

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ*

При исследовании строения земных недр используется метод гравиразведки, в котором по измеренной на земной поверхности ($z=0$) вертикальной составляющей напряженности гравитационного поля $\delta g_z(x, y)$ определяют распределение аномальной плотности среды $\delta\rho(x, y, z)$ при $z < 0$.

Гравитационный потенциал $U(x, y, z)$ является решением уравнения Пуассона:

$$\Delta U(M) = -4\pi\delta\rho(M), \quad (1)$$

где $\delta\rho(M) = \rho(M) - \rho_N(M)$ – изменение плотности среды относительно нормальной плотности среды $\rho_N(M)$, потенциал $U(M)$ – регулярен на бесконечности. Решением задачи (1) является ньютоновский потенциал

$$U(M) = \int \frac{\delta\rho(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}. \quad (2)$$

В гравиразведке измеряется вертикальная составляющая напряженности гравитационного поля

$$\delta g_z(M) = \frac{\partial U}{\partial z} = \int \frac{\delta\rho(x_0, y_0, z_0)(z_0 - z) dx_0 dy_0 dz_0}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}}. \quad (3)$$

В двумерном случае ($\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$) выражение (3) приобретает вид:

$$\delta g_z(y, z) = 2 \int_s \frac{\delta\rho(y_0, z_0)(z_0 - z) dy_0 dz_0}{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}. \quad (4)$$

Вертикальную составляющую гравитационного поля, также как и потенциал, можно пересчитывать с одного уровня на другой. В

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 08-01-00189-а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы.

предположении, что в слое $z \in [0, -h]$ нет источников поля, можно связать поле при $z = 0$ с полем при $z = -h$:

$$\frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x_0, y_0) dx_0 dy_0}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + h^2\right)^{3/2}} = u_0(x, y), \quad (5)$$

где $u_0(x, y) = \delta g_z(x, y, z = 0)$, $v(x, y) = \delta g_z(x, y, z = h)$.

В двумерном случае, когда поле не зависит от координаты x , выражение (5) принимает вид:

$$\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(y_0) dy_0}{(y - y_0)^2 + h^2} = u_0(y). \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) можно рассматривать как интегральные уравнения Фредгольма первого рода для определения $\delta g_z = v(x, y)$ на глубине $z = -h$ по измеренному полю $\delta g_z = u_0(x, y)$ на земной поверхности при $z = 0$. Это классическая трансформация гравитационного поля путем пересчета поля вниз в сторону источников. Такой подход активно используется в гравиразведке, так как позволяет более четко выделить местоположение тела с аномальной плотностью. Решение интегрального уравнения первого рода является некорректной задачей, и для устойчивого определения потенциала на глубине необходимо применять метод регуляризации [1]. В работе [2] рассмотрено получение решения при применении метода регуляризации. Однако можно построить итерационный метод решения интегральных уравнений (5) и (6) без использования регуляризации в явном виде. На самом деле в алгоритме неявно используется ограничение на норму производной потенциала. В результате получается наиболее плавное распределение потенциала на глубине.

Рассмотрим построение итерационного процесса определения потенциала на глубине на примере двумерного случая описываемого уравнением (6). Для этого перепишем уравнение (6) в виде:

$$v(y) + \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(y_0) - v(y)}{(y - y_0)^2 + h^2} dy_0 = u_0(y).$$

Определим итерационный процесс, определяя $v(y)$ в следующем виде:

$$v_n(y) = u_0(y) - \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{n-1}(y_0) - v_{n-1}(y)}{(y - y_0)^2 + h^2} dy_0, \quad n \in [1, \infty) \quad (7)$$

при $v_0(y) \equiv 0$. Выражение (7) можно, окончательно, записать в виде:

$$v_n(y) = u_0(y) + v_{n-1}(y) - \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{n-1}(y_0)}{(y - y_0)^2 + h^2} dy_0. \quad (8)$$

Заметим, что, согласно (8), из сходимости последовательности $\{v_n\}$ к некоторому $v(y)$ следует, что $v(y)$ является решением уравнения (6). Поэтому при численной реализации итерационного процесса (8) остановка проводится при совпадении итераций:

$$\|v_n(y) - v_{n-1}(y)\| \leq \varepsilon \quad \text{при } n \geq N. \quad (9)$$

