

*В.И.Дмитриев, И.С. Барашков*

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОБИЛЬНЫХ МОРСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОН- ДИРОВАНИЙ\***

#### ***Введение.***

Методы электромагнитных зондирований активно используются при исследовании строения шельфа и обнаружении месторождений углеводородов в шельфовой зоне [1] - [3]. Морские электромагнитные зондирования осуществляются в трёх вариантах:

- зондирование удалённым источником;
- зондирование с донными станциями;
- мобильное зондирование.

В первом случае мощный источник поля находится на суше недалеко от берега. Поле измеряется с движущегося объекта вдали от берега, где поля выходят на асимптотику и по измерениям горизонтальных составляющих электромагнитного поля можно определить импеданс среды. Этот подход близок к магнитотеллурическому зондированию. Основное ограничение связано с мощностью источника, которая должна гарантировать измерение поля на больших расстояниях от источника.

Во втором методе источник поля находится на движущемся объекте, который буксируется кораблём, а измерения проводятся на морском дне с помощью всплываемых донных станций. Основное ограничение связано с потерями времени на ожидание всплытия донных станций, что существенно повышает стоимость работ.

В мобильном методе и источник, и приёмник поля находятся на буксируемых объектах. Это позволяет непрерывно вести зондирование объектов под морским дном. При этом движущийся источник и приёмник могут находиться вблизи морского дна, что повышает чувствительность метода к изменениям под морским дном. В настоящей статье на основе математического моделирования исследуются различные варианты метода мобильных морских зондирований с целью обнаружения месторождений углеводородов.

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект № 13-05-12018 офи-м “Разработка и реализация устойчивых методов интерпретации данных при изучении параметров литосферы методами электромагнитного зондирования”.

### 1. Постановка задачи.

Будем исследовать электромагнитное поле в типовой проводящей среде, в которой локальная неоднородность  $V$  с электропроводностью  $\sigma_H(x, y, z)$  находится в двухслойном полупространстве с электропроводностью

$$\sigma_c(z) = \begin{cases} \sigma_0 \approx 0 & \text{при } z \in (-\infty, 0) \text{ (атмосфера),} \\ \sigma_1 = \text{const} & \text{при } z \in (0, h_1) \text{ (море),} \\ \sigma_2 = \text{const} & \text{при } z \in (h_1, \infty) \text{ (морские отложения).} \end{cases} \quad (1)$$

Неоднородность находится в нижнем полупространстве ( $z > h_1$ ), т.е. при  $z > 0$  электропроводность распределена следующим образом:

$$\sigma(x, y, z) = \begin{cases} \sigma_c(z) & M(x, y, z) \notin V, \\ \sigma_H(x, y, z) & M(x, y, z) \in V. \end{cases} \quad (2)$$

Электромагнитное поле в частотной области удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{j}; \quad \text{rot} \vec{E} = i\omega\mu \vec{H}, \quad (3)$$

где  $\vec{j}$  – плотность тока в источнике. Электромагнитное поле разделяется на нормальное поле  $\vec{E}^N, \vec{H}^N$ , которое источник возбуждает в слоистой среде, и на аномальное поле  $\vec{E}^a$  и  $\vec{H}^a$ , возникающее из-за наличия неоднородности.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}^N(M) + \vec{E}^a(M); \quad \vec{H}(M) = \vec{H}^N(M) + \vec{H}^a(M). \quad (4)$$

Аномальные поля являются решением системы уравнений:

$$\text{rot} \vec{H}^a = \sigma_c(z) \vec{E}^a + \vec{j}_a; \quad \text{rot} \vec{E}^a = i\omega\mu \vec{H}^a, \quad (5)$$

где  $\vec{j}_a = (\sigma_H - \sigma_c) \vec{E}$  – аномальный ток в неоднородности.

Описанная модель позволяет проводить анализ информативности различных компонент измеряемого поля.

Задача (5) легко сводится к интегральным уравнениям с помощью тензорных функций Грина  $\hat{G}_E(M, M_0)$  и  $\hat{G}_H(M, M_0)$  для уравнений Максвелла [4].

Тензора Грина электрического  $\hat{G}_E(M, M_0)$  и магнитного  $\hat{G}_H(M, M_0)$  типов являются решением уравнений Максвелла для произвольного электрического диполя:

$$\text{rot } \hat{G}_H = \sigma(z) \hat{G}_E + \hat{\delta}, \quad \text{rot } \hat{G}_E = i\omega\mu \hat{G}_H, \quad (6)$$

где

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta(R_{MM_0}) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(R_{MM_0}) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(R_{MM_0}) \end{pmatrix},$$

а  $\delta(R_{MM_0})$  – трёхмерная функция Дирака.

