Л.В. Дородницын[1]

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ ТЕНЗОР ФУНКЦИИ ТОКА КАК ОСНОВА МОДЕЛИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ЗАДАННЫМИ СТАТИСТИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ*

Введение

Современные задачи моделирования турбулентных течений газа и жидкости, как правило, требуют детального описания нестационарных структур. В связи с этим численные алгоритмы используют вихреразрешающие подходы: прямое моделирование (DNS) либо методы крупных вихрей (Large Eddy Simulation: LES). В сложных индустриальных задачах, особенно при очень высоких числах Рейнольдса, имеющиеся вычислительные мощности всё еще не позволяют рассчитывать турбулентность с помощью уравнений Навье–Стокса. Применение различных алгоритмов LES также ограничивается их высокой стоимостью, что заставляет разрабатывать комбинированные подходы.

В настоящее время активно применяются искусственные (синтетические) турбулентные поля, имитирующие реальную физическую турбулентность. Начиная с работы Крайчнана 1970 года [1], это направление продолжает развитие уже несколько десятилетий.

Выделяются основные подходы к генерации искусственного турбулентного поля. Наибольшее распространение получили спектральные методы, в которых поле строится в виде суммы гармоник Фурье, имеющих детерминированные и/или стохастические параметры. К этому направлению относится работа Крайчнана [1] и ряд других, среди которых упомянем [2, 3].

Альтернативой спектральным подходам является метод численной фильтрации белого шума [4 – 8], заключающийся в свертке случайного поля с заданным детерминированным ядром. Еще один класс методов основан на стохастическом описании динамики турбулентных частиц [9, 10].

Технология расчета сложных турбулентных течений, сформировавшаяся за последние два-три десятилетия, состоит в поэтапном моделировании. Вначале рассчитывается базовая картина

---

[1]С.н.с. факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: dorodn@cs.msu.ru

*Работа выполнена в рамках проекта госбюджетной темы НИР № 2.9.21 ВМК МГУ.

течения в терминах осредненных моделей турбулентности (RANS). Как правило, вычисляется стационарное решение, для чего обычно используется относительно грубая сетка. Результатом расчетов RANS являются поля газодинамических величин и статистических параметров турбулентности. Эти данные используются в генераторе синтетических пульсаций, которые, в свою очередь, служат начальными или граничными условиями в зоне детального LES-моделирования.

В прикладных газодинамических задачах, где встречаются пограничные слои, струи и другие элементы течения, турбулентность обладает анизотропией и неоднородностью. Тех же свойств надо ожидать от синтетического поля. В настоящей работе мы обсуждаем только те результаты, которые касаются анизотропной турбулентности. Вопросы, связанные с неоднородностью поля, останутся за рамками нашего рассмотрения.

По устоявшемуся мнению [11], синтетическое турбулентное поле должно воспроизводить ряд свойств реальной физической турбулентности. Прежде всего, поле пульсационных скоростей практически является бездивергентным (несжимаемым, соленоидальным). Далее, требуется удовлетворить статистические характеристики поля, среди которых наиболее важны: кинетическая энергия, тензор напряжений Рейнольдса, масштабы турбулентности, энергетический спектр.

Все перечисленные выше свойства турбулентного поля определяются тензором двухточечных ковариаций скоростей второго порядка (в инженерной терминологии чаще употребляется слово «корреляции»). В случае однородной турбулентности ключевым инструментом исследования является преобразование Фурье, с помощью которого получается спектральный тензор ковариаций скоростей. Сведений о структуре этих тензоров на современном этапе развития науки, к сожалению, имеется довольно мало.

Вопрос детально исследован для случая *изотропной* турбулентности и изложен в классических монографиях [12 – 14]. Описание сводится к замкнутым формулам, использующим скалярную спектральную плотность турбулентной энергии.

Много внимания уделялось *осесимметричной* турбулентности [15 – 18] – модели, важной с точки зрения технических приложений. Чандрасекхар [15] построил тензор ковариаций скоростей в самом общем виде. Кершен и Глибе [16, 17] внесли уточнения в модель Чандрасекхара, установив критерии ее корректности, а также выдвинули дополнительные гипотезы, конкретизирующие форму тензора ковариаций. С другой стороны, ряд предположений относительно свойств осесимметричной турбулентности подытожены в [18].

В общем случае *анизотропной* турбулентности предъявляется ряд требований к физическому и спектральному тензорам ковариаций скоростей [12]. Они следуют из условия несжимаемости поля и свойств ковариаций как таковых. Несмотря на эти ограничения, остаются практически неисчерпаемые возможности для поведения турбулентной статистики.

Что касается синтетической турбулентности, то методы генерации анизотропного поля, как правило, обходят стороной построение тензора ковариаций. Чаще всего применяется метод масштабирования [19]. Вначале генерируется однородное изотропное бездивергентное поле с характерным масштабом турбулентности. Полученное поле затем подвергается линейному преобразованию в каждой точке физического пространства в соответствии с заданным полем тензора рейнольдсовых напряжений, к которому применяется факторизация Холецкого. Такой подход использован в [3, 4], тогда как в [2] выполнялось спектральное разложение тензора. Метод приводит к потере бездивергентного вида поля скоростей и, кроме того, не позволяет получить анизотропию турбулентных масштабов.

Автоматическое соблюдение условия несжимаемости поля скоростей обеспечивается, если метод строит поле функции тока, из которого получается поле скоростей путем применения оператора ротора. Такой прием использовался рядом авторов методов фильтрации [5 – 8] при получении как двумерной, так и трехмерной турбулентности. В последнем случае функция тока представляет собой трехмерное векторное поле.

В литературе относительно немного примеров, где при построении турбулентного поля напрямую учитывались двухточечные корреляции. Рандомизированный спектральный метод К.К. Сабельфельда и соавторов [20, 21] использует в качестве входных данных тензор ковариаций скоростей в самом общем виде. При этом структура тензора не оговаривается, за исключением изотропного случая. Успешный подход к построению анизотропного спектрального тензора по заданным рейнольдсовым напряжениям найден в наших работах [22, 23], но там не рассматривались остальные характеристики анизотропии.

Методы фильтрации явно учитывают двухточечные корреляции в физическом пространстве и вытекающие из них масштабы турбулентности [4 – 8]. Вместе с тем авторы нередко использовали сильно упрощенные представления, такие как изотропный случай, гауссовы корреляционные функции и т.п. Отметим недавние работы [7, 8], в которых предложен простой алгоритм генерации турбулентного поля, удобный в параллельной реализации, и опирающийся на преобразование

Фурье при построении фильтра по заданному энергетическому спектру достаточно общего вида [8].

В рамках модели осесимметричной турбулентности в [8] были построены анизотропные фильтры, дающие правильное воспроизведение масштабов турбулентности, но не отвечающие всему набору рейнольдсовых напряжений. Авторами [24, 25] напрямую был использован спектральный тензор ковариаций функции тока, благодаря чему предложенный тензорный метод фильтрации позволил получать поле, согласованное как с тензором напряжений Рейнольдса, так и с масштабами осесимметричной турбулентности.

Настоящая работа, продолжая исследования [24], расширяет применение тензора ковариаций функции тока на случай трехмерной анизотропии турбулентного поля. Для анизотропной турбулентности общего вида строится семейство моделей, согласуемых с тензором рейнольдсовых напряжений. Выделен специальный класс турбулентных полей, для которого строится тензор ковариаций, отвечающий как рейнольдсовым напряжениям, так и масштабам турбулентности.

Помимо всего сказанного, главная цель данной статьи – разделить проблему построения турбулентного поля с заданными количественными и качественными свойствами на две части. Предварительно нужно построить спектральный тензор ковариаций функции тока, который аккумулирует все необходимые свойства. После этого появляется непосредственный путь к конструкции поля.