Рассмотрим пример использования итерационного метода (8) при аналитическом продолжении гравитационного поля в сторону источника. Пусть имеется тело в виде бесконечного цилиндра квадратного сечения со стороной a , который находится на глубине H , т.е. сечение S определено в виде:

$$S: \left\{ -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}; -H - a \leq z \leq -H \right\}. \quad (10)$$

Гравитационное поле такого тела при $\delta\rho = const$ вычисляется аналитически в виде:

$$\begin{aligned} \delta g_z(y, z) = \delta\rho \left(\Phi\left(\frac{a}{2} - y, H + z\right) - \Phi\left(-\frac{a}{2} - y, H + z\right) - \right. \\ \left. - \Phi\left(\frac{a}{2} - y, H + a + z\right) + \Phi\left(-\frac{a}{2} - y, H + a + z\right) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\Phi(t, \alpha) = t \ln(t^2 + \alpha^2) - 2t + 2\alpha \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha}. \quad (12)$$

По формуле (11) было рассчитано поле при $z = 0$ и на глубинах 200 и 400 метров. Затем с помощью итерационного метода (8) поле с земной поверхности ($z = 0$) было продолжено на различные глубины. Результаты расчетов приведены на рис.1 и рис.2, где по оси абсцисс отложено расстояние, измеренное в сотнях метров, а по оси ординат – гравитационное поле при $\delta\rho = 1$. На рисунках сплошной кривой приведено точное поле, а пунктирной кривой продолженное поле.

Легко видеть, что при продолжении поля на $h = 200$ м. (рис.1) хорошее приближение получается уже на десятой итерации. При

продолжении поля на $h = 400$ м для хорошего приближения требуется уже 25 итераций (рис.2). Причем, если на глубине 200 м продолженное поле практически совпадает с точным, то на глубине 400 м продолженное поле по сравнению с точным становится более плавным, а аномалия поля расширяется.

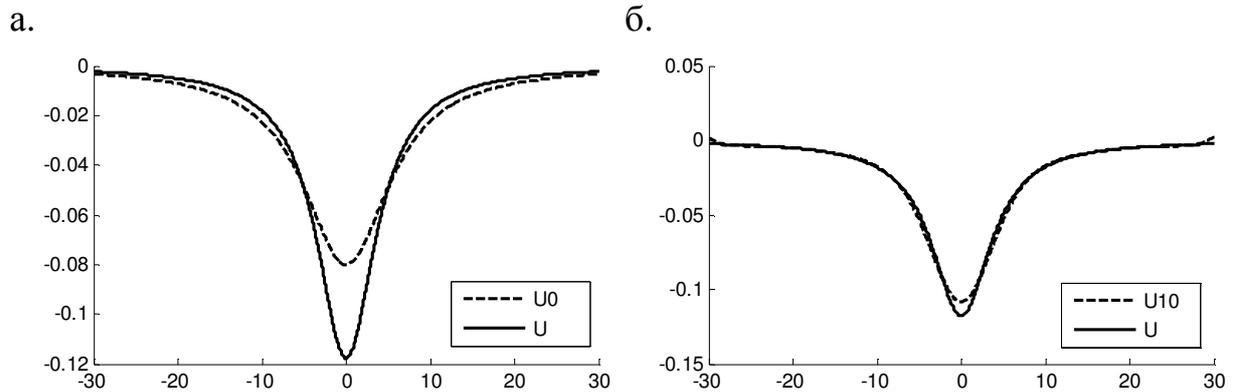


рис. 1

Продолжение поля на глубину 200 м. Сплошная кривая – точное значение, пунктирная – приближенное решение при одной итерации (рис. 1а) и десяти итерациях (рис. 1б).

