

Раздел II. Математическое моделирование

Е.Д. Куретова, Е.С. Куркина

ДИНАМИКА РЕЖИМОВ С ОБОСТРЕНИЕМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБКЕ

Введение

Режимы с обострением представляют собой интереснейшие явления, пользующиеся неизменным вниманием исследователей на протяжении последних десятилетий. *Режимом с обострением* (blow-up) называется процесс, в котором характеризующая его функция растет быстрее экспоненциальной функции и асимптотически достигает бесконечности за конечное время, называемое *временем обострения*. Такие режимы могут возникать в нелинейных системах типа реакция-диффузия с положительными обратными связями. Взрывные процессы в самых разных средах, такие как демографический взрыв, вспышки эпидемий, термоядерное горение в плазме, ряд химических реакций, процессы деления и размножения и др., представляют собой не что иное, как режимы с обострением [1]-[3]. Проведенные не так давно исследования вспышек в Короне Солнца обнаружили, что температура плазмы на начальной стадии также растет в режиме с обострением [4].

Процессы, протекающие в режиме с обострением в разных средах, обладают общими интересными свойствами, к которым относятся явление локализации и возникновение локализованных диссипативных структур, сжатие пространственно-временных масштабов в ходе развития, и другие. Несмотря на наличие диссипативных факторов – теплопроводности, диффузии или других – режим с обострением развивается в ограниченной области пространства строго определенного размера. Явление локализации пытались использовать еще в 70-х годах для достижения условий термоядерного синтеза в мишени с дейтерием и тритием, облучая ее мощным лазерным импульсом [5]. Свойствами нестационарных диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением, такими как сокращение пространственно-временных масштабов, ускорение течения системного времени, усиление неустойчивости и др., объясняются многие глобальные характеристики исторического развития [6].

Ясно, что функция, характеризующая некоторое явление (энергия, температура, численность, концентрация, давление и т.п.) и имеющая взрывной характер роста, в реальности не может обратиться в бесконечность. На последней стадии развития начинают действовать

факторы, ограничивающие рост функции, которыми на ранних стадиях можно было пренебречь. Однако режимы с обострением адекватно описывают асимптотику главной, взрывной части процесса, успевая проявить характерные свойства.

Базовой моделью для исследования режимов с обострением стало нелинейное уравнение теплопроводности с коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла, степенным образом зависящими от температуры. Это уравнение имеет широкое применение в разных областях [2], [7], описывая, например, термоядерное горение плазмы. Для него были найдены условия существования трех типов режимов с обострением, в двух из которых (так называемых S-режиме и LS-режиме) имеет место явление локализации и возникают локализованные диссипативные структуры. В HS-режиме процесс горения, инициированный в финитной области, распространяется по всему пространству.

Диссипативные структуры, развивающиеся в режиме с обострением, описываются автомодельными решениями рассматриваемого нелинейного уравнения теплопроводности. Они являются асимптотиками, или аттракторами, других решений, отвечающих произвольным начальным данным, и обладают либо структурной, либо метастабильной устойчивостью. Исследование спектра автомодельных решений, являясь самостоятельной интересной математической проблемой, проводилось во многих работах. Подробно изучены одномерные структуры [8], предложена классификация двумерных структур [9], [10], построены некоторые трехмерные структуры. Вопросы устойчивости автомодельных решений и особенности выхода на автомодельный режим исследовались для одномерного и двумерного уравнений [8], [11]. В работе [12] были изучены некоторые режимы горения в анизотропной среде на плоскости.

Недавно было найдено новое применение режимов с обострением. В работах [13], [14] была реализована идея использования нелинейного уравнения теплопроводности и локализованных тепловых структур для описания начальной фазы мелкомасштабных вспышек на Солнце. Рассматривались одномерные структуры, возникающие либо вдоль, либо поперек магнитного поля. Распространение тепла в этих направлениях происходит за счет движения электронов или ионов, соответственно, что обуславливает существенную разницу в коэффициентах теплопроводности. Поэтому условия существования и свойства возникающих в обоих случаях вспышечных структур изучались отдельно. В реальности такая вспышка представляет собой формирование пучка тонких горячих нитей, вытянутых вдоль магнитного поля и погруженных в плазму с менее высокой фоновой температурой. Для их целостного

описания необходимо рассмотреть задачу в рамках соответствующей цилиндрической геометрии.

В настоящей работе рассматривается двумерное нелинейное уравнение теплопроводности со степенным объемным источником тепла и анизотропным коэффициентом теплопроводности, описывающее процесс горения в цилиндрической области в предположении радиальной симметрии. Исследуются различные типы режимов с обострением, которые могут возникать в такой среде.

Динамика процессов горения на нулевом фоне в однородной среде

Рассматриваются режимы горения среды с нелинейным коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла, степенным образом зависящими от температуры $T(r, t)$. Считается, что изменение температуры в некоторой области пространства D_1 описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi_0 T^\sigma \operatorname{grad} T) + Q(T), \quad t > 0, \quad r \in D_1 \quad (1)$$

где t – время, r – пространственная координата, $Q(T) = q_0 T^\beta$ – объемный источник, $\chi_0, q_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\beta > 1$ – параметры.

Горение инициируется заданием начального распределения температуры в некоторой финитной области пространства $D_2 \subseteq D_1$:

$$T(r, 0) = T_0(r) \leq M < \infty T. \quad (2)$$

Начавшееся горение начинает распространяться по нулевому фону. На фронте волны горения ставятся обычные граничные условия сопряжения с нулевым фоном (ноль температуры и ноль потока тепла).

Свойства решений этой задачи для уравнения (1) при разных значениях параметров хорошо изучены. Нелинейное уравнение (1) при заданных значениях параметров имеет бесконечно много решений, зависящих от начального распределения (2). Однако только некоторые из них определяют характер эволюции всей системы. Это *автомодельные* решения, которые играют роль аттракторов для всех прочих решений задачи Коши с произвольными начальными данными.

