

*И.С.Барашков, В.И.Дмитриев*

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПА ВЗАИМНОСТИ\*

В настоящее время важной задачей является исследование строения шельфа и обнаружение месторождений углеводородов в шельфовой зоне. Именно поэтому последнее время развиваются методы морских электромагнитных зондирований. При морских исследованиях в качестве источника электромагнитного поля обычно используется электрический кабель, который передвигается по поверхности моря, буксируемый судном. Электрическое и магнитное поля измеряются на морском дне с помощью всплываемых датчиков.

В математической модели будем считать, что источником поля является электрический диполь на поверхности моря в точке  $M_2 = (x_2, y_2, z_2 = 0)$ . Учёт длины источника принципиальных изменений не вносит. В качестве модели строения среды возьмём проводящую среду, в которой имеется проводящая зона с электропроводностью  $\sigma_T(M)$ ,  $M \in V$ , погруженная в слоистую среду  $\sigma(z)$ . Слоистая среда задаётся в виде:

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0 \approx 0 & \text{при } z \in (-\infty, 0) \text{ (атмосфера),} \\ \sigma_1 = \text{const} & \text{при } z \in (0, h_1) \text{ (море),} \\ \sigma_2 = \text{const} & \text{при } z \in (h_1, \infty) \text{ (наносы).} \end{cases}$$

Неоднородная зона находится при  $z \geq h_1$ . Модель горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью показана на рис.1.

Для расчёта электромагнитных полей в трёхмерной неоднородной среде применялся метод интегральных уравнений [3].

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 11-05-12014 офи-м-2011 “Разработка новых подходов и вычислительных методов решения обратных задач электромагнитного морского зондирования при измерениях на морском дне”.

Используя тензорную функцию Грина, электромагнитные поля во всём пространстве можно записать в виде:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}^N(M) + \int_V \hat{G}_E(M, M_0) \vec{j}(M_0) dv_{M_0}, \quad (1)$$

$$\vec{H}(M) = \vec{H}^N(M) + \int_V \hat{G}_H(M, M_0) \vec{j}(M_0) dv_{M_0}, \quad (2)$$

где  $\vec{E}^N$  и  $\vec{H}^N$  – нормальное электрическое и магнитное поле, возбуждаемое в горизонтально однородной слоистой среде горизонтальным электрическим диполем,  $\hat{G}_E(M, M_0)$  и  $\hat{G}_H(M, M_0)$  являются тензорами Грина электрического и магнитного типов в горизонтально однородной слоистой среде,  $\vec{j}(M_0) = \sigma_a(M_0) \vec{E}(M_0)$  – избыточный ток в неоднородности. Аномальная проводимость  $\sigma_a$  равна разности между проводимостью неоднородности и проводимостью горизонтально однородной слоистой среды  $\sigma_a = \sigma_T - \sigma_2$ .

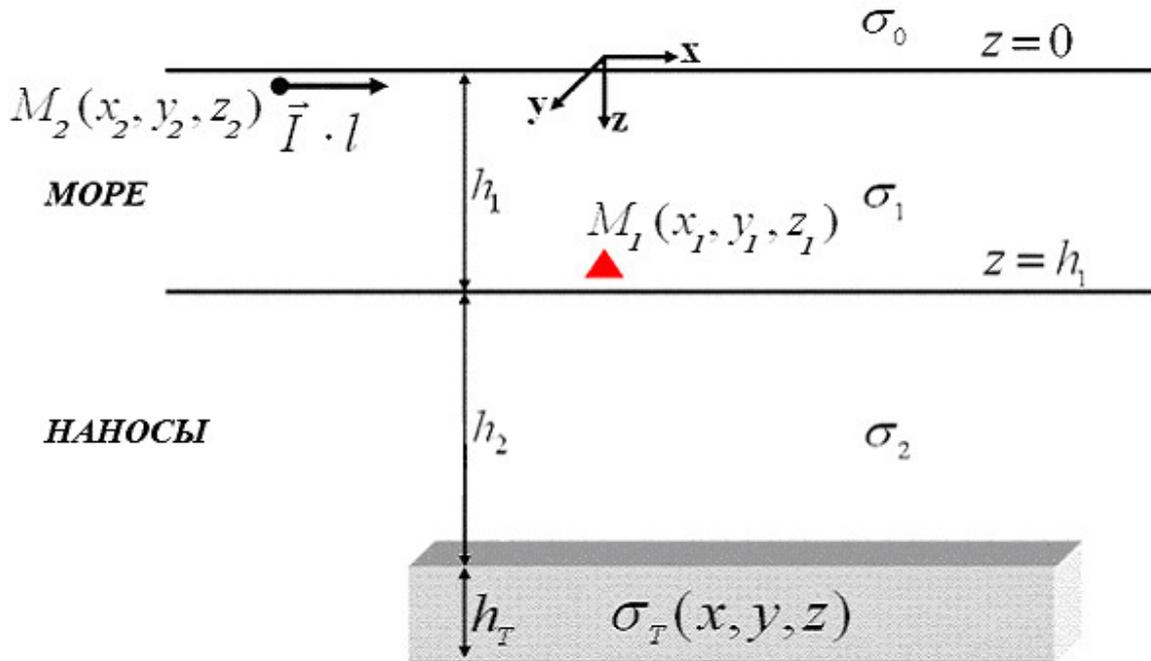


Рис.1. Две точки взаимности  $M_1$  и  $M_2$  в модели горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью.

Зная  $\hat{G}_E(M, M_0)$ , легко получить из (1) интегральное уравнение для аномального тока:

$$\vec{j}(M) - \sigma_a \int_V \hat{G}_E(M, M_0) \vec{j}(M_0) dv_{M_0} = \sigma_a(M) \vec{E}^N(M), \quad M \in V. \quad (3)$$

Определив из (3) аномальный ток  $\vec{j} = \sigma_a \vec{E}$ , находим, согласно (1-2), электрическое и магнитное поле в любой точке пространства.