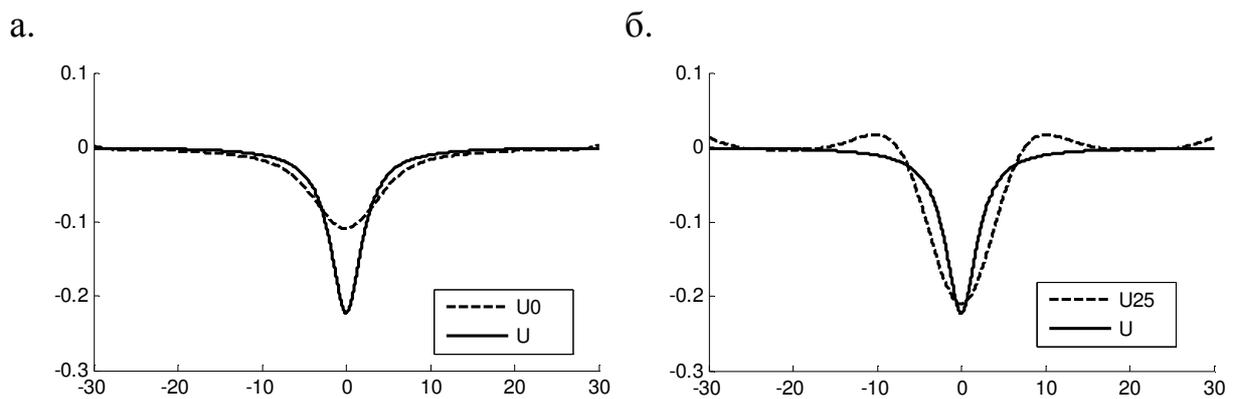


рис. 2

Продолжение на глубину 400 м. Рис. 2а – одна итерация, рис. 2б – 25 итераций, сплошная кривая – точное решение.

Заметим, что предложенный итерационный метод позволяет продолжать гравитационное поле и ниже источника. При этом, естественно, получается не поле источника, а некоторое фиктивное поле, которое при продолжении вверх даёт заданное поле при $z = 0$. Результаты такого продолжения приведены на рис.3.

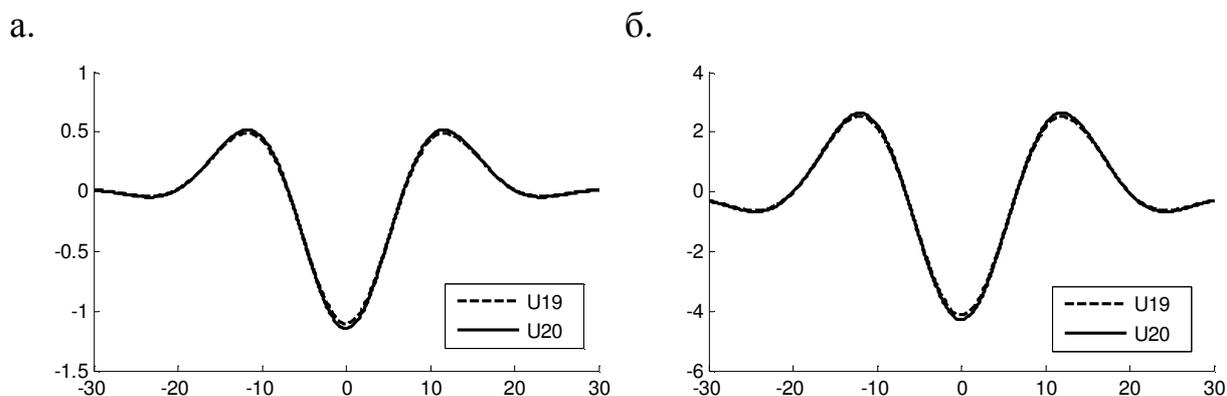


рис. 3

Продолжение поля ниже тела: на глубину 800 м (а), на глубину 1000 м (б).
Приведены кривые при 19 и 20 итерациях.

Отметим, что при продолжении поля ниже источника характер поля существенно изменяется. Кроме минимума возникают два боковых максимума (рис.3). Как видно из рис.3 девятнадцатая и двадцатая итерации практически совпадают, что является признаком для остановки итерационного процесса. Одновременно при продолжении ниже источника резко возрастают максимумы и минимумы при практически неизменном расстоянии между максимумами, что также может служить признаком перехода на глубины ниже источника. Таким образом при аналитическом продолжении поля можно оценить глубину залегания искомой неоднородности плотности.

Рассмотрим теперь продолжение поля от двух неоднородностей, расположенных на глубине 600 метров на расстоянии друг друга в 100 метров. Тела, как и в предыдущем примере, являются цилиндрами с квадратным сечением 50 м на 50 м и аномальной плотностью $\delta\rho = 1$. На рис.4 приведены результаты продолжения поля на 200 м и 400 м. Сплошные кривые – точные значения поля, а пунктирные – полученные с помощью итерационного метода. На рис.3а кроме того приведено в виде штрихпунктирной кривой значение поля на земной поверхности.