В радиально-симметричном случае автомодельные решения имеют вид:

$$T(r, t) = g(t)\Theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad (3)$$

где ξ – автомодельная переменная, $\Theta(\xi)$ – автомодельное решение, а $g(t)$ и $\psi(t)$ некоторые функции времени. Автомодельное уравнение для функции $\Theta(\xi)$ и вид функций $g(t)$ и $\psi(t)$ можно найти, подставляя выражение (3) в уравнение (1) [1], [2], [8].

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\beta-1}, \quad n = \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}. \quad (4)$$

Автомодельное уравнение имеет вид

$$\frac{\chi_0}{(\sigma+1)} \Delta \Theta^{\sigma+1} = -\frac{m}{\tau} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - q_0 \Theta^\beta, \quad (5)$$

где τ – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (3), имеющий смысл времени обострения при $\tau > 0$. Действительно, как следует из формул (3) и (4), при $\tau > 0$ автомодельные решения существуют конечное время $t = \tau$ и развиваются в режиме с обострением: $g(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \tau$.

Доказано, что автомодельное уравнение, дополненное соответствующими граничными условиями, для каждого значения $\tau > 0$ имеет решения, они называются собственными функциями (СФ) автомодельной задачи. Для разных значений τ СФ получаются друг из друга преобразованием подобия, определяя одно и то же автомодельное решение (3), взятое в разные моменты времени.

В зависимости от значений параметров σ и β существует три типа режимов с обострением: HS, S и LS, определяемых автомодельными решениями (3).

1) **HS-режим.** При $1 < \beta < \sigma + 1$ существует единственная радиально симметричная финитная СФ, имеющая один максимум в центре симметрии, которая описывает волну горения, распространяющуюся в пространстве. Горение за время обострения τ охватывает все пространство.

2) **S-режим.** При $\beta = \sigma + 1$ автомодельная задача также имеет единственную собственную функцию с одним максимумом в центре симметрии. Соответствующее ей автомодельное решение описывает нестационарную структуру, локализованную в области, имеющей определенный размер – фундаментальную длину L_T . Действительно, в этом случае, как следует из формул (3) и (4), фронт и все остальные точки профиля автомодельного решения (3) не перемещаются по пространству (так как $\xi = r$). Внутри области локализации температура растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю; полуширина области

горения не изменяется. В одномерном случае получено аналитическое решение [15]:

$$\begin{aligned} T(r,t) &= T_0 g(t) \Theta_S(r), \quad 0 \leq r \leq 0.5 * L_T, \\ \Theta_S(r) &= \cos^{2/\sigma}(\pi r / L_T), \quad L_T = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\frac{\chi_0}{q_0}(\sigma + 1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

В радиально-симметричном случае собственная функция $\Theta_S(r)$ имеет такой же вид (6), но с другим значением фундаментальной длины. Фундаментальная длина увеличивается с размерностью пространства. В работе [8] получено приближенное решение для сферически-симметричного и цилиндрически-симметричного случаев.

3) **LS-режим.** При $\beta > \sigma + 1$ все точки профиля автомодельного решения (3) движутся к центру (так как $r(t) = \xi \cdot \psi(t)$ уменьшается со временем) и растут в режиме с обострением, в результате эффективная ширина области горения сокращается, и температура при $t = \tau$ обращается в бесконечность только в одной точке – центре симметрии. В этом случае не существует решения автомодельной задачи в ограниченной области пространства, фронт находится на бесконечности. Доказано, что в случае финитных начальных возмущений (2) имеет место строгая локализация процесса горения, а автомодельное решение хорошо описывает процесс горения внутри области локализации. Получена оценка фундаментальной длины в LS-режиме в одномерном случае, которая зависит от параметров среды и от энергии начального возмущения $W_0 (W_0 = \max T_0(r) \times \|\text{supp } T_0\|)$ (см. в [1] и [2]):

$$L_{(LS)}^{(\beta-\sigma-3)} = \frac{1}{d^2} W_0^{(\beta-\sigma-1)}, \quad d = \pi \sqrt{\frac{\chi_0}{q_0} \frac{2(\beta + \sigma + 1)}{\sigma(\beta - 1)}}, \quad (7)$$

С помощью теорем сравнения доказано, что она не может превосходить фундаментальной длины в S-режиме для меньшего значения β , равного $\sigma + 1$ [7].

Таким образом, явление локализации и возникновение нестационарных диссипативных структур имеет место при $\beta \geq \sigma + 1$ в S- и LS-режимах.

Исследования показали, что в LS-режиме существует конечный, строго определенный набор (спектр) СФ, число которых зависит от значений параметров σ и β ([8]-[10]). Существуют не только одномерные СФ, но и многомерные структуры $\Theta(\xi, \varphi, \theta)$ на плоскости и в пространстве, которые отличаются друг от друга архитектурой, симметрией, принципом расположения максимумов, формой и размером областей локализации. В спектре всегда присутствует первая СФ $\Theta_1(\xi)$ – простая структура с одним максимумом в центре. Существуют радиально-симметричные СФ

и структуры со сложной архитектурой, имеющие много максимумов ([9]-[10]). При некоторых значениях параметров существуют структуры с «дырками», «каньонами», в которых температура равна нулю.

СФ обладают разной степенью устойчивости и разной областью притяжения. В целом, можно утверждать, что любое решение, инициированное начальным возмущением (2), стремится выйти на автомодельный режим и развиваться в соответствии с той или иной СФ. *Структурно устойчивым автомодельным решением, имеющим широкую область притяжения, является простая структура с одним максимумом.* Именно она определяет характерный размер возникающих в нелинейной среде структур и фундаментальную длину области локализации (7) [2], [8]. Сложные структуры, имеющие более одного локального максимума, проявляют метастабильную устойчивость. Некоторые распределения температуры, близкие к одной из сложных СФ, могут выйти на нее и следовать автомодельному закону какое-то время. Однако вблизи момента обострения все сложные структуры разваливаются на простые.

