Дмитриев В. И., Цзяньсюнь Ян

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИКРОСЕЙСМИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

1. Введение.

Микросейсмы – это малые колебания земной поверхности, порождаемые различными природными явлениями: атмосферными процессами, циклонами, цунами, а также небольшими подвижками в земной коре. Фактически микросейсмы представляют сейсмический шум, который несет информацию об источнике этого шума, так о строении земных недр, через которые проходит микросейсмы. Основные микросейсмы низкочастотные с периодом колебаний от 1 сек до 20 сек. Они обычно используются для локации источника микросейсмов [1]. Однако на основе микросейсмов измеряемых на сейсмических станций могут использоваться для оценки состояния земных недр в районе станции. Это микросейсмическое зондирование. Его математическим моделям и посвящена настоящая статья.

2.Постановка задачи микросейсмического зондирования.

При построении математической модели микросейсмического зондирования основным моментом является задания источника колебаний. Если источники расположены в атмосфере или на земной поверхности, то имеем бегущие вдоль земной поверхности волны. Если источники находятся в глубине земных недр, то источником колебания можно выбирать плоскую волну нормально падающую на границу верхних слоев Земли. В настоящей статье мы рассмотрим случай подземных источников.

Пусть имеется изотропная слоистая среда при $z \in [0, H]$ ($z = 0$ – земная поверхности), упругие параметры который зависят только от глубины z. При $z > H$ имеем однородную среду из которой на границу $z = H$ падает плоская волна. Уравнения распространения упругих колебаний в однородном случае имеют вид:

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu(z)\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \quad \text{— для поперечных колебаний,} \tag{1}$$

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\big(\lambda(z)+2\mu(z)\big)\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \quad \text{— для продольных колебаний,} \tag{2}$$

где $\rho(z)$ –плотность среды, $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ –коэффициенты Ламе для упругой среды. Обычно рассматривают преобразование Фурье:

$$U_\alpha(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\alpha(z,t)e^{i\omega t}dt \quad , \quad \alpha = (x,z) \tag{3}$$

для которого уравнения (1) и (2) можно записать в общем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma(z)\frac{\partial U}{\partial z}\right) + \omega^2\rho(z)U = 0 \quad , \quad z \in [0,H] \tag{4}$$

где для поперечных волн $\gamma = \mu$, $U = U_x$, для продольных волн $\gamma = \lambda + 2\mu$, $U = U_z$. на земной поверхности выполняется условие:

$$\frac{dU(z=0)}{dz} = 0 \tag{5}$$

На нижней границе $(z = H)$ выполняется условие возбуждения поля плоской волной, а в точках $z = z_n$ разрыва коэффициента $\gamma(z)$ должны выполняться условия сопряжения:

$$\begin{gathered} U(z_n+0) = U(z_n-0) \quad ; \\ \gamma(z_n+0)\frac{dU(z_n+0)}{dz} = \gamma(z_n-0)\frac{dU(z_n-0)}{dz} \end{gathered} \tag{6}$$

Выведем условия сопряжения поля плоской волной. При $z > H$ имеем однородную среду с $\gamma = \gamma_H = \mathrm{const}$, $\rho = \rho_H = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (4) имеем вид:

$$\frac{d^2U}{dz^2} + k_H^2 U = 0 \quad , \quad k_H = \omega\sqrt{\frac{\rho_H}{\gamma_H}}$$

Тогда при $z > H$ имеем решение в виде:

$$U(z) = Ae^{-ik_H(z-H)} + Re^{ik_H(z-H)}$$

где первый член падающая волна, а второй член отраженная волна. Вычислим производную $U(z)$ и исключим отраженную волну. Получим:

$$U'(z) - ik_H U(z) = -2ik_H A e^{-ik_H(z-H)} \quad \text{при} \quad z > H$$

Тогда при $z = H + 0$ имеем:

$$U'(H+0) - ik_H U(H+0) = -2ik_H A \tag{7}$$

а учитывая условия сопряжения (6), получим, окончательно, условие возбуждения при $z = H - 0$:

