$$

Заметим, что

$$-rotrot\,\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2} & -\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y} & -\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial z} \\ -\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2} & -\dfrac{\partial^2 G}{\partial y\partial z} \\ -\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial z} & -\dfrac{\partial^2 G}{\partial y\partial z} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Смешанные вторые производные в (22) не дают вклады в (21), т.е.

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{V_\delta}\frac{\partial^2 G(M, M_0)}{\partial\alpha\partial\beta}dv_{M_0} = 0,\ \alpha\neq\beta,\ \alpha = (x, y, z),\ \beta = (x, y, z).$$

Диагональные члены в (22) дают в (21) конечные пределы, которые, согласно (8), равны

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{V_\delta}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial\beta^2}\right)dv_{M_0} = -\frac{I_\alpha^0 + I_\beta^0}{4\pi}. \qquad (23)$$

В результате из (21) получаем интегральное представление

$$\hat{\mathbf{g}}\mathbf{E}(M) = i\omega\mu_0\int_V \hat{\mathbf{G}}(M, M_0)\mathbf{j}(M_0)dv_{M_0}, \qquad (24)$$

где

$$\hat{\mathbf{g}} = -\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} I_y^0 + I_z^0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x^0 + I_z^0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x^0 + I_y^0 \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Если особенность выделяется по шару или кубу, то, согласно (3), получаем

$$\hat{\mathbf{g}} = -\frac{2}{3}\hat{\mathbf{I}}. \qquad (26)$$

Заметим, что полученный результат для оператора $k^2\mathbf{E} - rotrot\mathbf{E} = \mathbf{B}(\mathbf{E})$ отличается от интегрального представления для оператора Гельмгольца $\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = \mathbf{L}(\mathbf{A})$, где $\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{I}}$.

Если же мы проведем выделение особенности по параллелепипеду, то интегральное представление (24-25) существенно изменится. Используя представление (6-7), найдем

$$g_{xx} = \frac{1}{4\pi}\left(I_y^0 + I_z^0\right) = -\frac{2}{\pi}\left(arctg\frac{\alpha_x\alpha_z}{\alpha_y H} + arctg\frac{\alpha_x\alpha_y}{\alpha_z H}\right) = -\frac{2}{\pi}arctg\frac{\alpha_x H}{\alpha_y\alpha_z}. \qquad (27)$$

Аналогично,

$$g_{yy} = -\frac{2}{\pi}arctg\frac{\alpha_y H}{\alpha_x\alpha_z}; \quad g_{zz} = -\frac{2}{\pi}arctg\frac{\alpha_z H}{\alpha_x\alpha_y}. \qquad (28)$$

Если выделение особенности проводилось по шару или кубу, то, как было показано выше (26), мы имеем

$$g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = -\frac{2}{3}.$$

Если выделение особенности по параллелепипеду $\alpha_x = \alpha_y = 1,\ \alpha_z = 2$, то получим $g_{xx} = g_{yy} = -0{,}564;\ g_{zz} = -0{,}872$.

Таким образом, показано, что при переходе от интегрального уравнения к алгебраическому необходимо учитывать, по какой области выделяется особенность второй производной объемного потенциала. Полученный результат легко переносится на двумерный случай, когда особенность выделяется по прямоугольнику.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Изд-во МГУ, 1999. 798 с.