Измеряемое поле зависит от частоты  $\omega$  и координат точки  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  на поверхности моря при  $z_2 = 0$ , в которой находится источник. Эти измерения, зависящие от трёх переменных  $(\omega, x_2, y_2)$ , позволяют определить трёхмерное распределение под морским дном  $\sigma(x, y, z)$ .

В этом случае при численном моделировании и решении обратной задачи приходится рассчитывать поля от большого количества источников, расположенных на поверхности моря во всех точках, через которые проходит буксирующее судно, каждый раз заново решая интегральное уравнение (3), а значения полей на дне моря надо находить лишь в нескольких точках, где находятся немногочисленные дорогостоящие измерительные датчики электрического и магнитного типа.

Согласно принципу взаимности при математическом моделировании источник и приёмник можно поменять местами и считать, что источники электрического и магнитного типа расположены на морском дне, а измерения проводятся на поверхности моря, что более удобно при решении обратной задачи, поскольку количество источников на морском дне небольшое и равно количеству датчиков, а рассчитать от них поля нетрудно даже и по всей поверхности моря. Это позволяет создать для решения обратной задачи эффективный быстрый метод.

Принцип взаимности основан на интегральной лемме Лоренца [4], согласно которой электромагнитное поле  $\vec{E}^{(1)}(M)$ ,  $\vec{H}^{(1)}(M)$ , возбуждаемое источниками электрического  $\vec{j}_e^{(1)}(M)$  и магнитного  $\vec{j}_m^{(1)}(M)$  типов, связано с полем  $\vec{E}^{(2)}(M)$ ,  $\vec{H}^{(2)}(M)$ , возбуждаемым источниками  $\vec{j}_e^{(2)}(M)$  и  $\vec{j}_m^{(2)}(M)$ , соотношением

$$\begin{aligned} & \int_V \{ \vec{E}^{(1)}(M) \vec{j}_e^{(2)}(M) + \vec{H}^{(1)}(M) \vec{j}_m^{(2)}(M) \} dv_M = \\ & = \int_V \{ \vec{E}^{(2)}(M) \vec{j}_e^{(1)}(M) + \vec{H}^{(2)}(M) \vec{j}_m^{(1)}(M) \} dv_M . \end{aligned}$$

Применим лемму Лоренца в частном случае, когда источников магнитного типа нет, а источниками электрического типа являются два диполя:

$$\vec{j}_e^{(1)}(M) = \vec{p}_1 \hat{\delta}(R_{MM_1}), \quad \vec{j}_e^{(2)}(M) = \vec{p}_2 \hat{\delta}(R_{MM_2}),$$

где  $\vec{p}_i$  – вектор, задающий направление и мощность диполя,

$$\hat{\delta}(R_{MM_i}) = \begin{pmatrix} \delta(R_{MM_i}) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(R_{MM_i}) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(R_{MM_i}) \end{pmatrix},$$

$\delta(R_{MM_i})$  – трёхмерная функция Дирака.

В этом случае из леммы Лоренца следует теорема взаимности для электрических полей и источников электрического типа.

### **Теорема 1**

Если

$$\begin{aligned} \vec{j}_e^{(1)}(M) &= \vec{p}_1 \hat{\delta}(R_{MM_1}), & \vec{j}_e^{(2)}(M) &= \vec{p}_2 \hat{\delta}(R_{MM_2}), \\ \vec{j}_m^{(1)}(M) &= \vec{j}_m^{(2)}(M) = 0, \end{aligned}$$

то

$$\vec{p}_1(M_1) \vec{E}^{(2)}(M_1) = \vec{p}_2(M_2) \vec{E}^{(1)}(M_2). \quad (4)$$

Эта теорема взаимности означает, что электрическое поле в точке  $M_1$ , направленное вдоль  $\vec{p}_1$  и возбуждаемое электрическим диполем  $\vec{p}_2$  в точке  $M_2$ , связано с электрическим полем в точке  $M_2$ , направленным вдоль  $\vec{p}_2$  и возбуждаемым электрическим диполем  $\vec{p}_1$  в точке  $M_1$ . На рис.1 показаны две точки взаимности  $M_1$  и  $M_2$ .

Рассмотрим сначала случай, когда судно буксирует электрический кабель вдоль оси  $Ox$ . Направим два диполя вдоль горизонтальных координатных осей следующим образом:

$$\vec{p}_1 = (0, p_y^{(1)}(M_1), 0) \quad \text{и} \quad \vec{p}_2 = (p_x^{(2)}(M_2), 0, 0).$$

Тогда, согласно теореме 1,

$$p_y^{(1)}(M_1) E_y^{(2)}(M_1) = p_x^{(2)}(M_2) E_x^{(1)}(M_2). \quad (5)$$

Если мощности двух диполей одинаковы

$$p_y^{(1)}(M_1) = p_x^{(2)}(M_2) = I \cdot l,$$

то соотношение (5) упрощается:

$$E_y^{(2)}(M_1) = E_x^{(1)}(M_2),$$

т.е. поле  $E_y^{(2)}(M_1)$  в точке расположения измерительного датчика  $M_1$  на морском дне, возбуждённое электрическим диполем  $p_x^{(2)}(M_2)$  мощности  $I \cdot l$ , расположенным на поверхности моря в точке  $M_2$ , связано с полем  $E_x^{(1)}(M_2)$  в точке  $M_2$  на поверхности моря, возбуждённым электрическим диполем  $p_y^{(1)}(M_1)$  мощности  $I \cdot l$ , который расположен в точке  $M_1$  на морском дне, соотношением

$$E_y^{(2)}(M_1) = E_x^{(1)}(M_2).$$

Таким образом, если судно будет буксировать электрический кабель вдоль оси  $Ox$ , то  $y$ -компонента электрического датчика на морском дне даст такие же показания, как если бы электрический диполь, направленный вдоль оси  $Oy$ , находился на морском дне, а  $x$ -компоненту электрического датчика мерили бы в разных точках на поверхности моря. Именно такие расчёты  $x$ -компоненты электрического поля в разных точках на поверхности моря и были проведены для численного моделирования электромагнитных морских зондирований при следующих значениях параметров:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0.1, \quad \sigma_T = 10^{-2}$$

$$h_1 = 100, \quad h_2 = 300,$$

$$h_T = 50, \quad L_x = 1000, \quad L_y = 1000,$$

где  $L_x$  и  $L_y$  – размеры тела по оси  $Ox$  и  $Oy$ ,

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 100, \quad z_2 = 0, \quad \lambda_1 = 30000,$$