$$\gamma(z = H-0)U'(H-0) - ik_H\gamma_H U(H+0) = -2ik_H\gamma_H A \tag{8}$$

Таким образом мы получим формулировку прямой задачи (4) –(8), которая позволяет определить $U(z)$ при $z \in [0, H]$. Следовательно, мы можем вычислить частотную характеристику поля на земной поверхности:

$$U(z=0) = U_0(\omega, \rho(z), \gamma(z)) \tag{9}$$

U_0 –нелинейный оператор действующий на $\rho(z)$ и $\gamma(z)$ и зависящий от частоты ω как от параметра. Обратная задача микросейсмического зондирования заключается в определении $\rho(z)$ и $\gamma(z)$ по измеренному на земной поверхности $U^{(m)}(\omega)$ в зависимости от частоты. Рассмотрим алгоритм расчета $U(z=0)$. Заметим, что $U(z)$, в силу линейности задачи, можно представить в виде:

$$U(z) = U_0(\omega)v(z) \quad \text{где} \quad U_0(\omega) = U(z=0) \tag{10}$$

Функция $v(z)$, согласна (4) –(6), является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} (\gamma(z)v'(z))' + \omega^2\rho(z)v(z) = 0 \quad , \quad z \in [0, H] \\ \hfill v(z=0) = 1; \quad v'(z=0) = 0 \\ \hfill v(z) \text{ и } \gamma(z)v'(z) \text{ – непрерывны} \end{cases} \tag{11}$$

Полученная задача легко решается численно, а для кусочно-постоянных коэффициентов $\gamma(z)$ и $\rho(z)$ можно получить аналитическое решение. Пусть коэффициенты уравнения заданы следующим образом:

$$\begin{cases} \rho(z) = \rho_n \ ; \quad \gamma(z) = \gamma_n \quad \text{при} \quad z \in [z_{n-1}, z_n],\ n \in [1, N],\ z_0 = 0 \\ \qquad\qquad \rho(z) = \rho_H \ ; \ \gamma(z) = \gamma_H \quad \text{при} \quad z > z_N = H \end{cases}$$

Тогда при $z \in [z_{n-1}, z_n]$ решение задачи (11) имеем вид:

$$v(z) = v_{n-1} \cos k_n (z - z_{n-1}) + \frac{v'_{n-1}}{k_n} \sin k_n (z - z_{n-1}) \tag{12}$$

где $v_{n-1} = v(z_{n-1})$; $v'_{n-1} = v'(z_{n-1} + 0)$; $k_n = \omega\sqrt{\frac{\rho_n}{\gamma_n}}$. Продифференцировав (12) и положив $z = z_n = z_{n-1} + h_n$, получим рекуррентную формулу перечета:

$$v_n = v_{n-1} \cos k_n h_n + \frac{v'_{n-1}}{k_n} \sin k_n h_n \tag{13}$$

$$v'_n = -v_{n-1} \frac{k_n \gamma_n}{\gamma_{n+1}} \sin k_n h_n + \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} v'_{n-1} \cos k_n h_n \tag{14}$$

По формулам (13)и(14),зная $v_0 = 1$, $v'_0 = 0$, находим последовательно v_1,v'_1 и т.э. до v_N и v'_N. Зная $v_N = v(z = H+0)$ и $v'_N = v'(z = H+0)$, можно определить, согласно (10):

$$U(z = H + 0) = U_0(\omega) v_N \ ; \ U'(z = H + 0) = U_0(\omega) v'_N \tag{15}$$

Подставив полученные выражения в (7), найдем:

$$U_0(\omega) = \frac{2ik_H A}{ik_H v_N - v'_N} \tag{16}$$

Таким образом мы определили частотную характеристику микросейсма на земной поверхности, по которой решается обратная задача.

3. Решение обратной задачи микросейсмического зондирования.