В первом разделе работы описываются основные характеристики однородной турбулентности. Особое внимание уделяется тензору ковариаций функции тока – недостаточно изученному объекту. Во втором разделе предлагается модель спектрального тензора для наиболее общего случая анизотропного поля и ставится задача нахождения тензора по заданным параметрам турбулентности. Третий раздел посвящен специальному подклассу турбулентности, который охватывает осесимметричный случай и расширяет его. Для этой модели полностью решается задача построения тензора ковариаций. Раздел 4 возвращает нас к более общей модели турбулентности, для которой задача решается с помощью выбора системы координат. В пятом разделе кратко излагается процедура генерации поля скоростей по заданному тензору ковариаций. Даются явные формулы для выделенного подкласса турбулентности.

1. Статистические характеристики турбулентности и связь между ними

Рассмотрим формальное разложение поля скоростей на фоновую и пульсационную составляющие:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t), \qquad \langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\rangle = \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}), \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{u}' = 0.$$

Традиционно $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ считается случайной функцией с математическим ожиданием $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$, не изменяющимся во времени, а поле пульсаций $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)$ несжимаемое и повсюду имеет нулевое среднее. В дальнейшем речь пойдет исключительно о пульсационных скоростях, и в обозначениях будем опускать штрихи.

Тензор двухточечных пространственных ковариаций скоростей $\mathbf{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$ задается выражением

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) \equiv \langle u_i(\boldsymbol{x},t)\, u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)\rangle,\ \ i,j = 1{,}2{,}3.$$

Случайное поле называется *однородным*, если любые его статистические характеристики не изменяются при сдвиге точки пространства $\boldsymbol{x}$. Тем самым задается тензор $\mathbf{R}(\boldsymbol{r})$, зависящий от радиус-вектора между двумя точками. Преобразование Фурье ставит в соответствие $\mathbf{R}(\boldsymbol{r})$ спектральный тензор ковариаций скоростей $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$, где $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\, d\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Свойства тензора $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$ вытекают из теоремы Крамера:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{\Phi}^T(\boldsymbol{k}) \geq 0,\ \ \forall \boldsymbol{k},$$

а также из бездивергентности поля скоростей:

$$k_i\Phi_{ij} = 0, \qquad \Phi_{ij}k_j = 0. \tag{2}$$

Тензор напряжений Рейнольдса R_{ij} представляет собой одноточечную ковариацию скоростей, т.е.

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\boldsymbol{r} = \mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}. \tag{3}$$

Кинетическая энергия турбулентности σ^2 определяется через след тензора рейнольдсовых напряжений:

$$2\sigma^2 \equiv \langle u_i^2(\mathbf{0},t)\rangle = R_{ii}\,.$$

Остановимся на частном случае анизотропной турбулентной среды, который условно будем называть *ортотропной* моделью. Пусть любые постоянные тензоры, характеризующие пространственно-однородное поле, имеют одинаковые главные оси, т.е. их матрицы приобретают диагональный вид в одном и том же ортогональном базисе.

Сюда относятся такие широко известные классы сред, как изотропная турбулентность и осесимметричная модель [15]. Рассматриваемый нами класс намного шире упомянутых, однако, скорее всего, намного уже того разнообразия, которое встречается в реальных турбулентных течениях.

Заметим, что речь идет только о постоянных тензорах. Так, например, физический и спектральный тензоры двухточечных ковариаций скоростей $R_{ij}(\boldsymbol{r})$ и $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k})$ не являются диагональными ни в одном фиксированном базисе даже при изотропной турбулентности.

При наличии единого базиса вводятся такие параметры, как масштабы турбулентности различного вида. Для их вычисления будет полезна матрица безразмерных корреляционных коэффициентов

$$\bar{R}_{ij}(\boldsymbol{r}) = \frac{R_{ij}(\boldsymbol{r})}{\sqrt{R_{ii}R_{jj}}} = \frac{\langle u_i(\mathbf{0},t)\, u_j(\boldsymbol{r},t)\rangle}{\left(\langle u_i^2(\mathbf{0},t)\rangle\, \langle u_j^2(\mathbf{0},t)\rangle\right)^{1/2}}\,, \quad i,j = 1,2,3. \tag{4}$$

Обозначим главные оси через (x,y,z). Компоненты векторов и тензоров по этим осям будем снабжать одноименными нижними индексами.

Интегральные продольные масштабы турбулентности вычисляются по формулам:

$$l_{xx} = \int_0^\infty \bar{R}_{xx}(x,0,0)\, dx\,, \qquad l_{yy} = \int_0^\infty \bar{R}_{yy}(0,y,0)\, dy\,,$$
$$l_{zz} = \int_0^\infty \bar{R}_{zz}(0,0,z)\, dz\,. \tag{5}$$

Кроме указанных величин, вводятся еще шесть поперечных интегральных масштабов, например:

$$l_{y,xx}^{\perp} = \int_0^\infty \bar{R}_{xx}(0,y,0)\, dy\,.$$

Будем считать, что из расчета RANS известно осредненное поле скоростей $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ и средние характеристики турбулентности: тензор напряжений Рейнольдса $\mathbf{R}$, кинетическая энергия турбулентности σ^2, скорость ее диссипации ε и, возможно, интегральные масштабы.

Нам необходимо смоделировать реализацию случайного поля $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)$, обладающую указанными количественными характеристиками и свойством несжимаемости. Стратегия состоит в том, чтобы вначале построить тензор ковариаций, точнее, его спектральный образ, а затем сгенерировать поле, удовлетворяющее этому тензору.

Процедура генерации случайного поля по заданному тензору ковариаций была ранее разработана в общих чертах как для спектральных методов [21], так и для методов фильтрации [8, 24]. К этой теме мы вернемся в конце настоящей работы. Основные усилия следует направить на алгоритмы построения спектрального тензора.

Тензор ковариаций функции тока

Поскольку трехмерное поле пульсаций скоростей соленоидальное, для него существует векторный потенциал, называемый функцией тока. Удобным инструментом для получения искомого поля является построение поля функции тока, к которому затем применяется оператор ротора. Это автоматически гарантирует бездивергентность поля скоростей, и потому ряд авторов [5 – 8] пошли этим путём.

Пусть имеется трехмерное векторное поле $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t)$, определяющее поле скорости как $\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$, или

$$u_i(\boldsymbol{x},t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t). \tag{6}$$

Составим симметричный тензор ковариаций функции тока в физическом пространстве

$$C_{ij}(\boldsymbol{r}) = \langle \psi_i(\boldsymbol{x},t)\, \psi_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t) \rangle.$$

Его образ Фурье есть тензор $\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k})$, который является симметричным и неотрицательным. Нас интересует тензор ковариаций скоростей

$$R_{ij}(\boldsymbol{r}) = \langle u_i(\boldsymbol{x},t)\, u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t) \rangle$$

с образом Фурье $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k})$.

При наличии связи между векторными полями (6) существует алгебраическое соотношение между тензорами $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$ и $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$. Точнее, спектральный тензор ковариаций функции тока $\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k})$ однозначно определяет спектральный тензор ковариаций скорости $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k})$ в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\, k_l k_p \hat{C}_{mq} & \\ = k^2 \delta_{ij} \hat{C}_{mm} + k_i k_l \hat{C}_{jl} + k_j k_m \hat{C}_{mi} - \delta_{ij} k_l k_m \hat{C}_{ml} & \\ - k_i k_j \hat{C}_{mm} - k^2 \hat{C}_{ji}\,. & \end{aligned} \tag{7}$$

Выражение (7) устанавливается в [24] по аналогии с процедурой, проделанной в [12, p.38] при получении тензора ковариаций завихренности.