В работе [11] было изучено, как происходит выход на автомодельный LS-режим некоторых несимметричных финитных начальных распределений на плоскости, имеющих один локальный максимум. Численные исследования показали, что вначале наблюдается перестройка профиля начального распределения, которая может сопровождаться «растеканием» решения в пространстве. Затем растекание прекращается, и начинается быстрый рост температуры внутри области локализации. При этом распределение температуры становится все более симметричным, приближаясь к автомодельному решению, что показано с помощью автомодельной обработки.

Постановка задачи в цилиндрической трубке

В настоящей работе изучение свойств решений уравнения (1) проводится в области, представляющей собой цилиндрическую трубку длиной L и радиусом R . Исследуются радиально-симметричные решения, удовлетворяющие уравнению:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\chi_r T^{\sigma_1} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi_z T^{\sigma_2} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q(T), \quad (8)$$

где температура $T = T(r, z, t)$, $0 < r < R$ – радиальная составляющая полярных координат в поперечном сечении трубки, $-L/2 < z < L/2$ – координата вдоль оси цилиндра, $\chi_r T^{\sigma_1}$ и $\chi_z T^{\sigma_2}$ – коэффициенты теплопроводности в поперечном и продольном направлениях трубки, которые могут различаться.

Объемный источник тепла, задающий режим с обострением, имеет вид:

$$Q(T) = q_0(T^{\beta_1} - T_1)(T^{\beta_2} - T_2), \quad T_1 < T_2, \quad \beta_1 + \beta_2 > 1. \quad (9)$$

Данный вид источника был предложен в работе [13] в задаче моделирования вспышек на Солнце. В отличие от источника, рассматриваемого обычно в модельной задаче $Q_0(T) = q_0 T^\beta$, такой вид функции $Q(T)$ позволяет описать возникновение диссипативных структур на ненулевом фоне. Источник $Q_0(T)$, описывающий горение на нулевом фоне, хорошо изучен, и динамика процессов горения кратко описана выше. Однако его можно использовать лишь в тех случаях, когда рост изучаемой функции составляет несколько порядков по сравнению с фоновым значением, и ненулевым фоном можно пренебречь. В некоторых задачах, в том числе при описании вспышечных структур в короне Солнца, рост температуры происходит в диапазоне, соизмеримом с величиной фона. В этих случаях ненулевой фон необходимо учитывать.

На границе области ставятся условия II рода:

$$-T^{\sigma_1} \frac{\partial T}{\partial r}(R, z, t) = 0,$$

$$T^{\sigma_2} \frac{\partial T}{\partial z}(r, -L/2, t) = 0, \quad -T^{\sigma_2} \frac{\partial T}{\partial z}(r, L/2, t) = 0$$

Кроме того, на оси симметрии при $r = 0$ ставится дополнительное условие ограниченности решения:

$$T^{\sigma_1} r \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r \rightarrow 0} \rightarrow 0$$

Горение инициируется заданием начального ограниченного распределения температуры в небольшой области внутри цилиндра:

$$T(r, z, 0) = T_0(r, z) \leq M < \infty.$$

В большинстве расчетов начальное возмущение фона задавалось в виде

$$T(r, z, 0) = \tilde{T}_1 + A \cos^2 \frac{\pi r}{k_1} \cos^2 \frac{\pi z}{k_2}$$

Отметим, что область, в которой проводились расчеты, выбиралась достаточно большой, так, чтобы процессы горения проходили внутри этой области, и граничные условия не влияли на ход процессов.

Для численного решения поставленной двумерной задачи использовалась схема переменных направлений [16], при этом бралась равномерная сетка по радиусу и по оси z с шагами $h_z = h_r = 0.05$ и переменный шаг по времени.

Динамика процессов горения в цилиндрической трубке

Уравнение теплопроводности (1) с источником (9) имеет два однородных стационара: $\tilde{T}_1 = T_1^{1/\beta_1}$, $\tilde{T}_2 = T_2^{1/\beta_2}$, где $\tilde{T}_1 < \tilde{T}_2$. Меньший стационар устойчив по Ляпунову, он описывает температурный фон. Большой стационар неустойчив, от него зависит уровень критических возмущений фона. В [13], [14] было проведено численное исследование задачи Коши для уравнения (1) с источником (9) в одномерном случае. Были изучены условия возникновения различных режимов с обострением на ненулевом фоне. Исследования показали, что развитие режима с обострением на фоне начинается при некоторых сверхкритических возмущениях. Эффективная локализация процесса горения на фоне имеет место в S и LS режимах, при этом возникают нестационарные структуры с постоянной или сокращающейся полушириной. Тип режима определяет главный член разложения в источнике с показателем $\beta = \beta_1 + \beta_2$. При $\beta_1 + \beta_2 = \sigma + 1$ на развитой стадии процесса горения имеет место S-режим, при $\beta_1 + \beta_2 > \sigma + 1$ – LS-режим, и при $1 < \beta_1 + \beta_2 < \sigma + 1$ – HS-режим. Возмущения ниже критических затухают. Ранее в другой задаче с другим источником на ненулевом фоне была найдена мажорирующая функция для критического возмущения для одного из наборов параметров [17].

1. Расчеты в однородной среде.

Вначале были изучены процессы горения в однородной среде при $\chi_r = \chi_z = \chi_0$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Было проведено много расчетов поставленной задачи в цилиндрической области для уравнения (8) с источником (9) при разных значениях параметров. В расчетах использовались следующие параметры. Значения устойчивого и неустойчивого стационаров $\tilde{T}_1 = T_1^{1/\beta_1}$ (фон) и $\tilde{T}_2 = T_2^{1/\beta_2}$ определялись параметрами $T_1 = 1$, $T_2 = 1.05$. Константа q_0 без ограничения общности полагалась равной $q_0 = 1$. Для сравнительного анализа проводились также расчеты на нулевом фоне.