Используя тензорную функцию Грина, электромагнитные поля во всём пространстве можно записать в виде:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}^N(M) + \int_V \hat{G}_E(M, M_0) \vec{j}_a(M_0) dv_{M_0}, \quad (7)$$

$$\vec{H}(M) = \vec{H}^N(M) + \int_V \hat{G}_H(M, M_0) \vec{j}_a(M_0) dv_{M_0}, \quad (8)$$

где  $\vec{E}^N$  и  $\vec{H}^N$  – нормальное электрическое и магнитное поля, возбуждаемые в горизонтально однородной слоистой среде горизонтальным электрическим диполем,  $\vec{j}_a(M_0) = \sigma_a(M_0) \vec{E}(M_0)$  – избыточный ток в неоднородности. Аномальная проводимость  $\sigma_a$  равна разности между проводимостью неоднородности и проводимостью горизонтально однородной слоистой среды  $\sigma_a = \sigma_H - \sigma_2$ .

При  $M \in V$  выражение (7) является интегральным уравнением для электрического поля  $\vec{E}(M)$  в области неоднородности  $V$ . Определив  $\vec{E}(M)$  при  $M \in V$ , можно вычислить поля в любой точке пространства по интегральным формулам пересчёта (7 – 8).

## 2. Определение тензора Грина.

Для эффективного использования метода интегральных уравнений для математического моделирования электромагнитного поля в неоднородной среде необходимо иметь возможность быстрого вычисления компонент тензора Грина для уравнений Максвелла. Как показано в [4] для слоистой среды  $\sigma_c(z)$  электромагнитные тензоры выражаются через тензорный потенциал  $\hat{A}$  в виде:

$$\hat{G}_H = \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot} \hat{A}, \quad \hat{G}_E = \hat{A} + \text{grad} \left( \frac{1}{k^2(z)} \text{div} \hat{A} \right), \quad k^2 = i\omega\mu \sigma(z). \quad (9)$$

Тензорный потенциал является решением уравнения

$$\sigma(z) \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\sigma(z)} \operatorname{div} \hat{A} \right) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{A} + k^2(z) \hat{A} = -\hat{\delta}. \quad (10)$$

В работе [4] показано, что в слоистой среде тензорный потенциал имеет вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & G_2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

то есть определяется через три скалярные функции  $G_1(M, M_0)$ ,  $G_2(M, M_0)$  и  $g(M, M_0)$ , которые являются решениями следующих задач:

$$\Delta G_1 + k^2(z) G_1 = -\delta(R_{MM_0}), \quad [G_1]_z = 0, \quad \left[ \frac{\partial G_1}{\partial z} \right]_z = 0, \quad (12)$$

$$\sigma \operatorname{div} \left( \frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} G_2 \right) + k^2(z) G_2 = -\delta(R_{MM_0}), \quad [G_2]_z = 0, \quad \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G_2}{\partial z} \right] = 0, \quad (13)$$

$$\sigma \operatorname{div} \left( \frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} g \right) + k^2(z) g = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} G_1, \quad [g]_z = 0, \quad \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial g}{\partial z} + G_1 \right) \right] = 0, \quad (14)$$

где скобки  $[\varphi]_z$  обозначают разрыв функции  $\varphi(z)$  в точке  $z$ . Искомые функции представляются через преобразование Бесселя:

$$G_1(M, M_0) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) V(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (15)$$

$$G_2(M, M_0) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) U(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (16)$$

$$g(M, M_0) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) u(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (17)$$

где  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

Функции, определяющие спектры Бесселя, являются решением следующих задач:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} - \eta^2(z) V = 0, \quad [V]_z = 0, \quad \left[ \frac{dV}{dz} \right]_z = -\Delta(z - z_0), \quad (18)$$

где

$$\eta^2 = \lambda^2 - k^2(z), \quad k^2 = i\omega\mu\sigma(z), \quad \operatorname{Re}\eta \geq 0, \quad \Delta(z - z_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \neq z_0, \\ 1 & \text{при } z = z_0, \end{cases}$$

а  $z_0$  – глубина нахождения источника.

$$\sigma \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{dU}{dz} \right) - \eta^2(z)U = 0, \quad [U]_z = 0, \quad \sigma(z_0) \cdot \left[ \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dU}{dz} \right]_z = -\Delta(z - z_0), \quad (19)$$

$$\sigma \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{du}{dz} \right) - \eta^2(z)u = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}V(z, \lambda), \quad [u]_z = 0, \quad \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \frac{du}{dz} + V \right) \right]_z = 0. \quad (20)$$

Общий случай определения спектров Бесселя описан в [4]. В нашем случае простой двухслойной среды спектры определяются аналитически.