Итак, тензор ковариаций скоростей определяется однозначно при заданных ковариациях функции тока. В то же время в задании тензора ковариаций функции тока $\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k})$ есть некоторый произвол: различные варианты тензора $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$ могут приводить к одному и тому же тензору $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$.

Утверждение. Пусть симметричный тензор имеет вид

$$\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k}) = \hat{C}_{ij}^{(0)}(\boldsymbol{k}) + A(\boldsymbol{k})\, k_i k_j + b_i(\boldsymbol{k})\, k_j + b_j(\boldsymbol{k})\, k_i\,.$$

Тогда в выражении (9) играет роль только первое слагаемое $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$, т.е.

$$\Phi_{ij} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\, k_l k_p \hat{C}_{mq}^{(0)}\,.$$

Доказательство. Подставляя каждое слагаемое, начиная со второго, в тензор (7), который запишем в виде

$$\Phi_{mq} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\, k_l k_p \hat{C}_{ij}\,,$$

получаем выражения:

$$A\, \varepsilon_{ilm} k_l k_i = 0, \qquad b_i\, \varepsilon_{ilm} k_l k_i = 0, \qquad b_j\, \varepsilon_{jpq} k_p k_j = 0,$$

в силу свойства векторного произведения коллинеарных векторов, благодаря чему исчезают соответствующие члены. ■

Ранее говорилось, что необходимым для тензора $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$ является условие ортогональности волновому вектору (2), вытекающее из несжимаемости поля скоростей. Это свойство заложено в формуле (7) ввиду ее корректности, однако оно легко проверяется непосредственно по аналогии с техникой предыдущего доказательства.

Как всякий спектральный тензор ковариаций, $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$ должен быть неотрицательным. В следующих разделах при построении и анализе этого тензора мы будем ориентироваться на следующую его связь с тензором $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$.

Утверждение. Если спектральный тензор ковариаций функции тока неотрицателен, то неотрицательным будет и тензор ковариаций скоростей:

$$\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k}) \geq 0, \forall \boldsymbol{k} \implies \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k}) \geq 0, \forall \boldsymbol{k}.$$

Доказательство. По определению дано:

$$\hat{C}_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0, \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3.$$

Оценим квадратичную форму

$$\Phi_{ij}\xi_i\xi_j = \varepsilon_{ilm}\xi_i k_l\, \varepsilon_{jpq}\xi_j k_p\, \hat{C}_{mq}\,.$$

Введем вектор $\boldsymbol{\eta}$, равный

$$\eta_m = \varepsilon_{ilm}\xi_i k_l\,.$$

Тогда

$$\Phi_{ij}\xi_i\xi_j = \hat{C}_{mq}\eta_m\eta_q \geq 0.$$

Утверждение доказано. ■

2. Построение спектрального тензора ковариаций функции тока по заданным параметрам турбулентности

Начиная с этого раздела вместо общего случая двухточечных корреляций, описывающих турбулентное поле, будем рассматривать некоторую достаточно широкую модель. По-видимому, она не является универсальной, будучи предназначенной для конкретной цели – получения синтетического поля пульсационных скоростей.

Спектральный тензор ковариаций функции тока будем строить в следующем виде:

$$\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k}) = \hat{C}(\boldsymbol{k})\, M_{ij}\,, \qquad \hat{C}(\boldsymbol{k}) > 0,\ \ \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3. \tag{8}$$

От волнового вектора зависит только скалярный коэффициент $\hat{C}(\boldsymbol{k})$, тогда как матрица $\mathbf{M}$ постоянна. Частичное обоснование такого представления тензора было дано в предыдущем разделе.

Стоит задача о выборе параметров модели (8) в соответствии со статистическими данными турбулентного поля: тензором рейнольдсовых напряжений и – если таковые определяются – продольными интегральными масштабами и энергетическим спектром. Разобьем задачу на две части:

- для фиксированной функции $\hat{C}(\boldsymbol{k})$ найти элементы матрицы M_{ij}, при которых удовлетворяются заданные рейнольдсовы напряжения R_{ij};
- построить скалярную функцию $\hat{C}(\boldsymbol{k})$, приводящую к заданным масштабам турбулентности и согласованную с некоторым энергетическим спектром.

Первую задачу предстоит решить в данном разделе. Вторую задачу можно строго сформулировать только для случая, когда определено понятие масштабов турбулентности, и ее пока отложим.

Построение тензора ковариаций по известным рейнольдсовым напряжениям

В самом общем случае параметров $\hat{C}(\boldsymbol{k})$ и **R** поставим задачу о нахождении матрицы **M**. Основой решения послужит связь между двумя спектральными тензорами ковариаций (7).

К выражению (8) применим преобразование (7) и получим:

$$\begin{aligned}\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) &= \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\, k_l k_p \hat{C}(\boldsymbol{k}) M_{mq} \\ &= \hat{C}(\boldsymbol{k})\big[k^2\delta_{ij}M_{mm} - k^2 M_{ji} + k_i k_l M_{jl} + k_j k_m M_{mi} \\ &\quad - \delta_{ij}k_l k_m M_{ml} - k_i k_j M_{mm}\big]\,.\end{aligned} \tag{9}$$

(В сумме сгруппированы члены, содержащие k^2.)

Тензор рейнольдсовых напряжений R_{ij} есть результат интегрирования (3) спектрального тензора $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k})$, заданного правой частью (9). В ходе процедуры будут встречаться величины

$$T_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{C}(\boldsymbol{k})\, k_i k_j\, d\boldsymbol{k}. \tag{10}$$

Тогда тензор **R** приобретает форму

$$\begin{aligned}R_{ij} &= \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\, T_{lp} M_{mq} \\ &= T_{ll}M_{mm}\delta_{ij} - T_{ll}M_{ji} + T_{il}M_{jl} + T_{jm}M_{mi} - T_{lm}M_{ml}\delta_{ij} - T_{ij}M_{mm}\,.\end{aligned} \tag{11}$$

По условию известны матрицы R_{ij} и T_{ij}. (Последняя вычисляется при заданной функции $\hat{C}(\boldsymbol{k})$.) В данном контексте равенство (11) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестной матрицы M_{ij}. Эту систему формально представим как

$$\mathcal{A}_{ijlm} M_{lm} = R_{ij}\,,$$

где в роли матрицы выступает четырехвалентный тензор

$$\mathcal{A}_{ijlm} = \varepsilon_{ipl}\varepsilon_{jrm}\, T_{pr}$$
$$= T_{pp}\delta_{ij}\delta_{lm} - T_{pp}\delta_{jl}\delta_{im} + T_{im}\delta_{jl} + T_{jl}\delta_{im} - T_{ml}\delta_{ij} - T_{ij}\delta_{lm}\,.$$

Оператор не обладает свойствами, такими как положительность или диагональное преобладание, которые были бы достаточными для однозначной разрешимости системы (11). Эту проблему обсудим в следующих разделах. Здесь укажем некоторые свойства полученной системы.

Оператор симметричен:

$$\mathcal{A}_{ijlm} = \mathcal{A}_{lmij}\,.$$

У системы (11) существует вторая симметрия:

$$\mathcal{A}_{ijlm} = \mathcal{A}_{jiml}$$

при условии симметрии тензора $T_{ij} = T_{ji}$, которая следует из определения (10). Данный факт равносилен практически важному свойству: если симметричны матрицы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{T}$, то симметрична и матрица $\mathbf{M}$:

$$R_{ij} = R_{ji}\,,\ \ T_{ij} = T_{ji}\ \ \Rightarrow\ \ M_{ij} = M_{ji}\,.$$

Тензор $\mathbf{T}$ можно определить для произвольного турбулентного поля, безотносительно рассматриваемой в работе модели: с точностью до постоянного множителя, тензор равен

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \hat{C}_{mm}(\boldsymbol{k})\, k_i k_j\, d\boldsymbol{k}}{\int_{\mathbb{R}^3} \hat{C}_{mm}(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}}\,.$$

Из вышеизложенного следует, что имеется возможность построить тензор ковариаций – а значит, и турбулентное поле, – в соответствии с заданными напряжениями Рейнольдса. В отличие от алгоритма, предложенного в [22, 23], где тензор ковариаций скоростей строится единственным образом, мы обладаем большим семейством моделей, параметры которого содержатся в тензоре T_{ij}. Выбор этих параметров должен быть обусловлен как физическими данными, в частности, масштабами турбулентности, так и соображениями корректности математической задачи.