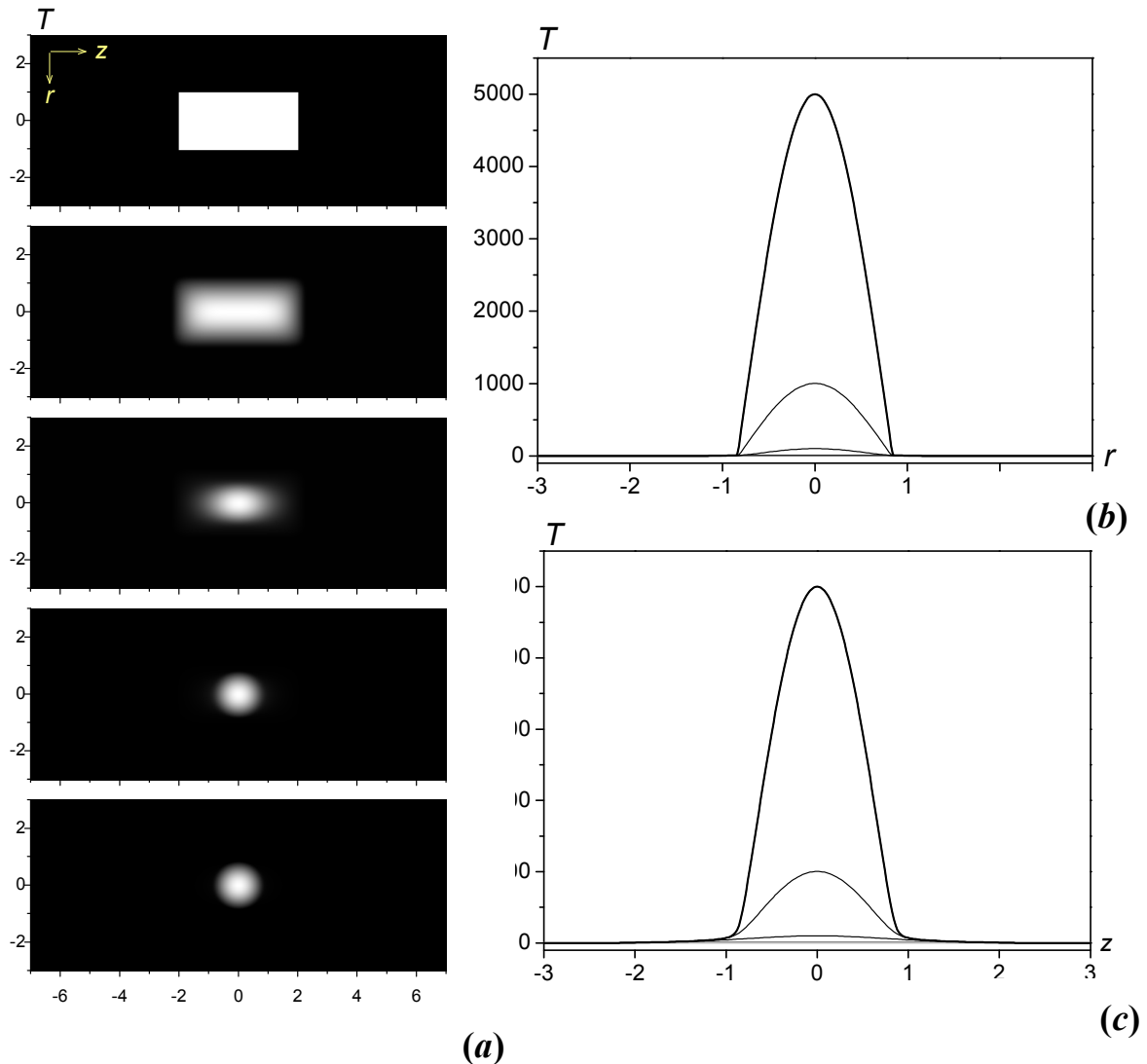


Рис. 1. «S-S» - режим ($\sigma = 2$, $\chi_0 = 0.06$, $\beta_1 = \beta_2 = 1.5$); **(a)** - температурное поле в сечении трубки $r = 0$ в разные моменты времени t , сверху при $t = 0$; **(b)** и **(c)** - профили температуры по радиальному направлению и по оси z , соответственно.

В целом можно утверждать, что, как и для одномерного случая, в рассматриваемой двумерной задаче с источником (9) режимы с обострением на ненулевом фоне возникают при некоторых сверхкритических возмущениях. Начальные распределения температуры ниже критических затухают, релаксируя к фону. Как и следовало ожидать, разные типы режимов возникают при тех же соотношениях параметров, что и в одномерном случае. Так, явление локализации тепла и возникновение нестационарных диссипативных структур имеет место в S и LS-режимах при $\beta_1 + \beta_2 \geq \sigma + 1$.

