

Раздел I. Обратные задачи

В.И. Дмитриев, Л.В. Столяров

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Постановка задачи

Рассмотрим граничную задачу уравнения теплопроводности, в которой определяется функция $U(z, t)$, являющаяся решением уравнения теплопроводности. Температура $U(z, t)$ зависит от времени и одной пространственной координаты. Поле распределено в однородном полупространстве $z \geq 0$, на границе которого при $z=0$ задано изменение температуры $T(z=0, t) = \mu(t)$, $t \in [0, \infty)$. В этом случае прямая задача о распределении температуры имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, & t \in [0, t_0), \quad z \in [0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

$$U(z, t = 0) = T_0(z), \quad (2)$$

$$U(z = 0, t) = \mu(t), \quad (3)$$

где a – коэффициент температуропроводности, имеющий размерность $\left[\frac{\text{м}}{\sqrt{\text{сек}}} \right]$.

Решение этой задачи имеет вид:

$$T(z, t) = \frac{z}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \frac{\mu(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}. \quad (4)$$

Обратная граничная задача состоит в определении граничной функции $\mu(t)$ по известному решению при $t = t_0$:

$$U(z, t = t_0) = U_0(z); \quad \mu(t_0) = U(z = 0) \quad (5)$$

Таким образом, обратная задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода

$$\frac{z}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = U_0(z), \quad z \in [0, \infty), \quad (6)$$

$$\text{где } K(t, \tau) = \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \quad (7)$$

при условии $\mu(0) = 0$, $\mu(t_0) = U_0(z=0)$.

Исследование интегрального уравнения

В работе [1] доказано, что рассмотренная выше обратная задача имеет единственное решение. Следовательно, уравнение (6-7) также имеет единственное решение, т.к. любое решение интегрального уравнения является решением обратной задачи. Докажем это утверждение.

Пусть $\mu_1(t)$ – решение интегрального уравнения (6-7). Тогда, согласно (4), мы можем определить функцию

$$U(z, t) = \frac{z}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu_1(\tau) \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}, \quad (8)$$

которая является решением уравнения теплопроводности (1). Остается доказать, что выполняется граничное условие (3). Для этого в (8) сделаем замену переменного

$$\tau = t - \frac{z^2}{4a^2\xi^2}.$$

Тогда получим

$$U(z, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_q^\infty \mu_1\left(t - \frac{z^2}{4a^2\xi^2}\right) \exp(-\xi^2) d\xi; \quad q = \frac{z}{2a\sqrt{t}}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что при $z=0$ имеем

$$U(z=0, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mu_1(t) \int_0^\infty \exp(-\xi^2) d\xi = \mu_1(t).$$

Таким образом, доказано, что решение интегрального уравнения (6) является решением исследуемой обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности.

Решение полученного интегрального уравнения первого рода (6) при $\mu(t) \in C$ является неустойчивой задачей. Для его численного решения целесообразно перейти к интегральному уравнению с положительным ядром. Для этого умножим уравнение (6) на $\exp(-z^2 / (4a^2(t-\tau)))$ и проинтегрируем в пределах $[0, \infty)$. В результате получим уравнение в виде

$$\int_0^{t_0} M(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [0, t_0], \quad (10)$$

где

$$M(t, \tau) = \frac{1}{2a^2 \sqrt{t_0 - \tau}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t_0 - \tau)}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t - \tau)}\right) \frac{z dz}{(t_0 - \tau)^{3/2}},$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a \sqrt{t_0 - \tau}} \int_0^\infty U_0(z) \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t_0 - \tau)}\right) dz. \quad (11)$$

Интеграл, определяющий ядро интегрального уравнения $M(t, \tau)$, берется аналитически. В результате имеем

$$M(t, \tau) = \frac{\sqrt{t_0 - t}}{\sqrt{t_0 - \tau} (2t_0 - t - \tau)} \quad (12)$$

Полученное интегральное уравнение имеет недостатки. Во-первых, правая часть имеет неопределенность при $t \rightarrow t_0$. Во-вторых, ядро имеет особенность при $\tau = t_0$ и сингулярность при $t = t_0$ и $\tau \rightarrow t_0$.