3. Спектральный тензор ковариаций функции тока для специального класса турбулентных полей

Наличие общего ортогонального базиса турбулентных тензоров позволяет решить задачу построения полного спектрального тензора в явном виде. При этом удовлетворяется как тензор рейнольдсовых напряжений, так и интегральные масштабы турбулентности.

Нахождение постоянной матрицы по заданным рейнольдсовым напряжениям

В выбранной системе координат $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ тензоры имеют диагональный вид:

$$\mathbf{R} = \mathrm{diag}\left(\sigma_x^2,\ \sigma_y^2,\ \sigma_z^2\right), \qquad \mathbf{T} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{l_x^2},\ \frac{1}{l_y^2},\ \frac{1}{l_z^2}\right),$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – среднеквадратичные скорости турбулентных пульсаций, l_x, l_y, l_z – некоторые линейные масштабы. Отсюда следует, что матрица $\mathbf{M}$ также диагональная:

$$\mathbf{M} = \mathrm{diag}\left(M_x,\ M_y,\ M_z\right).$$

Систему уравнений (11) выпишем поэлементно, с учетом вида матриц. Не вдаваясь в детали длинного, но несложного вывода, приведем окончательное выражение:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{l_z^2} & \frac{1}{l_y^2} \\ \frac{1}{l_z^2} & 0 & \frac{1}{l_x^2} \\ \frac{1}{l_y^2} & \frac{1}{l_x^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 \\ \sigma_z^2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Данная система имеет единственное решение, которое дается формулами:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\, l_y^2 l_z^2 \left(\frac{\sigma_y^2}{l_y^2} + \frac{\sigma_z^2}{l_z^2} - \frac{\sigma_x^2}{l_x^2}\right), \\ M_y &= \frac{1}{2}\, l_x^2 l_z^2 \left(\frac{\sigma_x^2}{l_x^2} + \frac{\sigma_z^2}{l_z^2} - \frac{\sigma_y^2}{l_y^2}\right), \\ M_z &= \frac{1}{2}\, l_x^2 l_y^2 \left(\frac{\sigma_x^2}{l_x^2} + \frac{\sigma_y^2}{l_y^2} - \frac{\sigma_z^2}{l_z^2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Вывод состоит в том, что для модели, называемой здесь ортотропной турбулентностью, искомая матрица определяется однозначно. Вопрос существования и единственности решения снят.

Физическая корректность модели связана с неотрицательностью тензоров ковариаций скорости $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$ и функции тока $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$. Если указанным свойством обладает тензор $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$, то оно передается и тензору $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k})$, что было установлено в Разделе 1. Ковариационный тензор (8) неотрицателен, если таковой является матрица $\mathbf{M}$. В нашем случае проблема сводится к неотрицательности диагональных элементов, выписанных в (13), для которой необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\frac{\sigma_x^2}{l_x^2} \le \frac{\sigma_y^2}{l_y^2} + \frac{\sigma_z^2}{l_z^2}\,, \qquad \frac{\sigma_y^2}{l_y^2} \le \frac{\sigma_x^2}{l_x^2} + \frac{\sigma_z^2}{l_z^2}\,, \qquad \frac{\sigma_z^2}{l_z^2} \le \frac{\sigma_x^2}{l_x^2} + \frac{\sigma_y^2}{l_y^2}\,. \tag{14}$$

Выражения (14) налагают ограничения на физические свойства турбулентного поля. Пусть l_x, l_y, l_z – некоторые масштабы турбулентности. Это означает, что отношения среднеквадратичных скоростей пульсаций к этим масштабам должны не слишком сильно отличаться для разных направлений.

Построение спектральной функции по заданным интегральным масштабам

Если, помимо тензора рейнольдсовых напряжений, даны продольные интегральные масштабы турбулентности l_x, l_y, l_z, мы располагаем возможностью манипулировать скалярной спектральной функцией $\hat{C}(\boldsymbol{k})$. Относительно этой функции примем еще одну гипотезу, позаимствовав идею у авторов [16]. Согласно этой гипотезе, спектральная функция $\hat{C}(\boldsymbol{k})$ зависит от единственного скалярного параметра, который можно трактовать как безразмерное анизотропное волновое число:

$$\hat{C}(\boldsymbol{k}) = 2 l_x l_y l_z\, f(\xi), \qquad \xi^2 = l_x^2 k_x^2 + l_y^2 k_y^2 + l_z^2 k_z^2, \tag{15}$$

где функция $f(\xi)$ – безразмерная, положительная и четная.

Значения продольных интегральных масштабов (5) следуют из выражений для диагональных элементов физического тензора ковариаций скоростей. Вывод общей формулы достаточно провести на примере величины $R_{xx}(x, 0{,}0)$.

Вначале выпишем интересующую нас компоненту спектрального тензора ковариаций скоростей (9), проведя элементарные алгебраические преобразования:

$$\Phi_{xx}(\boldsymbol{k}) = \hat{C}(\boldsymbol{k})\left(k_z^2 M_y + k_y^2 M_z\right).$$

Отсюда на основе определения (1) получим выражение для соответствующей компоненты физического тензора

$$R_{xx}(x, 0{,}0) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{xx}(\boldsymbol{k})\, e^{i k_x x}\, d\boldsymbol{k} = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{C}(\boldsymbol{k})\left(k_z^2 M_y + k_y^2 M_z\right) e^{i k_x x}\, d\boldsymbol{k}.$$

Подставив формулу (15) для $\hat{C}(\boldsymbol{k})$ и выполнив замену переменных

$$\xi_x = l_x k_x,\;\; \xi_y = l_y k_y,\;\; \xi_z = l_z k_z,$$
$$x = l_x \zeta_x,\;\; y = l_y \zeta_y,\;\; z = l_z \zeta_z,$$

получим:

$$R_{xx}(x, 0{,}0) = 2\int_{\mathbb{R}^3} f(\xi)\left(\frac{M_y}{l_z^2}\xi_z^2 + \frac{M_z}{l_y^2}\xi_y^2\right) e^{i\xi_x \zeta_x}\, d\boldsymbol{\xi} = \left(\frac{M_y}{l_z^2} + \frac{M_z}{l_y^2}\right) I_{xx}(\zeta_x).$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что в линейной комбинации два интеграла равны друг другу:

$$I_{xx}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\xi)\left(\xi_y^2 + \xi_z^2\right) e^{i\xi_x\zeta}\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Как видим, задача нахождения анизотропного тензора ковариаций скоростей свелась к *изотропному* случаю, хорошо исследованному в литературе.

Ранее, в ходе построения системы (12), мы получили уравнение

$$\frac{M_y}{l_z^2} + \frac{M_z}{l_y^2} = R_{xx}(0{,}0{,}0) \equiv \sigma_x^2 \,.$$

Условием непротиворечивости является равенство

$$I_{xx}(0) \equiv 2\int_{\mathbb{R}^3} \xi_x^2\, f(\xi)\, d\boldsymbol{\xi} \equiv \frac{2}{3}\int_{\mathbb{R}^3} \xi^2\, f(\xi)\, d\boldsymbol{\xi} \equiv \frac{8\pi}{3}\int_0^\infty \xi^4\, f(\xi)\, d\xi = 1\,.$$

означающее требование к нормировке изотропной спектральной функции $f(\xi)$ и к существованию ее моментов до 4-го порядка включительно. Тем самым $I_{xx}(\zeta)$ удовлетворяет определению продольной корреляционной функции Кармана–Ховарта [12, 13].