параметр  $\lambda_1$  – длина волны в первом слое,

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\operatorname{Re}(k_1)} = \frac{2\pi}{\operatorname{Re}\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_1}} = \frac{2\pi\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\frac{\pi}{T}\mu_0}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}\rho_1 T},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Все величины задаются в системе СИ: длины задаются в метрах, проводимости – в сименсах. Поскольку в международной системе единиц (СИ) магнитная проницаемость вакуума

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}},$$

то

$$\lambda_1 = \sqrt{10^7 \rho_1 T}.$$

Начало координат находится над электрическим диполем на поверхности моря. Электрический диполь расположен в точке  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  на дне моря. Он направлен вдоль оси  $Oy$ , его длина  $l$ , а ток в нём  $I$ . Неоднородность смещена вправо по отношению к электрическому диполю вдоль оси  $Ox$  на 2000 метров. Её центр находится в точке с координатами (2000, 0, 425).

На рисунках 2-3 приводятся графики значений модуля

$$\tilde{E}_x^a = \frac{|E_x^a|}{|E_x^N|} \quad (6)$$

$x$ -компоненты аномального нормированного электрического поля, где  $E_x^N$  –  $x$ -компонента нормального поля диполя в горизонтально однородной слоистой среде без неоднородности,

$$E_x^a = E_x - E_x^N, \quad (7)$$

а  $E_x$  –  $x$ -компонента полного поля диполя в горизонтально однородной слоистой среде с неоднородностью.

На рис.3 показана зависимость поля от  $x$  при разных значениях  $y$ . На рис.2 для большей наглядности в виде трёхмерной поверхности показана зависимость поля сразу и от  $x$ , и от  $y$ . В точках плоскости  $y=0$ , перпендикулярной направлению диполя и проходящей через точку расположения этого диполя, электрический ток параллелен диполю в силу симметричности по  $y$  горизонтально однородной слоистой среды относительно плоскости  $y=0$ . Поэтому при  $y=0$

$$|E_x^N| = 0, \quad (8)$$

а нас интересует зависимость поля от  $x$  при значениях  $y$  в окрестности точки  $y=0$ , поскольку в модели, изображённой на рис.1, центр неоднородности находится в точке, для которой  $x=2000$ ,  $y=0$ . На рис.2 график в зависимости от  $x$  для значения  $y=0$  не приводится, поскольку из-за симметричности модели по  $y$  относительно плоскости  $y=0$  значения  $|E_x^a|$  при  $y=0$  обращаются в нуль. Заданная по формуле (6) дробь для  $\tilde{E}_x^a$  является неопределённой при  $y=0$ , поскольку и числитель и знаменатель этой дроби при  $y=0$  обращаются в нуль. Однако функция  $\tilde{E}_x^a$ , определённая по формуле (6), является чётной по  $y$ , поэтому левый и правый пределы этой функции при  $y$ , стремящемся к нулю, равны. Чтобы не разбивать трёхмерную поверхности на две отдельные части для построения трёхмерного графика, на рис.2 этим общим предельным значением функция была доопределена в нуле. На рис. 2 и рис. 3 видно, что минимум функции  $\tilde{E}_x^a$  приблизительно соответствует центру неоднородности, а её максимумы – границам неоднородности, что позволяет оконтурить неоднородность.

Рассмотрим теперь случай, когда судно буксирует электрический кабель вдоль оси  $Oy$ . Направим два диполя вдоль горизонтальных координатных осей следующим образом:

$$\vec{p}_1 = (0, p_y^{(1)}(M_1), 0) \quad \text{и} \quad \vec{p}_2 = (0, p_y^{(2)}(M_2), 0).$$

Тогда, согласно теореме 1,

$$p_y^{(1)}(M_1)E_y^{(2)}(M_1) = p_y^{(2)}(M_2)E_y^{(1)}(M_2). \quad (9)$$

Если мощности двух диполей одинаковы

$$p_y^{(1)}(M_1) = p_y^{(2)}(M_2) = I \cdot l,$$

то соотношение (9) упрощается:

$$E_y^{(2)}(M_1) = E_y^{(1)}(M_2),$$

т.е. поле  $E_y^{(2)}(M_1)$  в точке расположения измерительного датчика  $M_1$  на морском дне, возбуждённое электрическим диполем  $p_y^{(2)}(M_2)$  мощности  $I \cdot l$ , расположенным на поверхности моря в точке  $M_2$ , связано с полем  $E_y^{(1)}(M_2)$  в точке  $M_2$  на поверхности моря, возбуждённым электрическим диполем  $p_y^{(1)}(M_1)$  мощности  $I \cdot l$ , который расположен в точке  $M_1$  на морском дне, соотношением

$$E_y^{(2)}(M_1) = E_y^{(1)}(M_2).$$

Таким образом, если судно будет буксировать электрический кабель вдоль оси  $Oy$ , то  $y$ -компонента электрического датчика на морском дне даст такие же показания, как если бы электрический диполь, направленный вдоль оси  $Oy$ , находился на морском дне, а  $y$ -компоненту электрического датчика мерили бы в разных точках на поверхности моря.

На рисунках 4-5 приводятся графики значений модуля

$$\tilde{E}_y^a = \frac{|E_y - E_y^N|}{|E_y^N|}$$

$y$ -компоненты аномального электрического поля, возбуждённого электрическим диполем на дне моря. На рис. 5 показана зависимость поля от  $x$  при разных значениях  $y$ . На рис.4, для большей наглядности, в виде трёхмерной поверхности показана зависимость поля сразу и от  $x$ , и от  $y$ . Из этих рисунков видно, что максимум функции  $\tilde{E}_y^a$  соответствует центру неоднородности.

Применим теперь лемму Лоренца в частном случае, когда один из источников магнитного типа, а другой источник электрического типа. В этом случае из леммы Лоренца следует теорема взаимности для электрических и магнитных полей и источников электрического и магнитного типа.