### 3. Численный метод исследования

Интегральное уравнение (7) сводится блочным методом к системе линейных алгебраических уравнений относительно средних значений электрического поля в блоках, на которые разбивается вся неоднородность. Размер получаемой системы очень большой, т.к. мы имеем трёхмерную векторную задачу, и может достигать  $10^7$ . Поэтому полученную систему можно решать только итерационным методом.

Особенности его применения в задачах геофизики рассмотрены в работах [5] - [6]. Оказалось, что в случае больших контрастов проводимости неоднородности и слоистой среды этот метод медленно сходится. Поэтому был применён ещё и другой итерационный метод – метод обобщённых минимальных невязок GMRES (General Minimal RESiduals), который показывает хорошую скорость сходимости даже и для контрастных моделей. При этом был использован набор стандартных подпрограмм, созданных коллективом авторов: Frayssé V., Giraud L., Gratton S., Langou J. [7].

На основе этого набора стандартных подпрограмм была разработана программа для многопроцессорного суперкомпьютера Bluegene, установленного на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, а также для многопроцессорных суперкомпьютеров SKIF-MGU Chebyshev и Lomonosov, работающих в научно-исследовательском вычислительном центре Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Программа реализована для расчёта электромагнитного поля, возбуждаемого горизонтальным электрическим диполем или верти-

кальным магнитным диполем в горизонтально однородной слоистой среде с трёхмерной неоднородностью таким образом, чтобы можно было моделировать неоднородности больших размеров на сетке большой размерности.

С помощью этой программы были проведены численные исследования электромагнитного поля в море как для случая хорошо проводящей неоднородности, так и для случая плохо проводящей неоднородности. Модель определяется следующими параметрами:

- $h_1$  – глубина моря,  $\sigma_1$  – электропроводность моря;
- $h_0 < h_1$  – глубина движения источника и приёмника;
- $h_2 > h_1$  – глубина залегания неоднородности;
- $\sigma_2$  – электропроводность среды под морским дном;
- неоднородность представляет собой параллелепипед, размеры которого  $h_T$  – высота,  $L_x$ ,  $L_y$  – размеры по оси  $Ox$  и  $Oy$ ;
- основной частотный параметр, длина волны в первом слое  $\lambda_1 = 2\pi/\text{Re } k_1 = 10^3 \sqrt{10/\nu\sigma_1}$ , где  $\nu$  – частота в герцах.

Цель моделирования – определить чувствительность мобильного электромагнитного зондирования для случая зондирования горизонтальным электрическим диполем и вертикальным магнитным диполем. Так как мобильное зондирование используется для поиска месторождений углеводородов, то основной задачей является поиск плохо проводящей неоднородности. Для этого были проведены расчёты электрического поля  $E_y^a$ , когда система источник-приёмник движется вдоль оси  $Oy$ , а поле возбуждается электрическим диполем  $P_y$ .

На рис. 1 приведены графики аномального электрического поля  $|E_y^a|$  в зависимости от положения системы источник-приёмник относительно центра неоднородности. Каждый график отвечает изменению поля в зависимости от положения профиля измерения относительно осевой линии неоднородности  $x_0$ . Естественно максимальная аномалия наблюдается при прохождении по профилю над центром неоднородности ( $x_0 = 0$ ). Основная характерная особенность аномалии электрического поля состоит в резком изменении поля при прохождении источника над краем неоднородности. Для оценки этого явления на рис. 2 приведён график  $d|E_y^a|/dy$ . Легко видеть, что максимум производной точно отбивает край неоднородности. Однако это явление несимметрично. Хорошо отбивается край неоднородности, на который надвигается источник, и плохо отбивается край неоднородности, с которой сходит источник.