Попутно, согласно формуле (10), подтверждается значение элемента

$$T_x \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \hat{C}(\boldsymbol{k})\, k_x^2\, d\boldsymbol{k} = \frac{1}{l_x^2}\,.$$

Свойства изотропных корреляционных функций описаны, например, в [12]. В частности, они представимы в виде одномерных интегралов:

$$I_{xx}(\zeta) = 4\pi\int_0^\infty f(\xi)\, \xi^4\, \Theta(\xi\zeta)\, d\xi\ ,\ \ \Theta(\eta) = 2\left(\frac{\sin\eta}{\eta^3} - \frac{\cos\eta}{\eta^2}\right).$$

Перейдем к нахождению безразмерного коэффициента корреляции (4). Из предыдущего следует:

$$\bar{R}_{xx}(x,0{,}0) = \frac{R_{xx}(x,0{,}0)}{R_{xx}(0{,}0{,}0)} = I_{xx}(\zeta_x).$$

Продольный интегральный масштаб турбулентности (5) после подстановки и замены переменных интегрирования приводит к выражениям:

$$l_{xx} = \int_0^\infty \bar{R}_{xx}(x,0{,}0)\, dx = l_x\int_0^\infty I_{xx}(\zeta_x)\, d\zeta_x\,.$$

Оставшийся безразмерный интеграл относится к изотропному случаю и может быть вычислен в сферической системе координат:

$$\int_0^\infty I_{xx}(\zeta)\,d\zeta = 4\pi \int_0^\infty f(\xi)\,\xi^4 d\xi \int_0^\infty \Theta(\xi\zeta)\,d\zeta$$
$$= 4\pi \int_0^\infty f(\xi)\,\xi^3 d\xi \cdot \int_0^\infty \Theta(\eta)\,d\eta = 2\pi^2 \int_0^\infty f(\xi)\,\xi^3 d\xi = 1.$$

Последнее равенство – это еще одно условие, налагаемое на изотропную спектральную функцию, которое обеспечивает равенство интегрального масштаба заданной величине:

$$l_{xx} = l_x\,.$$

Таким образом, задание скалярного коэффициента $\hat{C}(\boldsymbol{k})$ в виде масштабированной изотропной спектральной функции (15) приводит к желаемым продольным интегральным масштабам турбулентности

$$l_{xx} = l_x\,,\;\; l_{yy} = l_y \;\; l_{zz} = l_z\,.$$

При этом результат не зависит от конкретного вида функции $f(\xi)$, то есть энергетического спектра, его асимптотики и т.д. Одни и те же значения интегральных масштабов получаются при любых допустимых рейнольдсовых напряжениях.

Надо сказать, ситуация относительно поперечных интегральных масштабов турбулентности намного сложнее. Выкладки, аналогичные проделанным выше, также выявляют связь предложенной анизотропной модели с изотропной турбулентностью. В результатах фигурирует поперечная корреляционная функция Кармана–Ховарта, однако продольная функция не исчезает. Турбулентные масштабы зависят от средних скоростей пульсаций. Свободных параметров модели недостаточно для управления дополнительными характеристиками анизотропии турбулентности. Данный вопрос выходит за рамки этой статьи.

Осталось решить вопрос о задании изотропной спектральной функции $f(\xi)$. В рамках изотропной турбулентности эта функция связана с энергетическим спектром, примеры которого широко известны в литературе. В нашем случае предполагается брать за основу те же изотропные функции и подвергать их анизотропному масштабированию (15).

Приведем примеры спектральной функции $f(\xi)$. Турбулентному спектру Липмана соответствует формула

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi^2[1+\xi^2]^3}\,. \tag{16}$$

Спектральная функция Кармана–Пао [8] приобретает вид

$$f(\xi) = \frac{55\,\beta^4}{36\pi^2\,[1+\beta^2\xi^2]^{17/6}}\,, \qquad \beta = \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(5/6)}\,. \tag{17}$$

Следует отметить, что обе модели дают физически неверную асимптотику при $\xi \to \infty$, по причине которой у функции $f(\xi)$ отсутствует шестой момент, что влечет бесконечную скорость убывания турбулентной энергии. Проблема решается введением поправок: например, в [3] рассматривается модифицированный спектр Кармана–Пао, учитывающий полное затухание турбулентности на масштабе Колмогорова. Уточнение модели достигается ценой усложнения аналитических формул.

Осесимметрическая турбулентность

Существует важный с практической точки зрения класс турбулентных течений, статистика которых обладает осевой (цилиндрической) симметрией. С высокой степенью адекватности можно полагать, что в некотором – продольном – направлении пульсационное поле скоростей имеет одни характеристики, тогда как в поперечной плоскости характеристики другие, но не зависят от направления. Кроме того, в реальных физических задачах направление продольной оси, как правило, известно из самой постановки.

Чандрасекхар [15] вывел общее представление тензора ковариаций скоростей в случае осесимметричной турбулентности с выделенным направлением, определяемым вектором $\boldsymbol{\lambda}$, $\lambda_i\lambda_i = 1$. Спектральный тензор имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \hat{F}(\boldsymbol{k})\left(k^2\delta_{ij} - k_ik_j\right) \\ + \hat{G}(\boldsymbol{k})\big[(k^2 - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\lambda})^2)\delta_{ij} - k_ik_j - k^2\lambda_i\lambda_j \\ + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\lambda})\left(k_i\lambda_j + k_j\lambda_i\right)\big].\end{aligned} \tag{18}$$

Кершен и Глибе [16] приняли гипотезу о пропорциональности двух функций

$$\hat{G}(\boldsymbol{k}) = \alpha\hat{F}(\boldsymbol{k}), \tag{19}$$

где константа α определяется из условия соответствия тензору рейнольдсовых напряжений, о чём поговорим ниже.

Авторы [24] предложили тензор ковариаций функции тока в форме

$$\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k}) = \hat{F}(\boldsymbol{k})\delta_{ij} + \hat{G}(\boldsymbol{k})\lambda_i\lambda_j\,, \tag{20}$$

откуда получили тензор ковариаций скоростей (7), совпадающий с выражением Чандрасекхара (18).

Если принять допущение (19), то тензор $\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k})$ приобретает вид

$$\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k}) = \hat{F}(\boldsymbol{k})\left(\delta_{ij} + \alpha\lambda_i\lambda_j\right), \tag{21}$$

являясь подмножеством класса (8), рассматриваемого в данной работе.

Пусть выделенное направление $\boldsymbol{\lambda}$ совпадает с осью x. Тогда $\sigma_x \equiv \sigma_a$, $\sigma_y = \sigma_z \equiv \sigma_t$ – среднеквадратичные скорости турбулентных пульсаций в осевом и поперечном направлениях; $l_x \equiv l_a$, $l_y = l_z \equiv l_t$ – соответствующие масштабы турбулентности.

В данном случае матрица (21) становится диагональной:

$$\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k}) = \hat{F}(\boldsymbol{k}) \operatorname{diag}(1+\alpha,\ 1,\ 1). \tag{22}$$

Константа α, вычисленная в [16], равна

$$\alpha = 2\frac{\sigma_t^2}{\sigma_a^2} - \frac{l_t^2}{l_a^2} - 1.$$

Согласно еще одной гипотезе [16], спектральная функция ковариаций $\hat{F}(\boldsymbol{k})$ зависит от единственного скалярного параметра:

$$\hat{F}(\boldsymbol{k}) = l_a l_t^4 u_a^2\, f(\xi), \quad \xi^2 = l_a^2 k_x^2 + l_t^2\left(k_y^2 + k_z^2\right), \tag{23}$$

где функция $f(\xi)$ – положительная и четная.