## Теорема 2

Если

$$\vec{j}_e^{(1)}(M) = 0, \quad \vec{j}_e^{(2)}(M) = \vec{p}_2 \hat{\delta}(R_{MM_2}),$$

$$\vec{j}_m^{(1)}(M_1) = i\omega\mu_0 \vec{m}_1 \hat{\delta}(R_{MM_1}), \quad \vec{j}_m^{(2)}(M) = 0$$

то

$$\vec{p}_2(M_2) \vec{E}^{(1)}(M_2) = i\omega\mu_0 \vec{m}_1(M_1) \vec{H}^{(2)}(M_1).$$

Эта теорема взаимности означает, что электрическое поле в точке  $M_2$ , направленное вдоль  $\vec{p}_2$  и возбуждаемое магнитным диполем  $i\omega\mu_0 \vec{m}_1$  в точке  $M_1$ , связано с магнитным полем в точке  $M_1$ , направленным вдоль  $\vec{m}_1$  и возбуждаемым электрическим диполем  $\vec{p}_2$  в точке  $M_2$ .

Рассмотрим сначала случай, когда судно буксирует электрический кабель вдоль оси  $Ox$ . Направим два диполя вдоль координатных осей следующим образом:

$$\vec{m}_1 = (0, 0, m_z^{(1)}(M_1)) \quad \text{и} \quad \vec{p}_2 = (p_x^{(2)}(M_2), 0, 0).$$

Тогда согласно теореме 2

$$p_x^{(2)}(M_2) E_x^{(1)}(M_2) = i\omega\mu_0 m_z^{(1)}(M_1) H_z^{(2)}(M_1),$$

т.е. поле  $H_z^{(2)}(M_1)$  в точке расположения измерительного датчика  $M_1$  на морском дне, возбуждённое электрическим диполем  $p_x^{(2)}(M_2)$  мощности  $I \cdot l$ , расположенным на поверхности моря в точке  $M_2$ , связано с полем  $E_x^{(1)}(M_2)$  в точке  $M_2$  на поверхности моря, возбуждённым магнитным диполем  $m_z^{(1)}(M_1)$ , который расположен в точке  $M_1$  на морском дне, соотношением

$$H_z^{(2)}(M_1) = \frac{I \cdot l}{i\omega\mu_0 m_z^{(1)}} E_x^{(1)}(M_2).$$

Таким образом, если судно будет буксировать электрический кабель вдоль оси  $Ox$ , то  $z$ -компонента магнитного датчика на морском дне даст такие же показания с точностью до множителя  $\frac{I \cdot l}{i\omega\mu_0 m_z^{(1)}}$ , как если бы

магнитный диполь, направленный вдоль оси  $Oz$ , находился на морском дне, а  $x$ -компоненту электрического датчика мерили бы в разных точках на поверхности моря. Именно такие расчёты для магнитного диполя, направленного вдоль оси  $Oz$  и находящегося на морском дне, и были произведены при математическом моделировании электромагнитных морских зондирований.

На рисунках 6 и 7 приводятся графики значений модуля

$$\tilde{E}_x^a = \frac{|E_x^a|}{|E_x^N|} \quad (10)$$

$x$ -компоненты аномального нормированного электрического поля, где  $E_x^N$  –  $x$ -компонента нормального поля диполя в горизонтально однородной слоистой среде без неоднородности,

$$E_x^a = E_x - E_x^N, \quad (11)$$

а  $E_x$  –  $x$ -компонента полного поля диполя в горизонтально однородной слоистой среде с неоднородностью.

На рис.7 показана зависимость поля от  $x$  при разных значениях  $y$ . На рис.6, для большей наглядности, в виде трёхмерной поверхности показана зависимость поля сразу и от  $x$ , и от  $y$ . В точках плоскости  $y=0$ , проходящей через точку расположения вертикального магнитного диполя, возбуждаемый диполем круговой электрический ток перпендикулярен плоскости  $y=0$ . Поэтому при  $y=0$

$$|E_x^N| = 0, \quad (12)$$

а нас интересует зависимость поля от  $x$  при значениях  $y$  в окрестности точки  $y=0$ , поскольку в модели, изображённой на рис.1 центр неоднородности находится в точке, для которой  $x=2000$ ,  $y=0$ . На рис.7 график в зависимости от  $x$  для значения  $y=0$  не приводится, поскольку из-за симметричности модели по  $y$  относительно плоскости  $y=0$  значения  $|E_x^a|$  при  $y=0$  обращаются в нуль. Заданная по формуле (10) дробь для  $\tilde{E}_x^a$  является неопределённой при  $y=0$ , поскольку и числитель и знаменатель этой дроби при  $y=0$  обращаются в нуль. Однако функция  $\tilde{E}_x^a$ , определённая по формуле (10), является чётной по  $y$ , поэтому левый и правый пределы этой функции при  $y$ , стремящемся к нулю, равны. Чтобы не разбивать трёхмерную поверхности на две отдельные части для построения трёхмерного графика на рис.6 этим общим предельным значением функция была доопределена при  $y=0$ . На рисунках 6 и 7 видно, что минимум функции  $\tilde{E}_x^a$  приблизительно соответствует центру неоднородности, а её максимумы – границам неоднородности, что позволяет оконтурить неоднородность. Значения функции  $\tilde{E}_x^a$  в случае возбуждения магнитным диполем больше, чем в случае возбуждения электрическим диполем, что позволяет их практически измерить.