Определим поведение $f(t)$ при $t \rightarrow t_0$. Учитывая, что $U_0(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, сделаем в (11) замену переменного $z = 2a\sqrt{t_0 - t}\xi$ и получим

$$f(t) = 2\sqrt{\pi} U_0(0) \int_0^\infty \exp(-\xi^2) d\xi = \pi U_0(z=0) \quad (13)$$

Ядро интегрального уравнения можно сделать симметричным со слабой особенностью. Для этого представим решение интегрального уравнения в виде

$$\mu(t) = \mu(t_0) \frac{t}{t_0} - (t_0 - t)u(t). \quad (14)$$

Подставив (14) в (12), получим интегральное уравнение для $u(t)$:

$$\int_0^{t_0} R(t, \tau) u(\tau) d\tau = F(t), \quad t \in [0, t_0], \quad (15)$$

$$\text{где } R(t, \tau) = \frac{\sqrt{(t_0 - t)(t_0 - \tau)}}{(t_0 - t) + (t_0 - \tau)}; \quad (16)$$

$$F(t) = \mu(t_0) \frac{\sqrt{t_0 - t}}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{t_0 - \tau} (2t_0 - t - \tau)} - f(t). \quad (17)$$

Интеграл, входящий в выражение для $F(t)$, легко получить в аналитическом виде:

$$\begin{aligned}
I(t) &= \frac{\sqrt{t_0-t}}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{t_0-\tau}(2t_0-t-\tau)} = \\
&= 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0-t}} + \frac{t_0-t}{t_0} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0-t}} - \frac{\sqrt{t_0-t}}{t_0} \right)
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, учитывая, что $\mu(t_0) = U_0(z=0)$, получаем правую часть уравнения в виде

$$F(t) = U_0(z=0)I(t) - f(t)$$

или, согласно (11), имеем

$$F(t) = U_0(z=0)I(t) - \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t_0-t}} \int_0^\infty U_0(z) \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t_0-t)}\right) dz \tag{19}$$

Заметим, что $F(t_0) = U_0(z=0)I(t_0) - f(t_0) = 0$, т.к. согласно (18) $I(t_0) = \pi$, а, согласно (13), $f(t_0) = \pi U_0(z=0)$.

Полученное после преобразований интегральное уравнение (15) обладает рядом преимуществ:

1. к интегральному уравнению с симметричным ядром применим итерационный метод решения [2], [3].
2. ядро интегрального уравнения имеет слабую особенность, что удобно при численном решении.
3. не надо следить за удовлетворением условия $\mu(t_0) = U_0(z=0)$, т.к. теперь оно автоматически следует из условия $U(t_0)$ – ограничено.

Численное решение интегрального уравнения.

Как было сказано выше, к полученному интегральному уравнению применим итерационный метод, предложенный в работе [2]. Суть метода в следующем. Если уравнение записать в виде $Au = f$, где A – положительно определенный вполне непрерывный оператор, то можно использовать итерационный метод, в котором итерации определяются как $u_{n+1} = u_n + \lambda(Au - f)$.

В работе [2] доказано, что итерации сходятся, если константа λ меньше максимального собственного значения оператора A . Недостатком метода является невозможность определения оптимального λ для ускорения сходимости метода. В работе [4] был предложен другой итерационный метод, в котором λ выбирается в виде:

$$\lambda = \left(\int_0^{t_0} R(t, \tau) dt \right)^{-1},$$

где $R(t, \tau)$ – ядро интегрального оператора.

Такой подход показал свою эффективность для δ -образных ядер: в

работах [4], [5] было показано, что такой итерационный процесс достаточно быстро сходится для δ -образных ядер интегральных уравнений, в которых ядро имеет большое значение при совпадении аргументов и быстро убывает при увеличении разности аргументов.

В нашем случае ядро интегрального уравнения (16) $R(t, \tau)$ не является δ -образным, поэтому итерационный процесс сходится относительно медленно. Однако при увеличении числа итераций удается получить хорошее приближение к точному решению.

Тестирование метода проводилось для следующих решений:

1. $\mu_1(t) = \frac{1}{4} \left(\tanh \frac{10}{3} - \tanh \frac{10-t}{3} \right); t \in [0, 10]; t_0 = 10.$

2. $\mu_2(t) = 0,1e^{\frac{t}{3}} - 0,6 \cos \frac{2t}{3} + 0,5; t \in [0, 10]; t_0 = 10;$

Графики $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ приведены на *рис. 1*. Они имеют разное поведение в окрестности $t = 0$ и разную скорость роста при t_0 .