Прежде чем рассмотреть общий случай решение обратной задачи. Рассмотрим поведение $U_0(\omega)$ для простейших моделей.Пусть дан слой с параметрами γ_1, k_1, h_1, который находится на полупространстве с параметрами γ_H, k_H. Тогда согласно (13 –14) имеем:

$$\upsilon_1 = \cos k_1 h_1 \ ; \ \upsilon_1' = -\frac{k_1\gamma_1}{\gamma_H}\sin k_1 h_1 \tag{17}$$

Подставив эти значения в (16), найдем:

$$U_0(\omega) = \frac{2ik_H\gamma_H A}{ik_H\gamma_H \cos k_1 h_1 + k_1\gamma_1 \sin k_1 h_1} \tag{18}$$

или

$$U_0(\omega) = \frac{2A(\cos k_1 h_1 + i\text{æ}_{1H}\sin k_1 h_1)}{\cos^2 k_1 h_1 + \text{æ}_{1H}\sin^2 k_1 h_1} \tag{19}$$

где

$$\text{æ}_{1H} = \sqrt{\frac{\rho_1\gamma_1}{\rho_H\gamma_H}} \tag{20}$$

Из (19) следует:

$$Q(\omega) = \frac{\operatorname{Lm} U_0(\omega)}{\operatorname{Re} U_0(\omega)} = \text{æ}_{1H}\tan k_1 h_1 \tag{21}$$

Полученная формула позволяет отверждать, что из частотной характеристики микросейсмов на земной поверхности можно определить лишь относительные величины:

$$\text{æ}_{1H} = \sqrt{\frac{\rho_1\gamma_1}{\rho_H\gamma_H}} \ ; \ \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma_1}h_1} \tag{22}$$

Рассмотрим два слоя с параметрами γ_1, k_1, h_1 и γ_2, k_2, h_2, лежащих на однородном полупространстве с параметрами γ_H, k_H. Тогда, зная согласно (17), υ_1 и υ_1', вычислим по формулам (13 –14):

$$\upsilon_2 = \cos k_1 h_1 \cos K - 2h_2 - \text{æ}_{12}\sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2 \ ; \ \text{æ}_{12} = \sqrt{\frac{\rho_1\gamma_1}{\rho_2\gamma_2}} \tag{23}$$

$$\upsilon_2' = -\frac{k_2\gamma_2}{\gamma_H}\left(\sin k_2 h_2 \cos k_1 h_1 + \frac{k_1}{k_2}\cos k_2 h_2 \sin k_1 h_1\right) \tag{24}$$

Подставив (23) и (23) в (16), найдем:

$$U_0(\omega) = \frac{2A(\alpha_{12} + i\text{æ}_{2H}\beta_{12})}{\alpha_{12}^2 + \text{æ}_{2H}^2\beta_{12}^2} \tag{25}$$

где

$$\alpha_{12} = \cos k_1 h_1 \cos K - 2h_2 - æ_{12} \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2$$

$$\beta_{12} = \sin k_2 h_2 \cos k_1 h_1 + \frac{k_1}{k_2} \cos k_2 h_2 \sin k_1 h_1$$

$$æ_{2H}^2 = \sqrt{\frac{\rho_2 \gamma_2}{\rho_H \gamma_H}}$$

Легко видеть,что

$$Q(\omega) = \frac{\operatorname{Lm} U_0(\omega)}{\operatorname{Re} U_0(\omega)} = \frac{æ_{2H} \beta_{12}}{\alpha_{12}} \tag{26}$$

Это означает, что зная $Q(\omega)$, можно определить следующие величины: $k_1 h_1$; $k_2 h_2$; $æ_{12}$; $\frac{k_1}{k_2}$;$æ_{2H}$
или следующие относительные величины:

$$\frac{h_2}{h_1} \; ; \; \frac{\rho_2}{\rho_1} \; ; \; \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \; ; \; \frac{\rho_H \gamma_H}{\rho_1 \gamma_1} \tag{27}$$

Таким образом мы определяем лишь относительные величины, что недостаточно для полного зондирования среды. Однако измерение относительных величин достаточно для мониторинга среды, так как изменение относительных величин характеризует изменение состояния среды, что важно для оценки предвестников землетрясений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович Е. В., Туркин А. С., Новаковский Ю. Л. Наземная локация микросейсмических сигналов для мониторинга гидравлического разрыва пласта // Доклады ТУСУР. -2012. - № 1(25). - Ч. 1. - С. 104-112.