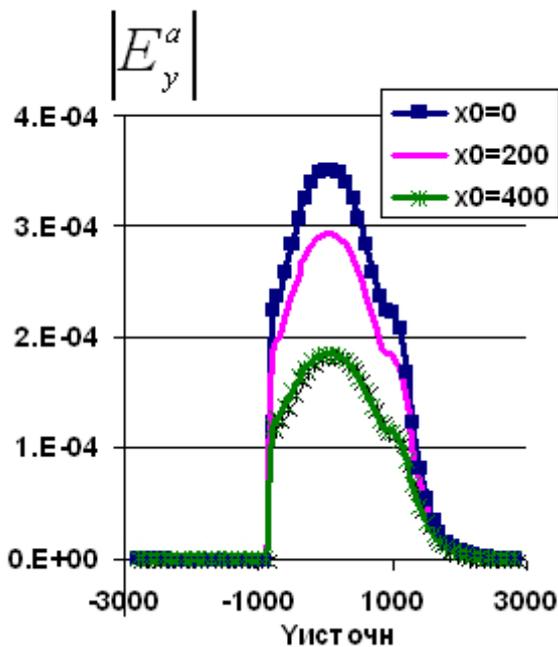


Рис. 1. Модуль аномального электрического поля над изолятором

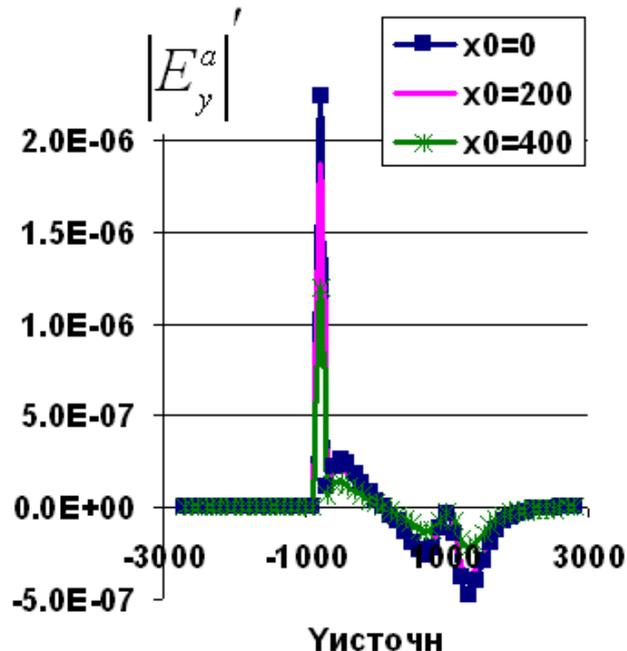


Рис. 2. Производная модуля аномального электрического поля

Для того чтобы определить оба края неоднородности, необходимо делать повторный проход судна в противоположном направлении, что увеличивает затраты на зондирование. Поэтому целесообразно использовать симметричную установку мобильного зондирования, в которой судно буксирует два приёмника, между которыми находится источник поля.