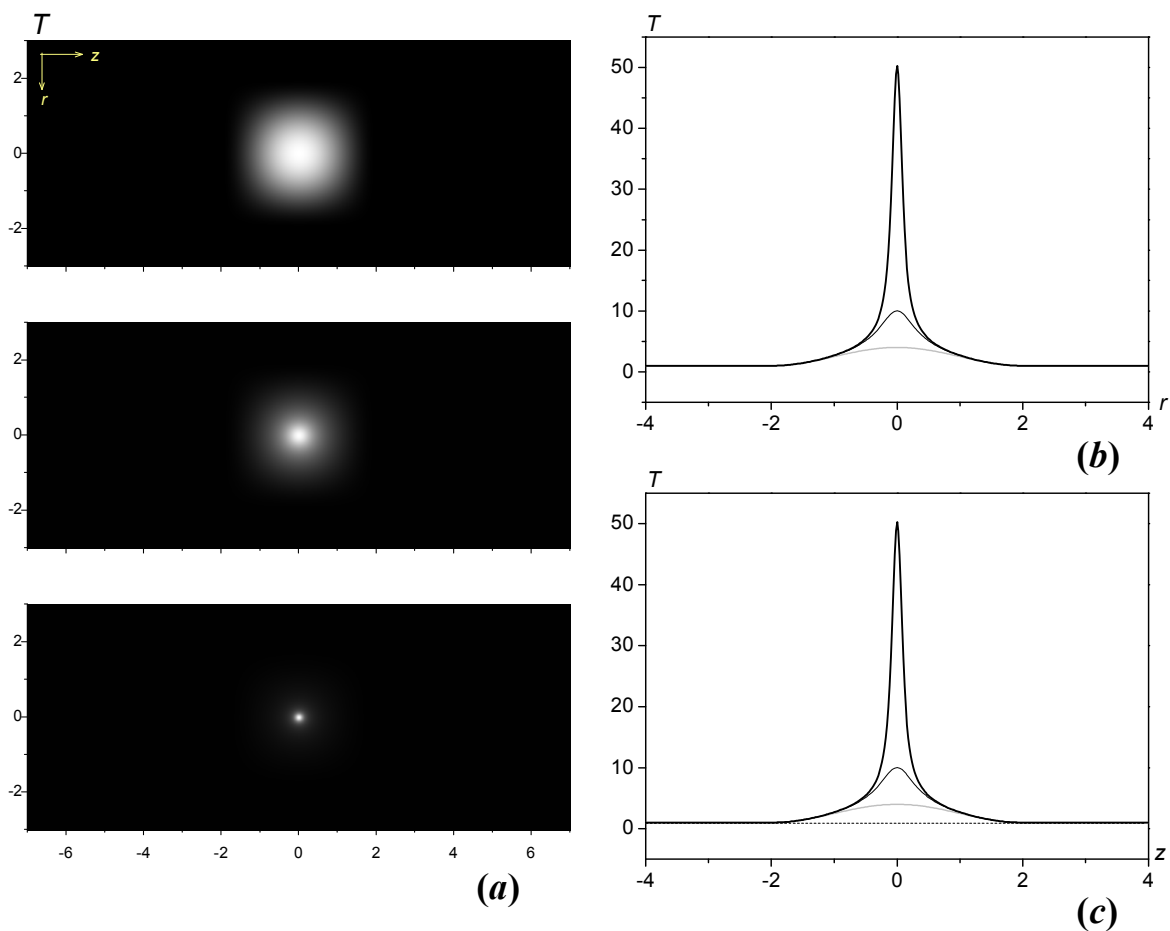


Рис. 2. «LS-LS»-режим ($\sigma = 2$, $\chi_0 = 0.06$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$). **(a)** - температурное поле в сечении трубки $r = 0$, **(b)** и **(c)** - профили температуры по радиальному направлению и по оси z , соответственно.

На Рис. 1 представлены результаты расчетов для случая S-S-режима. Название S-S-режим следует понимать в том смысле, что и по радиусу, и по оси z в данном случае выполняются соотношения $\sigma_1 + 1 = \beta_1 + \beta_2$, $\sigma_2 = \sigma_1$, что соответствует S-режиму по каждому из направлений. Такое обозначение будет удобно в дальнейшем при рассмотрении структур в анизотропной среде. На Рис. 1 (a) изображено температурное поле в сечении трубки при $r = 0$ вдоль оси z . Минимальное значение температуры (фон) отображается черным цветом, максимальное – белым, промежуточные значения – градацией серого цвета. Результаты приведены для пяти последовательных моментов времени. На рис. 1 (b),(c) показаны профили температуры по радиальному направлению и вдоль оси цилиндра, соответственно, для тех же моментов времени. Горение среды было инициировано заданием начальной температуры $T_0(r, z) > \tilde{T}_1$ в прямоугольной области (верхний рисунок). Из рисунка видно, что процесс горения локализован в пространстве. Со

временем происходит симметризация области горения; профили температуры по r и по z приближаются к автомодельному решению, что подтвердила автомодельная обработка (см. [11], [12]).

На Рис. 2 представлены аналогичные результаты расчетов для случая LS-LS-режима при $\sigma = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$, $\beta_1 + \beta_2 = 4$. Видно, что размер области интенсивного горения быстро сокращается со временем, стремясь «схлопнуться» в точку. Автомодельная обработка решения показала, что имеет место выход на автомодельный режим – радиально симметричную собственную функцию, имеющую один максимум в центре симметрии.

2. Динамика процессов горения в анизотропной среде.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда коэффициенты теплопроводности вдоль и поперек рассматриваемой цилиндрической трубки различны.