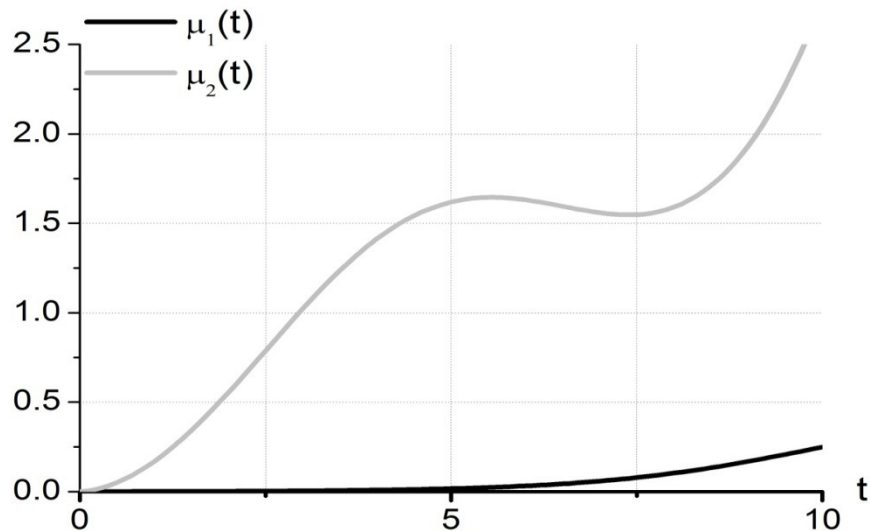


Рис. 1

Выбор тестовых примеров связан с поведением искомого решения в окрестности начальной и конечной точек. Первый тест ориентирован на поведение решения в окрестности нуля (решение на большом отрезке от $t=0$ до $t=5$ практически равно 0). В этом тестовом примере требуется избежать появления осцилляций решения в окрестности малых значений. Второй тестовый пример направлен на изучение влияния немонотонного характера решения, а также получения устойчивого решения в окрестности конечной точки.

Методика тестирования заключалась в следующем: по заданному точному решению обратной задачи $\mu_n(t)$ программа рассчитывала функцию распределения температуры в конечной точке $T_0(z)$ по формуле

(4), после чего обратная задача решалась по описанной выше схеме. На $T_0(z)$ действовали сопряженным оператором по формуле (11). После этого приводили интегральное уравнение к уравнению с симметричным ядром (17) и вычисляли правую часть уравнения. Затем применяли итерационный метод для отыскания $u(t)$ с последующим переходом по формуле (14) к решению обратной задачи $\mu(t)$. Полученное таким образом приближенное решение обратной задачи было сопоставлено с известным точным решением. Это проиллюстрировано на *рис. 2* для $\mu_1(t)$ и на *рис. 3* для $\mu_2(t)$.

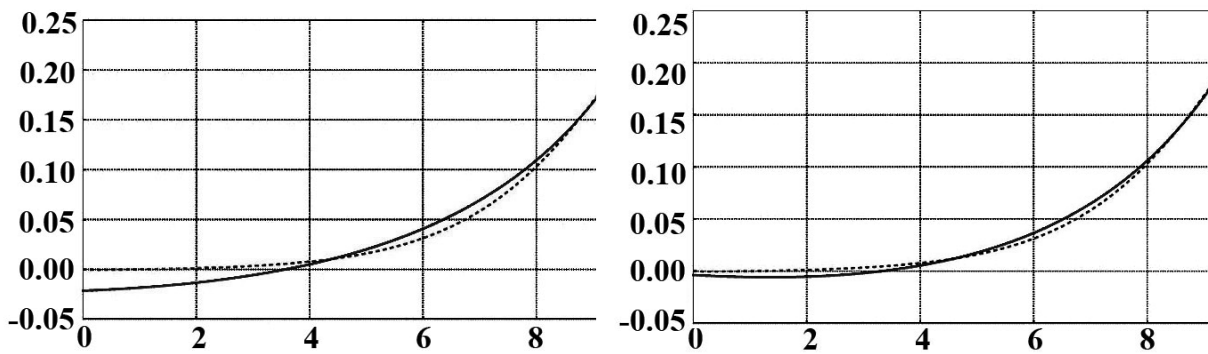


Рис. 2

На рисунке 2 приведены результаты полученного решения при 50 и 100 итераций. Легко видеть, что при 100 итераций мы получаем практическое совпадение с точным решением. Причем приближенное решение достаточно хорошо описывает близость к нулю в окрестности начальной точке.