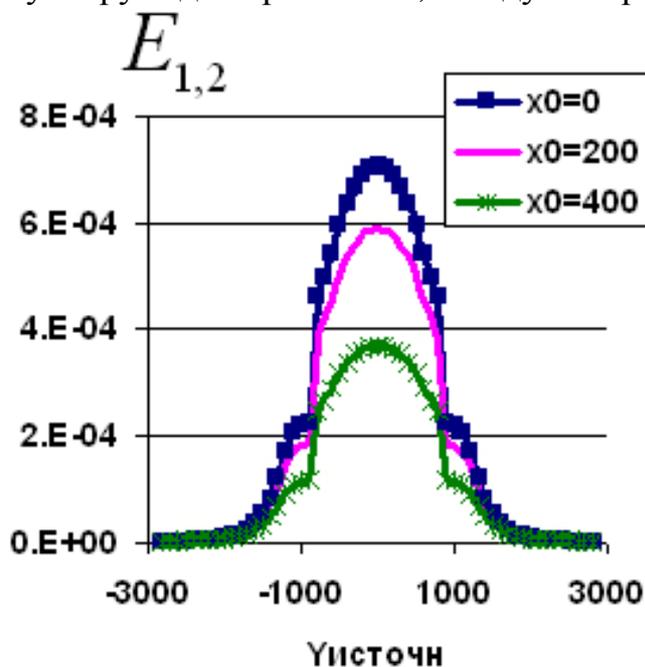


Рис.3. Аномальное электрическое поле от двух приёмников над изолятором

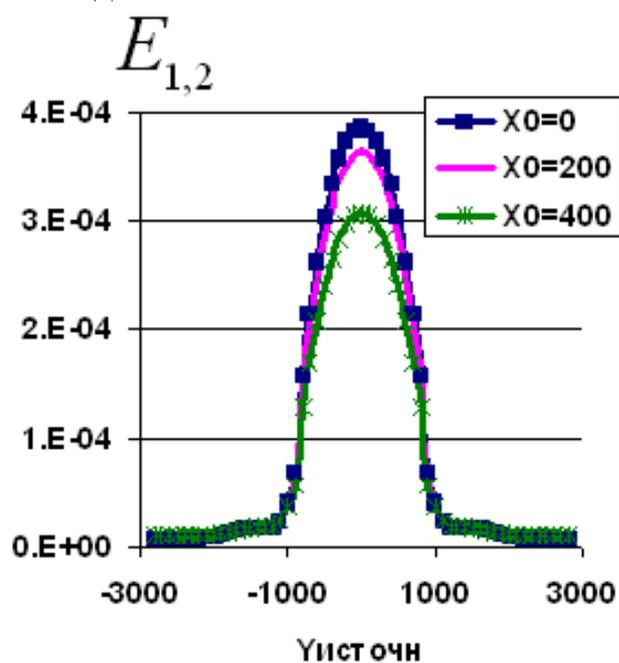


Рис.4. Аномальное электрическое поле от двух приёмников над проводником

При суммировании измеряемых полей от двух приёмников мы получаем симметричный сигнал, который одинаково отбивает оба края неоднородности. Результаты такого моделирования приведены на рис. 3.

Естественно, возникает вопрос, как отличается зондирование плохо проводящей неоднородности от зондирования хорошо проводящей неоднородности. На рис. 4 приведены графики электрического поля для симметричной установки над хорошо проводящей неоднородностью. Заметим, что эффект остаётся тем же, оба края неоднородности хорошо отбиваются на графике поля. Единственное отличие – несколько более плавное возрастание поля вблизи края неоднородности. Поэтому отличить хорошо проводящую неоднородность от плохо проводящей визуально невозможно. Однако это можно сделать при зондировании вертикальным магнитным диполем.