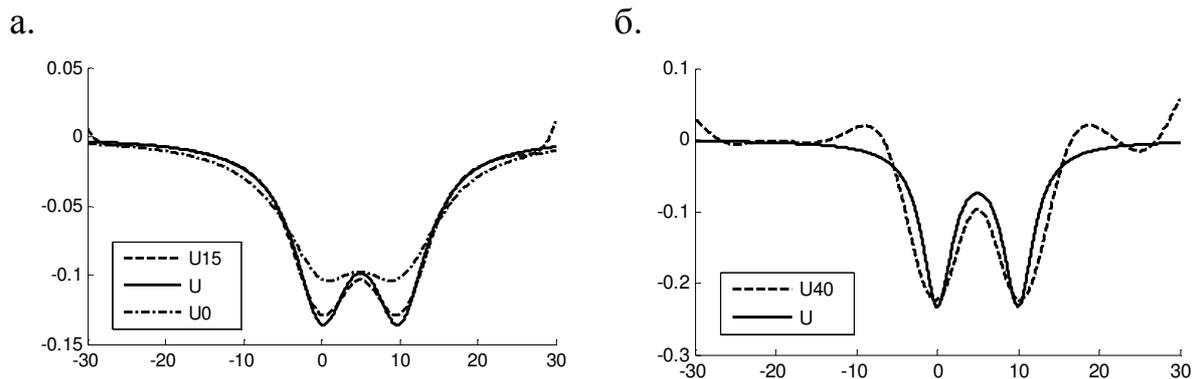


рис. 4

Продолжение поля для двух тел на глубину: а. – 200 м, б. – 400 м.

Из рис.4а легко видеть, что поле на земной поверхности слабо разделяет два тела, но уже на 15-ой итерации при продолжении поля на глубину 200 м получается поле, практически совпадающее с точным полем, причем тела четко разделяются. При продолжении на глубину 400 м разделение поля на две аномалии происходит еще более резко, хотя продолженное поле несколько отличается от истинного, несмотря на то, что было сделано 40 итераций.

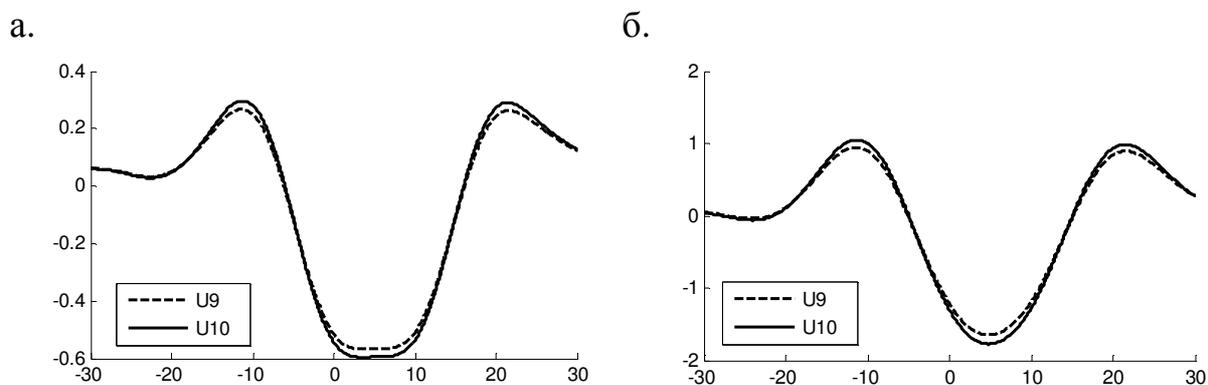


рис. 5

Продолжение поля от двух тел ниже источника на глубину: 800 м (рис.5а) и 1000 м (рис.5б).

На рис.5 приведены поля, продолженные ниже источника, соответственно, на глубины 800 м и 1000 м. Приведены для сравнения 9 -я и 10-я итерации. Легко видеть, что итерации хорошо сходятся и мы

получаем некоторые фиктивные поля, которые порождают на земной поверхности заданное поле. Отметим, что при этом нет разделения поля на две аномалии, а получается одна, но очень широкая аномалия.

Приведенные примеры показывают эффективность предложенного итерационного метода продолжения гравитационного поля. Отметим, что также хорошо проходит продолжение поля в трехмерном случае.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1974, 222 с.
2. Гласко В.Б., Мудрецова Е.А., Страхов В.Н. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии //В кн. Некорректные задачи естествознания.-М. Изд-во Моск. ун-та, 1987.-299 с.