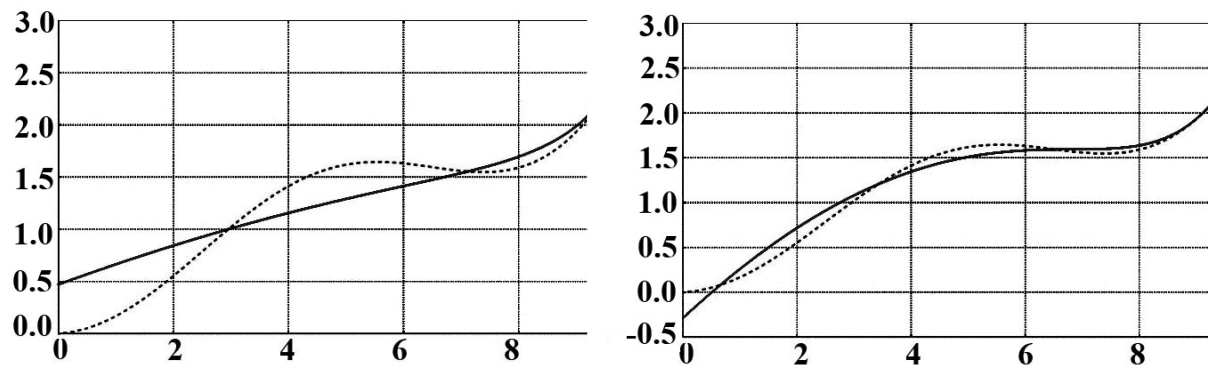


Рис. 3

На рисунке 3 приведен случай, когда решение имеет не монотонный характер. При 50 итерациях (первый график) приближенное решение сильно отличается от точного и практически дает некоторый усредненный ответ. Хорошее совпадение с точным решением получается при большом числе итераций он приведен для случая 1500 итераций. Это связано как с

не δ -образным видом симметричного ядра, так и с видом самого решения, которое не является монотонно возрастающим. Однако следует отметить, что метод позволяет получить устойчивое приближение к точному решению, хотя необходимо брать большое число итераций из-за медленной сходимости итерационного процесса.

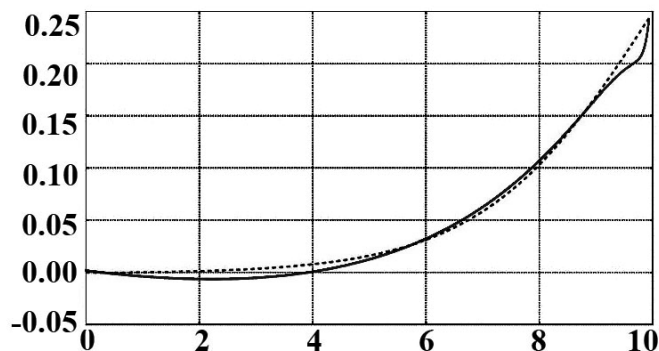


Рис. 4

Кроме исследования сходимости предложенного метода решения обратной задачи была также проверена его устойчивость к неточно заданным исходным данным. Для этого в точно рассчитанную $T_0(z)$ было намеренно внесено 10% случайных искажений. На рис. 4 представлено полученное в этом случае решение для $\mu_1(t)$. Оказалось, что такая погрешность очень слабо влияет на получаемое решение. Предложенный итерационный метод является устойчивым.

Литература

1. Тихонов А.Н. Теорема единственности для уравнения теплопроводности. ДАН,5(1935), с.294-300.
2. Фридман В.И. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма первого рода. – УМН,1956,11,№1.
3. Крянев А.В. Итерационный метод решения некорректных задач, ЖВМиМФ, 1974,14,№1.
4. Дмитриев В.И., Сальников Р.В. Итерационный метод решения интегральных уравнений первого рода. // Прикладная математика и информатика, №15, М. Изд-во МГУ, 2003, с.5-10.
5. Дмитриев В.И. Дмитриева И.В. Итерационный метод аналитического продолжения гравитационного поля. // Прикладная математика и информатика, №36, М. Макс-Пресс, с.67-73. // Iterative method for analytical continuation on the gravity field. Computational Mathematics and Modeling, v.23, №1, p. 51-55.