Вернемся к модели анизотропной турбулентности, обсуждаемой в данном разделе. При равенстве параметров по двум осям матрица (13) состоит из элементов

$$M_x = \frac{1}{2}\, l_t^2 u_a^2 \left(2\frac{\sigma_t^2}{\sigma_a^2} - \frac{l_t^2}{l_a^2}\right), \qquad M_y = M_z = \frac{1}{2}\, l_t^2 \sigma_a^2\,.$$

Скалярная спектральная функция (15) приобретает вид

$$\hat{C}(\boldsymbol{k}) = 2 l_a l_t^2\, f(\xi).$$

Отсюда произведение коэффициента на матрицу (8) дает то же выражение тензора $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$ посредством формул (22)–(23), которое было ранее получено в [24] для осесимметричного случая.

Таким образом, модель осесимметричной турбулентности, дополненная предположениями Кершена и Глибе, является частным случаем модели ортотропной турбулентности, построенной в настоящей работе.

Критерием неотрицательности тензора $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$ является условие $\alpha \geq -1$, или

$$2\frac{\sigma_t^2}{\sigma_a^2} \geq \frac{l_t^2}{l_a^2}\,.$$

Тот же результат дают исследования корректности [16, 17]. Именно в такое ограничение вырождаются неравенства (14), выведенные для случая трехмерной анизотропии.

4. Решение задачи конструкции спектрального тензора в общем случае анизотропии турбулентности

Вернемся к поставленной в Разделе 2 общей задаче о построении спектрального тензора ковариаций функции тока. Пусть дана матрица **T**. Выберем базис (x, y, z), в котором она является диагональной:

$$\mathbf{T} = \mathrm{diag}\big(T_x,\ \ T_y,\ \ T_z\big).$$

Система (11) для нахождения матрицы $\mathbf{M}$ в результате элементарных алгебраических преобразований приобретает вид

$$\begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_z M_{yy} + T_y M_{zz} & -T_z M_{yx} & -T_y M_{zx} \\ -T_z M_{xy} & T_z M_{xx} + T_x M_{zz} & -T_x M_{zy} \\ -T_y M_{xz} & -T_x M_{yz} & T_y M_{xx} + T_x M_{yy} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что система распадается на независимые подсистемы: система 3×3 для диагональных компонент и самостоятельные уравнения для каждой внедиагональной компоненты матрицы **M**. Первая система с точностью до обозначений совпадает с формулой (12), полученной для более простой модели. Очевидна симметрия матрицы $\mathbf{M}$ при симметричной матрице **R**.

Решение представимо в следующем явном виде:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{1}{2T_y T_z}\,\big(T_y R_{yy} + T_z R_{zz} - T_x R_{xx}\big)\,, \\ M_{yy} &= \frac{1}{2T_x T_z}\,\big(T_x R_{xx} + T_z R_{zz} - T_y R_{yy}\big)\,, \\ M_{zz} &= \frac{1}{2T_x T_y}\,\big(T_x R_{xx} + T_y R_{yy} - T_z R_{zz}\big)\,, \\ M_{yz} &= -\frac{R_{zy}}{T_x}\,, \qquad M_{zx} = -\frac{R_{xz}}{T_y}\,, \qquad M_{xy} = -\frac{R_{yx}}{T_z}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Вернемся к вопросу о разрешимости системы (11) в общем случае. Только что был найден ортонормированный базис, в котором система имеет единственное решение $\mathbf{M}$ при любой симметричной матрице $\mathbf{R}$ и невырожденной диагональной матрице $\mathbf{T}$. Переход к другому базису равносилен применению ортогонального оператора $\mathbf{Q}$ к текущему базису. Это приводит к преобразованию векторов и матриц

$$\boldsymbol{u}' = \mathbf{Q}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{k}' = \mathbf{Q}\boldsymbol{k}, \qquad \mathbf{R}' = \mathbf{QRQ}^T, \qquad \mathbf{T}' = \mathbf{QTQ}^T,$$

в результате чего решение системы (11) приобретает вид

$$\mathbf{M}' = \mathbf{QMQ}^T.$$

В одном конкретном базисе искомая матрица существует и единственна. Следовательно, в любом базисе соответствующая матрица существует и единственна.

Осталось выяснить, является ли модель физически корректной, что сводится к требованию неотрицательности матрицы $\mathbf{M}$, о чём шла речь в предыдущем разделе. Вопрос решается в рамках базиса (x, y, z) для симметричной матрицы с элементами (24). К неравенствам типа (14) добавятся дополнительные ограничения, степень обременительности которых здесь обсуждать не будем.

5. Генерация поля скоростей по заданному спектральному тензору ковариаций функции тока

Пусть задан спектральный тензор ковариаций функции тока $\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k})$, характеризующий однородную анизотропную турбулентность. Требуется сгенерировать трехмерное поле пульсаций скоростей, отвечающее тензору $\hat{C}_{ij}(\boldsymbol{k})$.

Рассмотрим два подхода к генерации турбулентного поля – спектральный метод и метод фильтрации белого шума. В обоих случаях будем вначале строить поле функции тока $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t)$, а затем перейдем к полю скоростей

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t) \tag{25}$$

путем аналитического применения оператора ротора к формуле поля функции тока.

Спектральный метод

Однородное анизотропное поле пульсаций скорости реализуется в виде суммы гармоник с детерминированными и/или случайными параметрами. Общий принцип построения спектральных методов, использующих тензор ковариаций скоростей, изложен в [21]. Конкретный вид гармоник позаимствуем из [3].

В отличие от названных выше работ, будем строить не поле скоростей, а поле функции тока, используя именно его статистику. Зададим это поле как сумму гармоник

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \sqrt{g^n}\, \mathbf{A}(\boldsymbol{k}^n)\, \boldsymbol{\sigma}^n \cos((\boldsymbol{k}^n \cdot \boldsymbol{x}) + \varphi^n)\,. \tag{26}$$

Здесь N – количество гармоник (или мод);
g^n – весовая (амплитудная) функция n-ой гармоники;
$\boldsymbol{k}^n$ – волновой вектор;
$\boldsymbol{\sigma}^n$ – вектор единичной длины, изотропно распределенный по сфере;
φ^n – фаза: случайное число, равномерно распределенное в интервале $[0, 2\pi)$.

Матрица $\mathbf{A}(\boldsymbol{k})$ получается из тензора ковариаций функции тока в результате факторизации Холецкого

$$\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{k})\, \mathbf{A}^T(\boldsymbol{k}).$$

Согласно подходу [21], значения вектора $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^n$ могут распределяться с произвольной плотностью $p(\boldsymbol{k}) > 0$, при выполнении двух условий:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p(\boldsymbol{k}^n) = 1, \qquad g^n\, p(\boldsymbol{k}^n) = 1. \tag{27}$$

В [21] и цитированных там работах обосновывается соответствие поля, задаваемого формулами (26)–(27), тензору ковариаций. Обсуждаются также вопросы сходимости поля с ростом числа гармоник N. Практические исследования на тему необходимого количества гармоник проводились нами [26] для различных способов распределения волновых чисел.

Изложенные принципы построения поля проиллюстрируем на примере ортотропного случая с заданными главными осями.