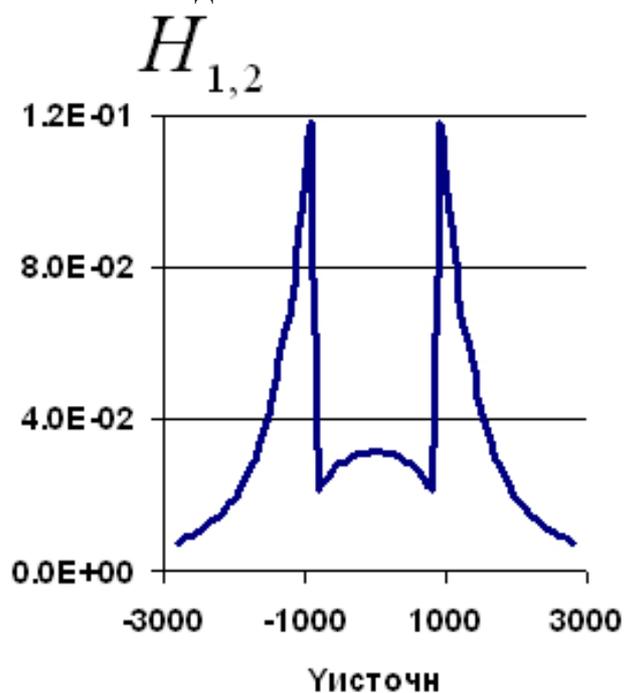


Рис.5. Аномальное магнитное поле от двух приёмников над изолятором

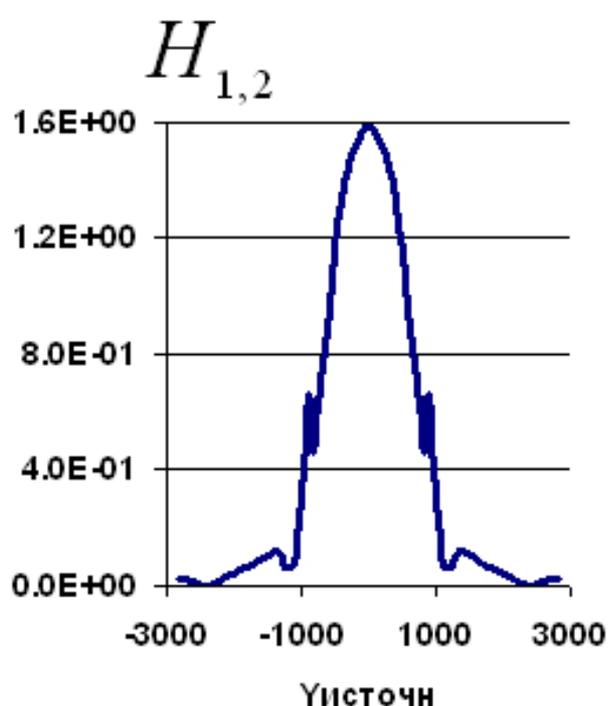


Рис.6. Аномальное магнитное поле от двух приёмников над проводником

На рис. 5 приведено аномальное вертикальное магнитное поле для симметричной установки, возбуждаемой вертикальным магнитным диполем над плохо проводящей неоднородностью, а на рис. 6 то же для случая хорошо проводящей неоднородности. Легко видеть, что края неоднородности отбиваются в обоих случаях. Однако характер изменения поля над плохо проводящей неоднородностью резко отличается от случая хорошо проводящей неоднородности, что позволяет легко различать неоднородности по их электропроводности. Поэтому на практике целесообразно использовать комбинированную симметричную мобильную установку, в ко-

торой поле возбуждается горизонтальным электрическим и вертикальным магнитным диполями, а измеряется соответствующая горизонтальная компонента электрического поля и вертикальная компонента магнитного поля.

### ***Заключение.***

Проведённое математическое моделирование обосновывает эффективность мобильного метода морских зондирований, поскольку при прохождении буксирующего судна над границей неоднородности наблюдается возмущение измеряемого поля как для случая хорошо проводящей неоднородности, так и для случая изолятора. Следовательно, мобильный метод морских зондирований позволяет оконтурить неоднородность, а при магнитном возбуждении ещё и отличить проводник от изолятора. Таким образом, описанный метод позволяет получить хорошее начальное приближение для решения обратной задачи обнаружения месторождений углеводородов в шельфовой зоне.

## **Литература**

1. Weitemeyer K.A., Constable S., Tréhu A.M. A Marine Electromagnetic Survey to Detect Gas Hydrate at Hydrate Ridge, Oregon, *Geophys. J. Int.*, 2011, vol. 187, pp. 45–62.
2. Григорьев В.Ф., Коротаев С.М., Кругляков М.С., Орехова Д.А., Попова И.В., Терещенко Е.Д., Терещенко П.Е., Щорс Ю.Г. Результаты морского электромагнитного зондирования мощным удаленным источником в Кольском заливе Баренцева моря. // В журнале *Физика Земли*, том 3, с. 75-86 2013 г. / Grigoriev V.F., Korotaev S.M., Kruglyakov M.S., Orekhova D.A., Popova I.V., Tereshchenko E.D., Tereshchenko P.E., Schors Yu. G. The results of marine electromagnetic sounding with a high-power remote source in the Kola Bay in the Barents Sea. // В журнале *Izvestiya - Physics of the Solid Earth*, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), том 49, № 3, с. 373-383 2013 г.
3. Дмитриев В.И., Барашков И.С. Математическое моделирование электромагнитных морских зондирований трёхмерной неоднородной среды // *Прикладная математика и информатика* № 38, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2011, с. 5-17. / Dmitriev V.I., Barashkov I.S. // *Mathematical modeling of marine electromagnetic sounding of a three-dimensional nonhomogeneous medium* // *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. 23, No. 3, July, 2012, P.239-

4. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: МАКС Пресс, 2008. – 316 с.
5. Панкратов О.В., Авдеев Д.Б., Кувшинов А.В. Рассеяние электромагнитного поля в неоднородной Земле. Решение прямой задачи. // ФИЗИКА ЗЕМЛИ, №3, март, 1995, с. 17-25. / Pankratov O.V., Avdeyev D.B., Kuvshinov A.V. Electromagnetic field scattering in a heterogeneous Earth: A solution to the forward problem. // PHYSICS OF THE SOLID EARTH, English Translation, YOL.31, NO.3, OCTOBER 1995.
6. Zhdanov M.S. Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems. Elsevier, 2002. – 609 p. / Жданов М.С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике: Пер. с англ. – М.: Научный мир, 2007. – 712 с.
7. Frayssé V., Giraud L., Gratton S., Langou J. A set of GMRES routines for real and complex arithmetics on high performance computers, CERFACS Technical Report TR/PA/03/3, public domain software available on [www.cerfacs.fr/algor/Softs](http://www.cerfacs.fr/algor/Softs).