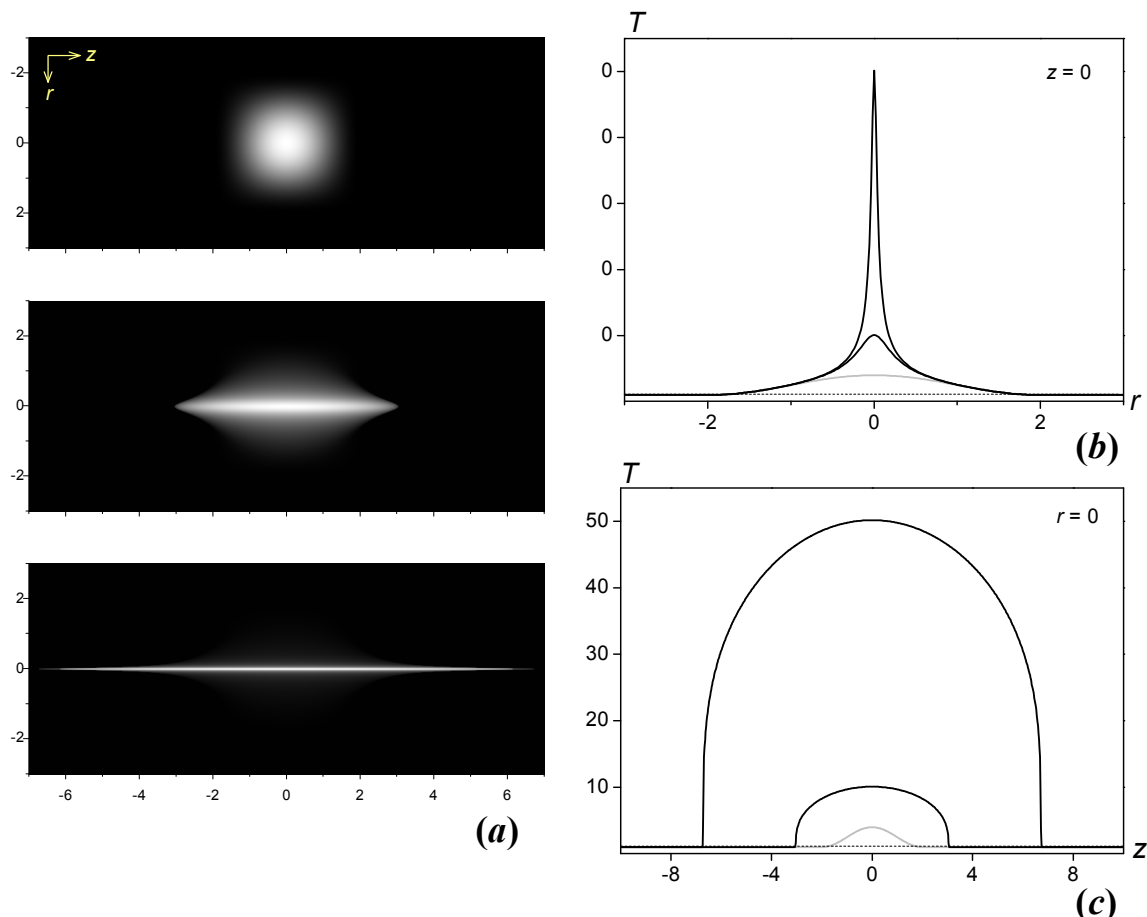


Рис. 3. LS-HS режим ($\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 4, \chi_r = 0.006, \chi_z = 0.6, \beta_1 = \beta_2 = 2$); (a) - температурное поле в сечении трубки $r = 0$ в разные моменты времени t , сверху при $t = 0$; (b) и (c) - профили температуры по радиальному направлению и по оси z , соответственно.

Исследования показали, что в такой анизотропной среде формируются разные виды диссипативных структур, представляющие собой в некотором смысле комбинацию LS, S и HS-режимов в зависимости от соотношений между параметрами $\sigma_1, \sigma_2, \beta_1, \beta_2$.

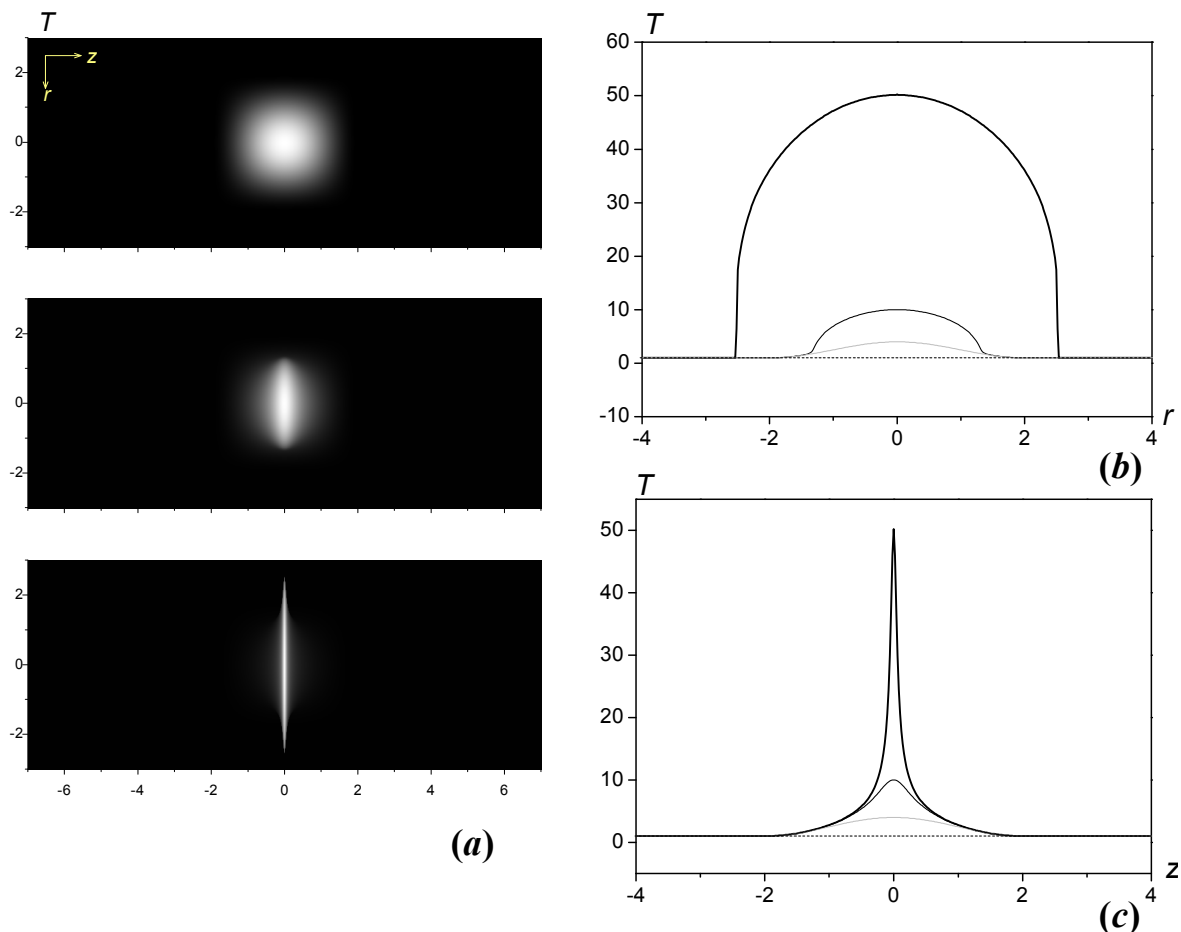


Рис. 4. HS-LS режим ($\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 2, \chi_r = 0.06, \chi_z = 0.006, \beta_1 = \beta_2 = 2$); (a) - температурное поле в сечении трубки $r = 0$ в разные моменты времени t , сверху при $t = 0$; (b) и (c) - профили температуры по радиальному направлению и по оси z , соответственно.