Поле функции тока (26) выглядит как

$$\begin{gathered}\left(\psi_x,\ \psi_y,\ \psi_z\right) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{g^n\, \hat{C}(\boldsymbol{k}^n)}\left(\sqrt{M_x}\, \sigma_x^n,\ \sqrt{M_y}\, \sigma_y^n,\ \sqrt{M_z}\, \sigma_z^n\right) \\ \cos((\boldsymbol{k}^n\cdot\boldsymbol{x}) + \varphi^n).\end{gathered} \tag{28}$$

Волновой вектор генерируется как произведение $\boldsymbol{k}^n = k^n\boldsymbol{\omega}^n$; справедливо представление

$$p(\boldsymbol{k}) = p_k(k)\, p_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega});$$

$\boldsymbol{\omega}^n$ – направление волнового вектора: вектор, изотропно распределенный по единичной сфере;
k^n – волновое число (модуль волнового вектора), распределенное (по детерминированному либо стохастическому закону) с плотностью

$$p_k(k) = A_k\, \xi^4\, f(\xi), \qquad \xi = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}\ \frac{k}{\sqrt{3}}.$$

Константа A_k определяется из первого условия (27).

Выражение для поля скорости (25) приобретает форму

$$\begin{gathered}\left(u_x,\ u_y,\ u_z\right) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{g^n\, \hat{C}(\boldsymbol{k}^n)}\left(\chi_x^n,\ \chi_y^n,\ \chi_z^n\right)\sin((\boldsymbol{k}^n\cdot\boldsymbol{x}) + \varphi^n), \\ \chi_x^n = \left(\sqrt{M_y}\, \sigma_y^n k_z^n - \sqrt{M_z}\, \sigma_z^n k_y^n\right), \\ \chi_y^n = \left(\sqrt{M_z}\, \sigma_z^n k_x^n - \sqrt{M_x}\, \sigma_x^n k_z^n\right),\end{gathered} \tag{29}$$

$$\chi_z^n = \left(\sqrt{M_x}\,\sigma_x^n k_y^n - \sqrt{M_y}\,\sigma_y^n k_x^n\right).$$

Алгоритм спектрального метода явный и простой как в однопроцессорной, так и в параллельной реализации. Единственная трудность, которая может возникнуть на старте, связана с распределением узлов по заданной плотности.

Метод фильтрации белого шума

Нами выбран предложенный в [8] прямой метод фильтрации, усовершенствованный в [24] под названием тензорного метода фильтрации.

Векторное поле функции тока $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t)$ представимо в форме свертки

$$\psi_i(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\,\mathcal{U}_j(\boldsymbol{x}', t)\,d\boldsymbol{x}'. \tag{30}$$

Здесь $\mathbf{G}(\boldsymbol{r})$ – матрица ядра фильтра, $\boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{x}, t)$ – трехмерное поле белого шума, которое по определению имеет ковариацию

$$\langle \mathcal{U}_i(\boldsymbol{x}, t)\,\mathcal{U}_j(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t)\rangle = \delta(\boldsymbol{r})\,\delta_{ij}\,. \tag{31}$$

Определяемый указанным способом оператор назван тензорным фильтром [24]. В выражении (30) имеется в виду интеграл по трехмерной винеровской мере; сохранены обозначения [8].

Ядро фильтра $\mathbf{G}(\boldsymbol{r})$ связано с тензором ковариаций $\mathbf{C}(\boldsymbol{r})$. Последний, как показано в [8, 24], представляется в виде свертки функции $\mathbf{G}(\boldsymbol{r})$ с самой собой, в силу свойства (31). Преобразование Фурье превращает свертку в произведение

$$\frac{1}{8\pi^3}\,\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k}) = \hat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{k})\,\hat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{k})^T. \tag{32}$$

Зная матрицу $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$, выполняем ее факторизацию Холецкого (32). Затем из матрицы $\hat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{k})$ обратным преобразованием Фурье получаем $\mathbf{G}(\boldsymbol{r})$.

Остановимся на ортотропном случае с известными главными осями, для которого выпишем детальные формулы.

Диагональный вид матрицы $\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{k})$ приводит к тому, что в разложении (32) матрица $\hat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{k})$ также диагональная:

$$\hat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\hat{C}(\boldsymbol{k})\right)^{1/2}\operatorname{diag}\left(\sqrt{M_x}\,,\ \sqrt{M_y}\,,\ \sqrt{M_z}\,\right).$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r})\operatorname{diag}\left(\sqrt{M_x}\,,\ \sqrt{M_y}\,,\ \sqrt{M_z}\,\right).$$

Скалярное ядро фильтра $G(\boldsymbol{r})$ фактически зависит от одной скалярной переменной, имеющей смысл анизотропного безразмерного радиуса, и выражается следующим образом:

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{g(\zeta)}{\sqrt{l_x l_y l_z}}, \qquad g(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\zeta}\int_0^\infty \sqrt{f(\xi)}\sin(\xi\zeta)\,\xi\,d\xi\,,$$
$$\zeta(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{x^2}{l_x^2} + \frac{y^2}{l_y^2} + \frac{z^2}{l_z^2}}\,. \tag{33}$$

Дискретная модель [7] белого шума (31) строится следующим способом. Область задания турбулентного поля разбивается на прямоугольные параллелепипеды, образующие регулярную решетку. Отдельный параллелепипед (вихревая ячейка) имеет центр $\boldsymbol{x}^n$ и размеры Δ_x, Δ_y, Δ_z. В точке $\boldsymbol{x}^n$ задается случайный трехмерный вектор $\Omega_i^n = \pm 1$ с равной вероятностью.

Интеграл (30) заменяется конечной суммой по ограниченной подобласти – области влияния точки $\boldsymbol{x}$, – имеющей форму шара, эллипсоида либо параллелепипеда с характерными размерами в несколько масштабов турбулентности.

Выбор размера вихревых ячеек и диаметра области влияния более подробно обсуждается в [7, 8].

В итоге поле функции тока (30) выглядит как

$$\left(\psi_x,\ \psi_y,\ \psi_z\right) = \sum_{n\in\mathcal{M}(\boldsymbol{x})} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)\left(\sqrt{M_x}\,\Omega_x^n,\ \sqrt{M_y}\,\Omega_y^n,\ \sqrt{M_z}\,\Omega_z^n\right)\sqrt{V^n}\,. \tag{34}$$

Здесь $V^n = \Delta_x\Delta_y\Delta_z$ – объем вихревой ячейки. Множество $\mathcal{M}(\boldsymbol{x})$ – номера вихрей, попадающих в область влияния точки $\boldsymbol{x}$.

Формула поля скорости (25) приводит к дифференцированию ядра $G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)$ и в итоге дает следующие покомпонентные выражения:

$$u_x(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n\in\mathcal{M}(\boldsymbol{x})}\left(\frac{\partial G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)}{\partial y}\sqrt{M_z}\,\Omega_z^n - \frac{\partial G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)}{\partial z}\sqrt{M_y}\,\Omega_y^n\right)\sqrt{V^n}\,,$$
$$u_y(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n\in\mathcal{M}(\boldsymbol{x})}\left(\frac{\partial G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)}{\partial z}\sqrt{M_x}\,\Omega_x^n - \frac{\partial G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)}{\partial x}\sqrt{M_z}\,\Omega_z^n\right)\sqrt{V^n}\,, \tag{35}$$
$$u_y(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n\in\mathcal{M}(\boldsymbol{x})}\left(\frac{\partial G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)}{\partial x}\sqrt{M_y}\,\Omega_y^n - \frac{\partial G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)}{\partial y}\sqrt{M_x}\,\Omega_x^n\right)\sqrt{V^n}\,.$$

В выражении (35) производные функции ядра фильтра приобретают, согласно формулам (33), вид:

$$\left(\frac{\partial G(\boldsymbol{r})}{\partial x},\ \frac{\partial G(\boldsymbol{r})}{\partial y},\ \frac{\partial G(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right) = \frac{g'(\zeta)}{\sqrt{l_x l_y l_z}}\left(\frac{x}{\zeta},\ \frac{y}{\zeta},\ \frac{z}{\zeta}\right),$$
$$g'(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{f(\xi)}\,\frac{\xi}{\zeta^2}\left(\xi\zeta\cos(\xi\zeta) - \sin(\xi\zeta)\right)d\xi. \tag{36}$$

В формулах (33) и (36) присутствуют интегралы. Их удается найти аналитически для известных модельных функций $f(\xi)$, в частности, Липмана (16) и Кармана–Пао (17). Об этом см. [8, 24]. В более общих случаях необходимо выполнять численное интегрирование: возможность заранее табулировать функции $g(\zeta)$ и $g'(\zeta)$ существует не всегда.