Рассмотрим теперь случай, когда судно буксирует электрический кабель вдоль оси  $Oy$ . Направим два диполя вдоль координатных осей следующим образом:

$$\vec{m}_1 = (0, 0, m_z^{(1)}(M_1)) \quad \text{и} \quad \vec{p}_2 = (0, p_y^{(2)}(M_2), 0).$$

Тогда согласно теореме 2

$$p_y^{(2)}(M_2)E_y^{(1)}(M_2) = i\omega\mu_0 m_z^{(1)}(M_1)H_z^{(2)}(M_1),$$

т.е. поле  $H_z^{(2)}(M_1)$  в точке расположения измерительного датчика  $M_1$  на морском дне, возбуждённое электрическим диполем  $p_y^{(2)}(M_2)$  мощности  $I \cdot l$ , расположенным на поверхности моря в точке  $M_2$ , связано с полем  $E_y^{(1)}(M_2)$  в точке  $M_2$  на поверхности моря, возбуждённым магнитным диполем  $m_z^{(1)}(M_1)$  мощности  $m_z^{(1)}$ , который расположен в точке  $M_1$  на морском дне, соотношением

$$H_z^{(2)}(M_1) = \frac{I \cdot l}{i\omega\mu_0 m_z^{(1)}} E_y^{(1)}(M_2).$$

Таким образом, если судно будет буксировать электрический кабель вдоль оси  $Oy$ , то  $z$ -компонента магнитного датчика на морском дне даст такие же показания с точностью до множителя  $\frac{I \cdot l}{i\omega\mu_0 m_z^{(1)}}$ , как если бы магнитный диполь, направленный вдоль оси  $Oz$  находился на морском дне, а  $y$ -компоненту электрического датчика мерили бы в разных точках на поверхности моря.

На рисунках 8 и 9 приводятся графики значений модуля

$$\tilde{E}_y^a = \frac{|E_y - E_y^N|}{|E_y^N|}$$

$y$ -компоненты аномального электрического поля, возбуждённого магнитным диполем на дне моря. На рис. 9 показана зависимость поля от  $y$  при разных значениях  $x$ . На рис.8, для большей наглядности, в виде трёхмерной поверхности показана зависимость поля сразу и от  $x$ , и от  $y$ . Из этих рисунков видно, что центральный максимум функции  $\tilde{E}_y^a$  соответствует центру неоднородности, а боковые максимумы соответствуют краям неоднородности, что позволяет оконтурить эту неоднородность.