На Рис.3 представлен пример решения, развивающегося в так называемом LS-HS режиме с обострением. В данном случае для показателя степени в коэффициенте теплопроводности выполняются следующие соотношения: $\sigma_1 < \beta_1 + \beta_2 - 1$ в поперечном сечении трубки, а $\sigma_2 > \beta_1 + \beta_2 - 1$ в продольном направлении трубки. Первое условие обеспечивает сжатие структуры в LS-режиме по радиальному направлению, второе условие соответствует HS-режиму, то есть по направлению оси z область интенсивного горения расширяется. Таким образом, в рассматриваемой области пространства формируется структура, представляющая собой «горящую нить», вытянутую вдоль оси

цилиндра; полуширина нити стремительно уменьшается, а длина, напротив, растет.

На Рис.4 можно видеть пример тепловой структуры, развивающейся в HS-LS режиме: в этом случае по радиальному направлению происходит расширение в HS-режиме, так как $\sigma_1 > \beta_1 + \beta_2 - 1$, а по направлению оси z – сжатие области эффективного горения в LS-режиме, поскольку $\sigma_2 < \beta_1 + \beta_2 - 1$. Тепловая структура в процессе развития принимает вид «диска», расположенного поперек трубки, эффективная толщина которого с течением времени уменьшается, а диаметр увеличивается.

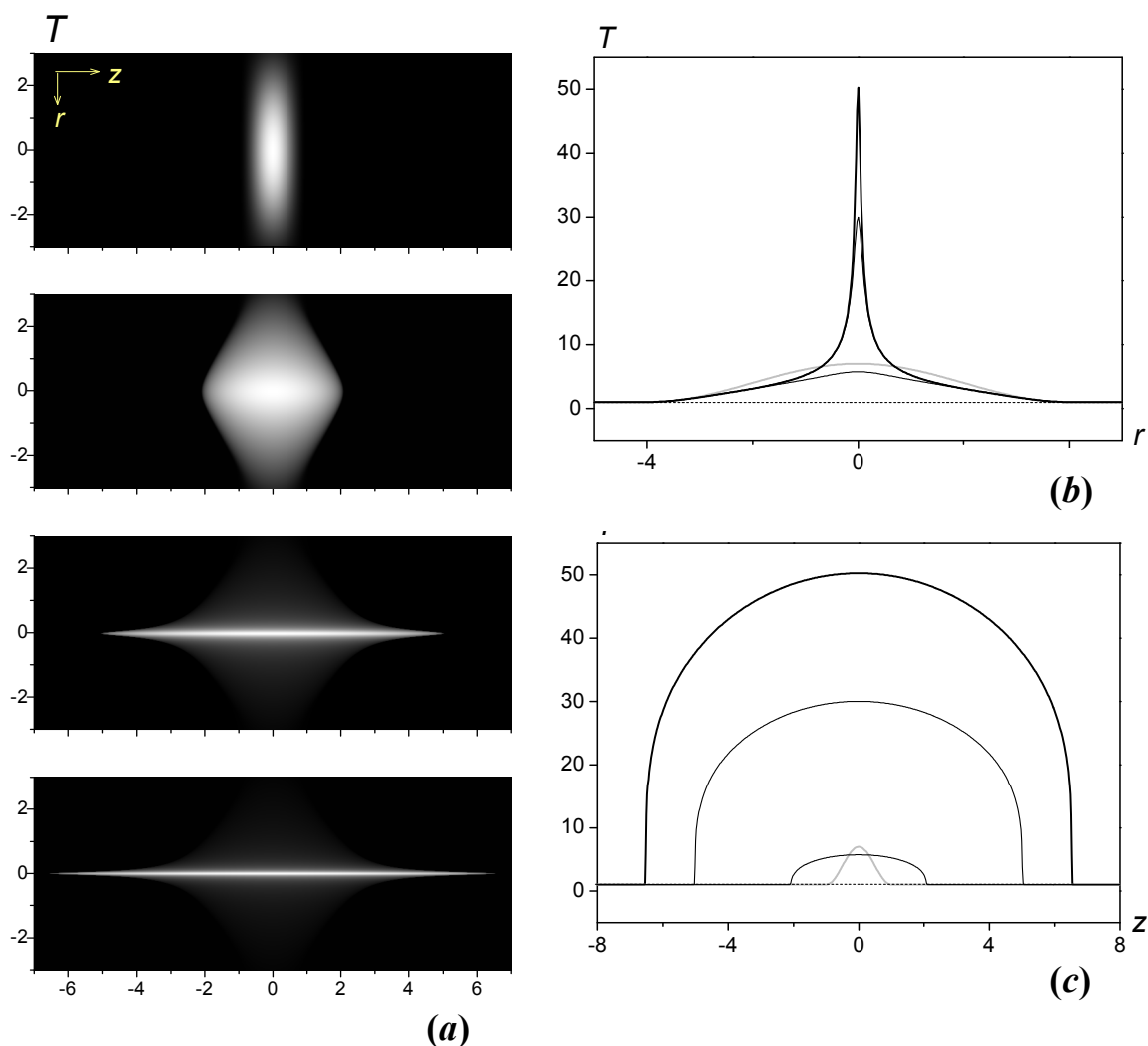


Рис. 5. LS-HS режим ($\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 4, \chi_r = 0.006, \chi_z = 0.6, \beta_1 = \beta_2 = 2$); (a) - температурное поле в сечении трубки $r = 0$ в разные моменты времени t , сверху при $t = 0$; (b) и (c) - профили температуры по радиальному направлению и по оси z , соответственно.