Заключение

Найден широкий класс спектральных тензоров ковариаций функции тока, который позволяет воспроизвести весь тензор рейнольдсовых напряжений. При этом остаются большие возможности для учета других физических характеристик поля.

Для специального случая турбулентных полей построен в явном виде подкласс спектральных тензоров, приводящих к заданным напряжениям Рейнольдса, продольным интегральным масштабам и энергетическому спектру для изотропного случая. В применении к осесимметричной турбулентности метод повторяет результаты, изложенные ранее [24].

Предложенный метод, как и большинство предшествующих подходов к генерации синтетической турбулентности, дает поле, анизотропия которого одинакова при всех волновых числах. Это противоречит известному феномену изотропного характера мелкомасштабных структур. Данный факт связан с использованием в формуле (8) постоянной матрицы $M_{ij} = \text{const}$, что облегчает алгоритм, но ограничивает физическое разнообразие.

Перспективы развития модели, возможно, следует искать на другом пути. Представление Чандрасекхара (20), универсальное для осесимметрической турбулентности, допускает обобщения на случай трехмерной анизотропии. Тем самым придется отказаться от дополнительной «однопараметрической» гипотезы Кершена–Глибе (19).

Следующим этапом предстоит адаптация подходов, опирающихся на спектральный тензор, к неоднородной турбулентности (в локально-однородном приближении). Соответствующие технологии ранее были разработаны в рамках спектральных методов [3, 27]. Фильтрационные методы также допускают модификацию в этом направлении.

Автор благодарит А.В. Александрова и Т.К. Козубскую за полезные обсуждения.

Литература

1. *Kraichnan R.* Diffusion by a random velocity field // Phys. Fluids, 1970, v.13, No.1, p.22–31.
2. *Smirnov A., Shi S., Celik I.* Random flow generation technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // J. Fluids Eng., 2001, v.123, No.2, p.359–371.

3. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K.* Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // Flow Turbulence Combust., 2014, v.93, No.1, p.63–92.
4. *Klein M., Sadiki A., Janicka J.* A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations // J. Comput. Phys., 2003, v.186, p.652–665.
5. *Ewert R.* Broadband slat noise prediction based on CAA and stochastic sound sources from a fast random particle-mesh (RPM) method // Computers and Fluids, 2008, v.37, p.369–387.
6. *Siefert M., Ewert R.* Sweeping sound generation in jets realized with a Random Particle-Mesh method // AIAA 2009-3369.
7. *Gea-Aguilera F., Gill J., Zhang X.* Synthetic turbulence methods for computational aeroacoustic simulations of leading edge noise // Computers and Fluids, 2017, v.157, p.240–252. doi:10.1016/j.compfluid.2017.08.039.
8. *Shen Z., Zhang X.* Direct anisotropic filter method of generating synthetic turbulence applied to turbulence-airfoil interaction noise prediction // J. of Sound and Vibration, 2019, v.458, p.544–564.
9. *Careta A., Sagues F., Sancho J.M.* Stochastic generation of homogeneous isotropic turbulence with well-defined spectra // Physical review, 1993, v.48, No.3, p.2279–2287.
10. *Dieste M., Gabard G.* Random particle methods applied to broadband fan interaction noise // J. Comput. Phys., 2012, v.231, No.24, p.8133–8151.
11. *Dhamankar N.S., Blaisdell G.A., Lyrintzis A.S.* Overview of turbulent inflow boundary conditions for Large-Eddy Simulations // AIAA J., 2018, v.56, No.4, p.1317–1334.
12. *Batchelor G.K.* The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge University Press, 1959.
13. *Хинце И.О.* Турбулентность, ее механизм и теория. – М.: Физматгиз, 1963, 680 с.; *Hinze J.O.* Turbulence: An Introduction to Its Mechanism and Theory. 2nd Edition. McGraw Hill, New York, 1959, 586 p.
14. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика, механика турбулентности. Часть 2. М.: Наука, 1967; англ. пер.: *Monin A.S., Yaglom A.M.* Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence. Part 2. Dover Publications, 2007.
15. *Chandrasekhar S.* The theory of axisymmetric turbulence // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A. Mathematical and Physical Sciences, 1950, v.242, No.855, p. 557–577.
16. *Kerschen E.J., Gliebe P.R.* Noise caused by the interaction of a rotor with anisotropic turbulence // AIAA Journal, 1981, v.19, No.6, p.717–723.
17. *Kerschen E.J.* Constraints on the invariant functions of axisymmetric turbulence // AIAA Journal, 1983, v.21, No.7, p.978–985.

18. *Bewley G.P., Chang K., Bodenschatz E.* On integral length scales in anisotropic turbulence // Phys. Fluids, 2012, v.24, 061702, p.1–7.
19. *Lund T., Wu X., Squires D.* Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations // J. Comput. Phys., 1998, v.140, p.233–258.
20. *Сабельфельд К.К.* Методы Монте-Карло в краевых задачах. – Новосибирск: Наука, 1989, 280 с.; англ. пер.: *Sabelfeld K.K.* Monte Carlo Methods in boundary value problems. Springer, Heidelberg–Berlin–New York, 1991.
21. *Kurbanmuradov O., Sabelfeld K., Kramer P.R.* Randomized spectral and Fourier-wavelet methods for multidimensional Gaussian random vector fields // J. Comput. Phys., 2013, v.245, p.218–234.
22. *Александров А.В., Дородницын Л.В., Колюхин Д.Р.* Стохастический алгоритм генерации бездивергентного анизотропного однородного поля турбулентных пульсаций скоростей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2020, №118, М., 17 с.
23. *Alexandrov A.V., Dorodnicyn L.W., Duben A.P., Kolyukhin D.R.* Generation of a random anisotropic incompressible turbulent velocity field in accordance with the calculated flow statistics // Journal of Physics: Conference Series, 2021, v.1715, 012059, p.1–7.
24. *Александров А.В., Дородницын Л.В.* Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021, №95, М., 15 с.
25. *Александров А.В., Дородницын Л.В.* Генерация турбулентных полей скорости на основе тензорного метода фильтрации // Вестник Башкирского университета, 2022, т.27, №3, с.569–573.
26. *Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П.* Генерация трехмерных однородных изотропных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода // Матем. моделирование, 2019, т.31, №10, с.49–62; англ. пер.: *Alexandrov A.V., Dorodnicyn L.W., Duben A.P.* Generation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulent velocity fields using the Randomized Spectral Method // Mathematical Models and Computer Simulations, 2020, v.12, No.3, p.388–396.
27. *Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П., Колюхин Д.Р.* Генерация неоднородных турбулентных полей скорости на основе модифицированного рандомизированного спектрального метода // Прикладная математика и информатика №63. – М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020, с.22–35; англ. пер.: *Alexandrov A.V., Dorodnicyn L.W., Duben' A.P., Kolyukhin D.R.* Generation of nonhomogeneous turbulent velocity fields by Modified Randomized Spectral Method // Comput. Math. Model., 2020, v.31, No.3, p.308–319.