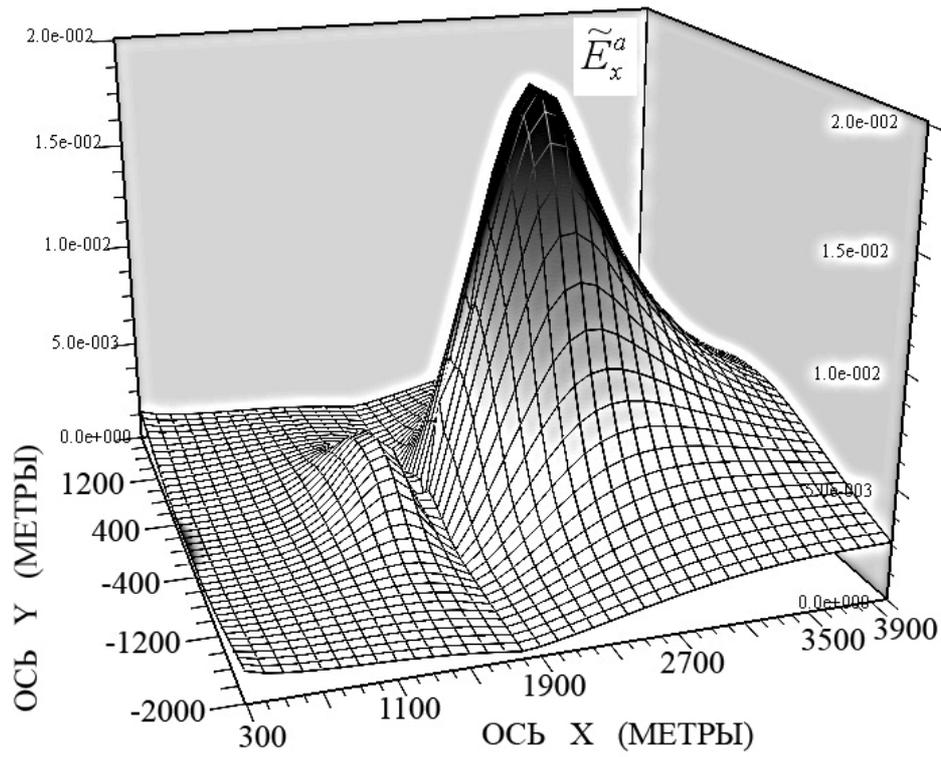


Рис.2

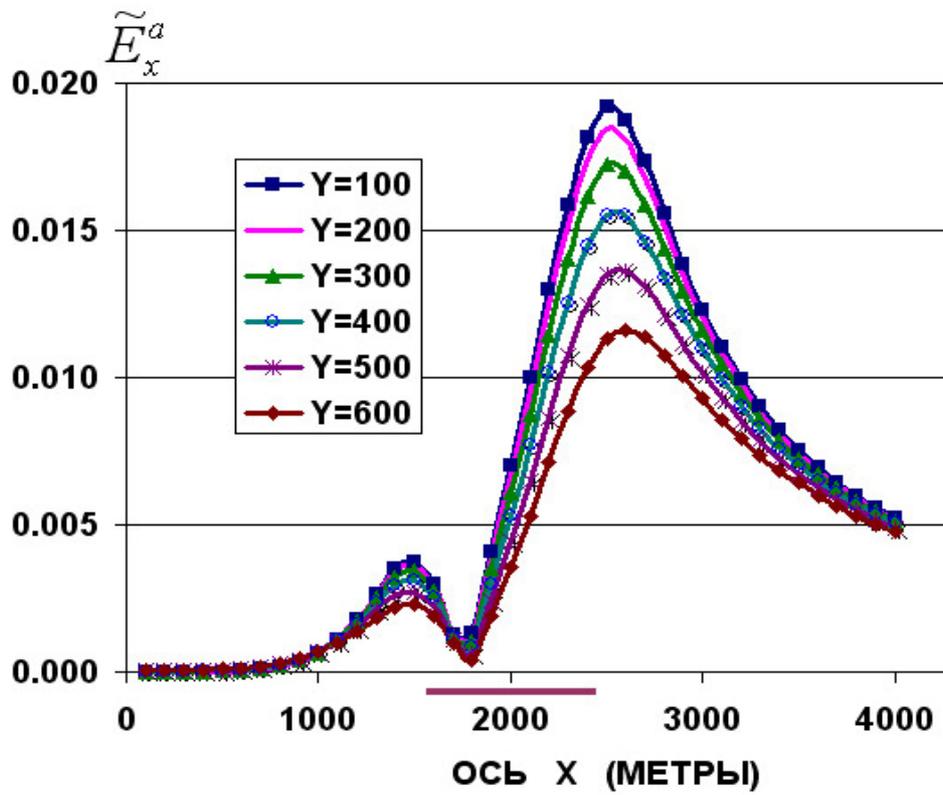


Рис.3

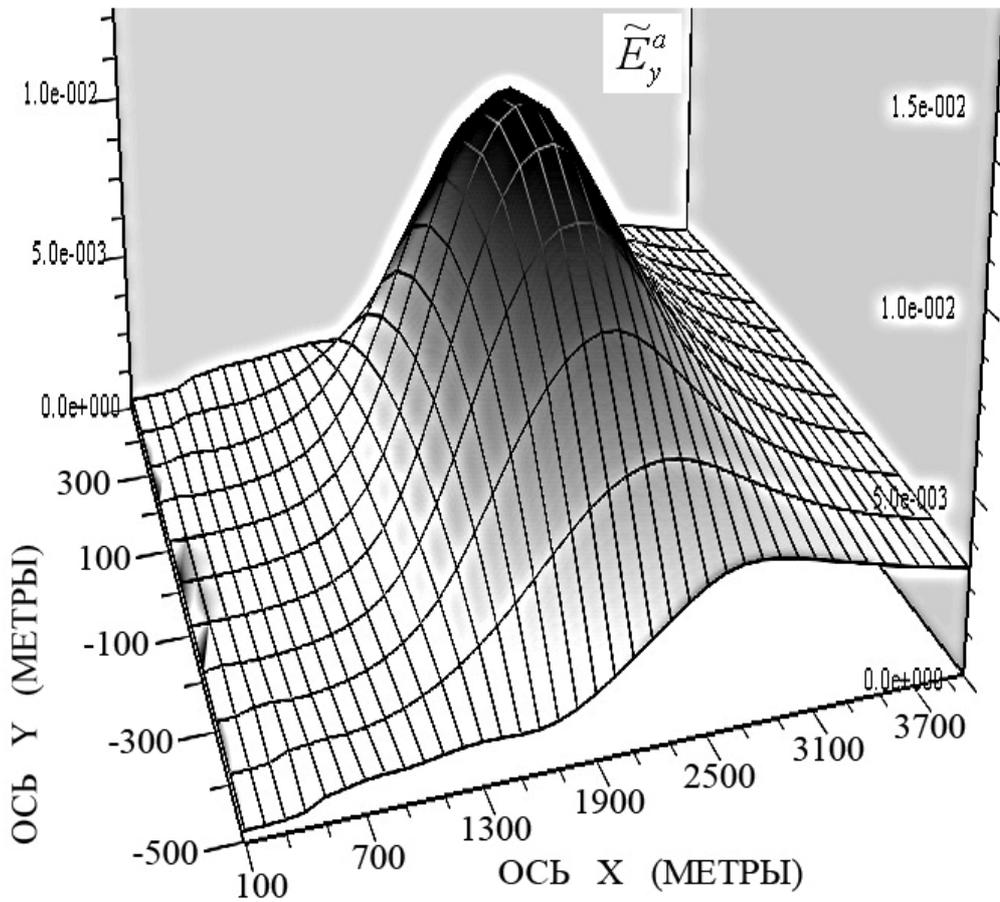


Рис.4

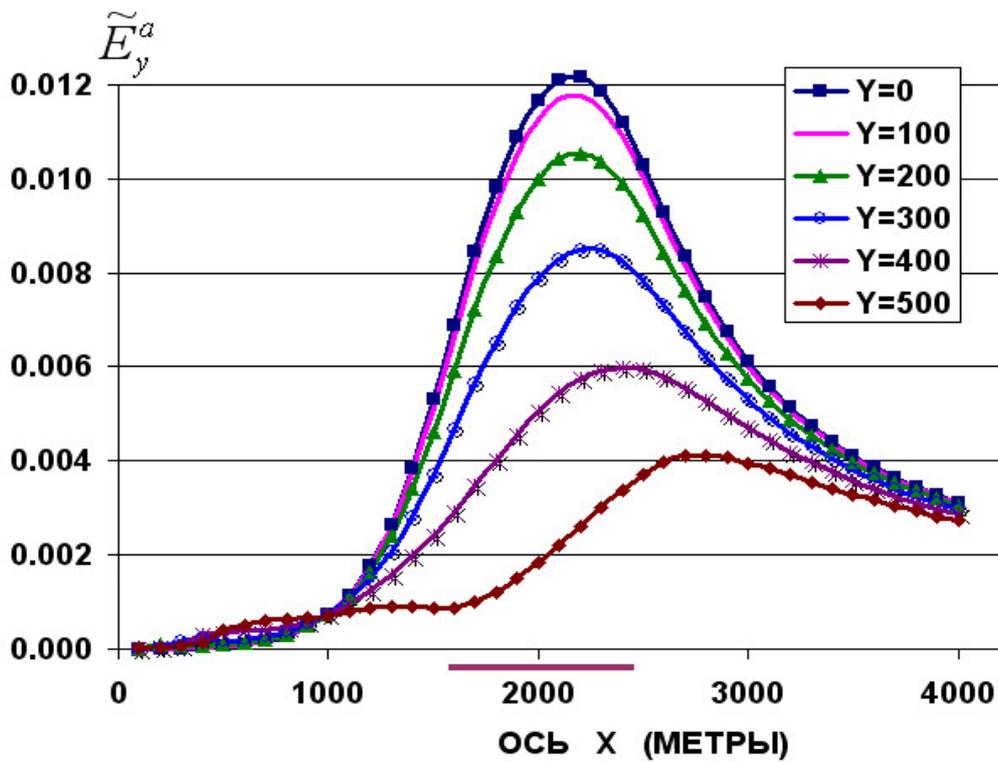


Рис.5

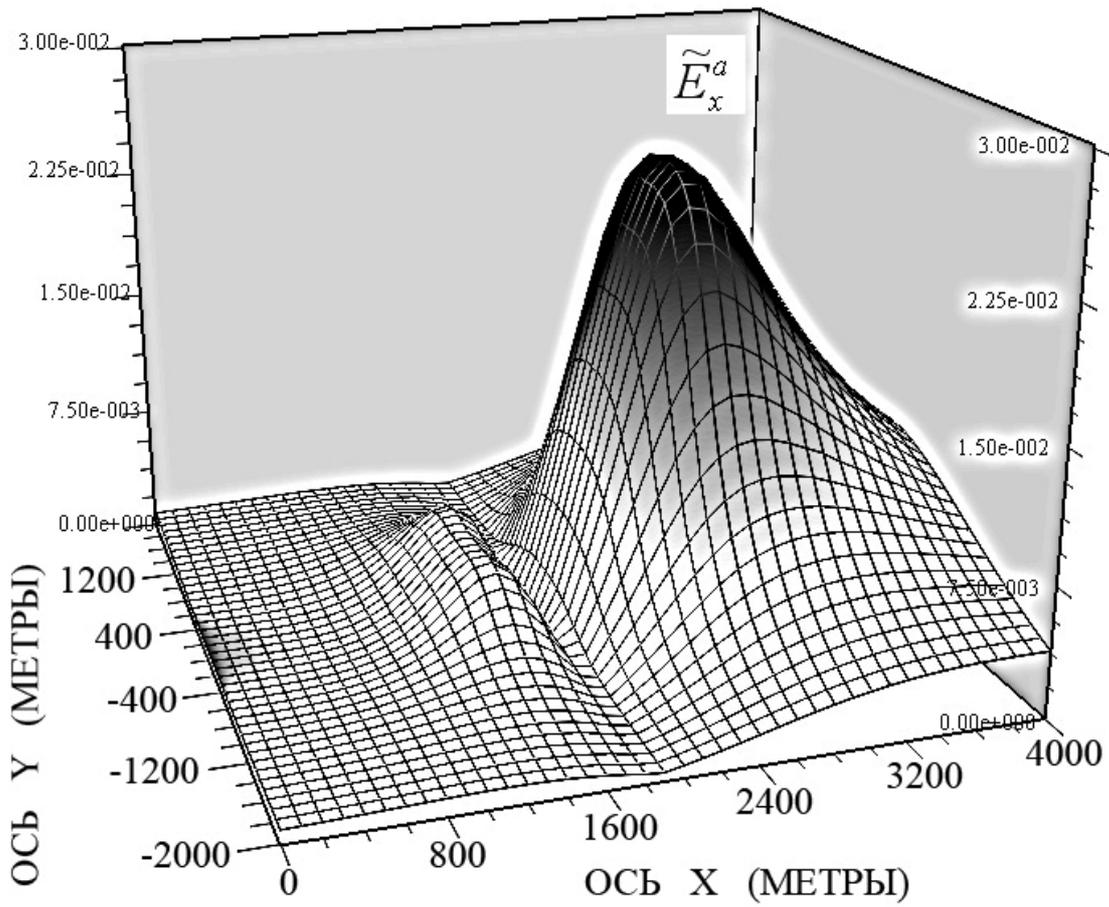


Рис. 6

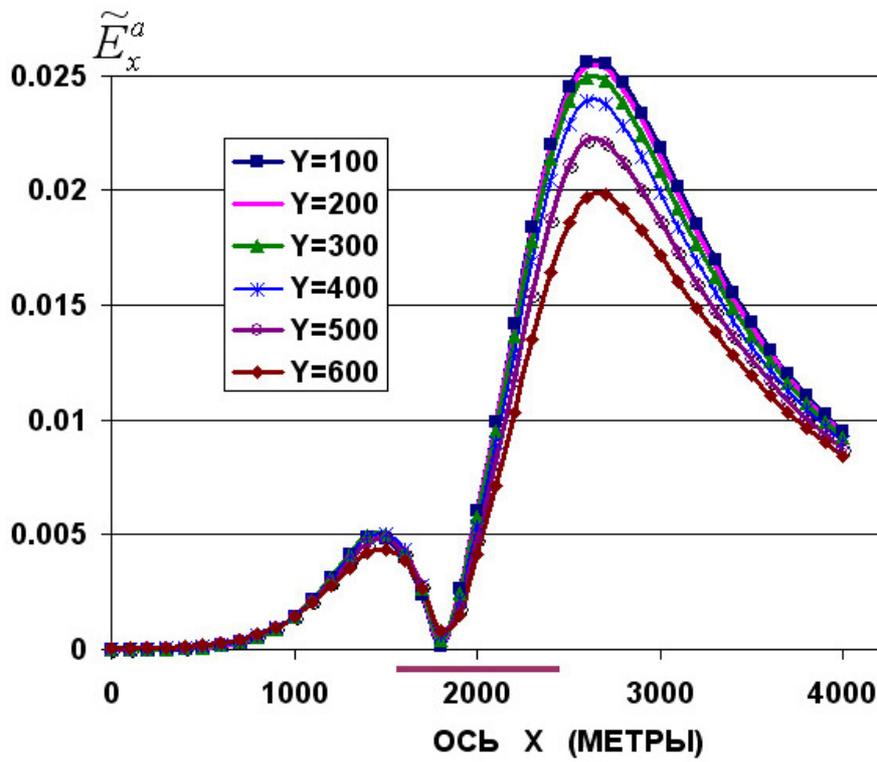


Рис. 7

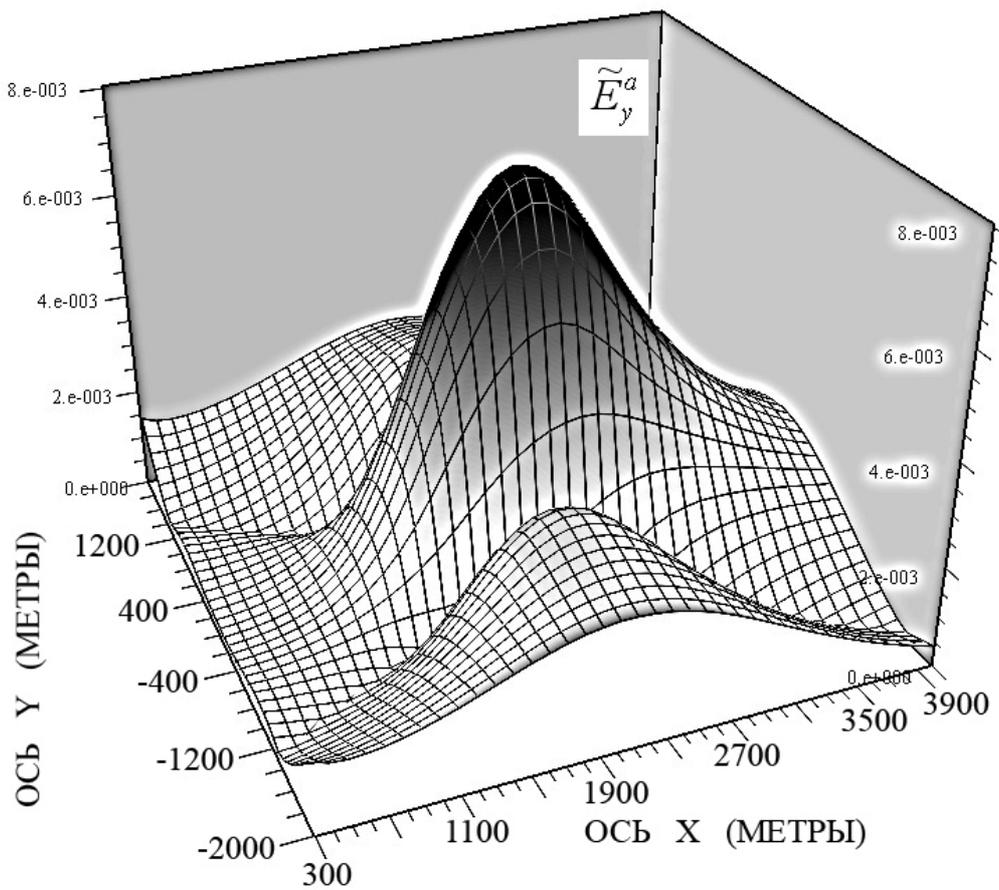


Рис. 8

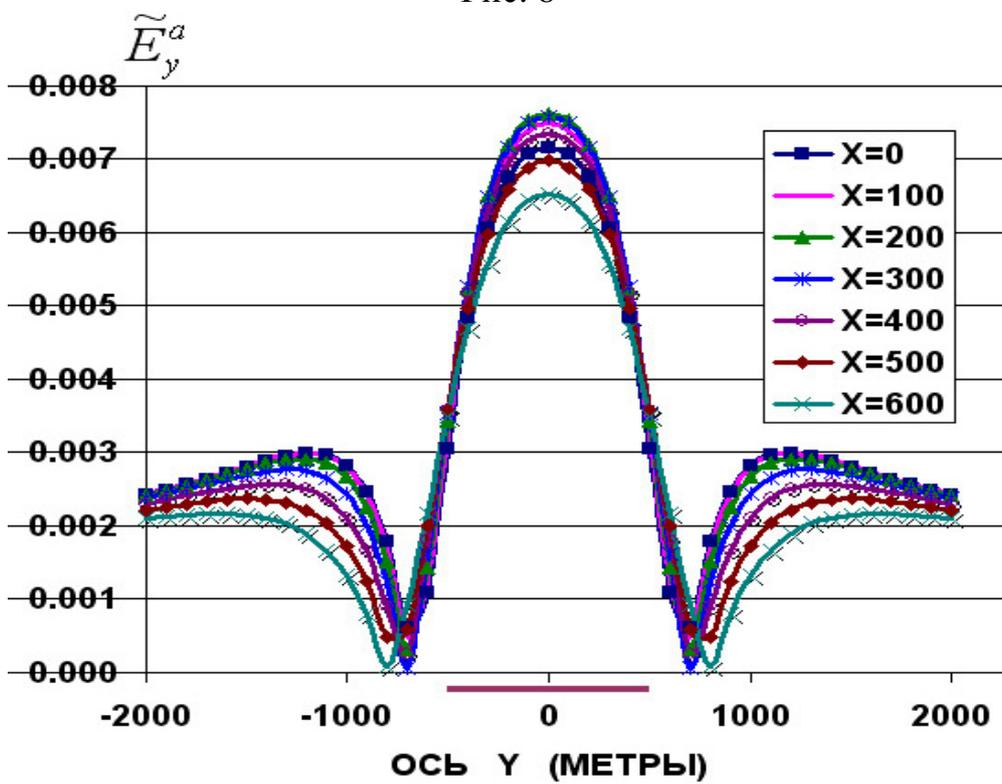


Рис. 9

## Литература

1. Дмитриев В.И. Математическое моделирование влияния ионосферы на электромагнитное зондирование // Прикладная математика и информатика № 31, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2009.
2. Тихонов А.Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. ДАН 125, №5, 982-985.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: МАКС Пресс, 2008.
4. Lorentz H.A. Het theorema van Poynting over de energie in het electromagnetisch veld en een paar algemeene stellingen over de voortplanting van het licht, в кн.: Verslagen der Zittingen van de Wiss.- en Naturkundige Afdeeling der K. Akademie van Wetenschappen, 1896, Bd 4, p. 176.
5. Барашков И.С., Дмитриев В.И. Математическое моделирование электромагнитного поля удалённых источников в неоднородной среде // Прикладная математика и информатика № 32, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2009.
6. Барашков И.С., Дмитриев В.И. Математическое моделирование морских зондирований полем мощного удалённого источника при наличии сложной береговой линии // Прикладная математика и информатика № 34, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2010, с. 41-60.
7. Дмитриев В.И., Барашков И.С. Математическое моделирование электромагнитных морских зондирований трёхмерной неоднородной среды // Прикладная математика и информатика № 38, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2011, с. 5 – 17.