Следующий пример расчетов демонстрирует развитие тепловой структуры определенной формы из начального возмущения фона совершенно противоположной конфигурации. Как видно из Рис.5(a), в начальный момент времени область нагрева имеет форму диска, расположенного поперек оси цилиндра. В процессе развития эта пространственная структура перестраивается и развивается в соответствии с параметрами в LS-HS-режиме, то есть сжимается в радиальном направлении и распространяется по пространству по направлению оси z . С течением времени формируется структура в виде тонкой «нити», вытянутой вдоль оси цилиндра.

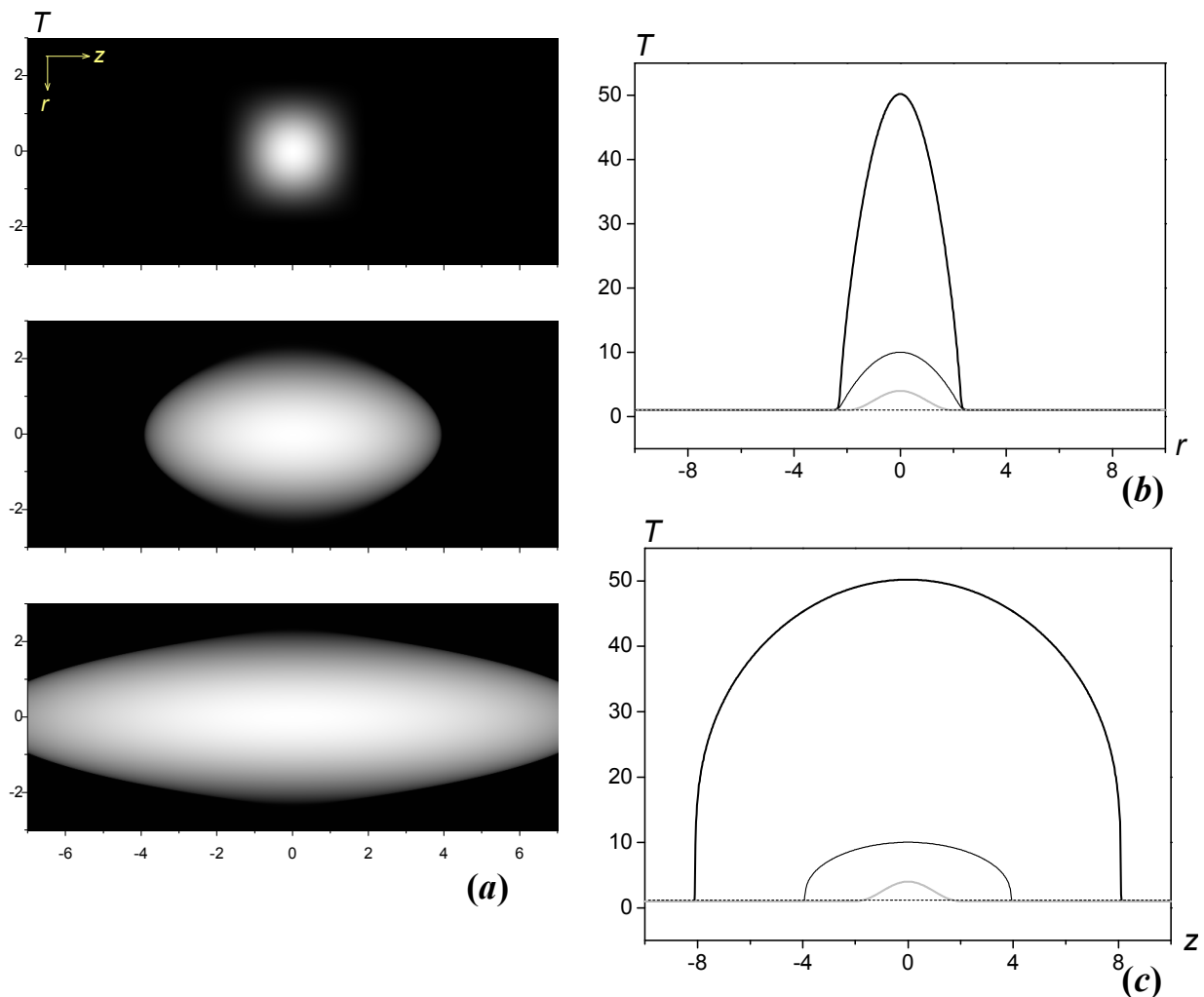


Рис. 6. *S-HS режим ($\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 4, \chi_r = 0.06, \chi_z = 0.6, \beta_1 = \beta_2 = 2$); (a) - температурное поле в сечении трубки $r = 0$ в разные моменты времени t , сверху при $t = 0$; (b) и (c) - профили температуры по радиальному направлению и по оси z , соответственно.*

Рассмотрим теперь пример решения, развивающегося в S-HS-режиме. На Рис.6 показано превращение начального симметричного

финитного возмущения в тепловую структуру, диаметр которой остается неизменным, а продольный размер растет с течением времени. Такое поведение решения соответствует значениям параметров, которые удовлетворяют соотношениям $\sigma_1 = \beta_1 + \beta_2 - 1$, а $\sigma_2 > \beta_1 + \beta_2 - 1$ и обеспечивают S-режим в поперечном сечении трубки и HS-режим – в продольном направлении.

Рассмотрим, как будет протекать развитие процесса горения в режиме с обострением, инициированного несколькими непересекающимися тепловыми сверхкритическими финитными возмущениями фона. Тогда в зависимости от значений параметров горение может происходить в виде нескольких независимых диссипативных структур, или же со временем они могут сливаться в одну структуру.

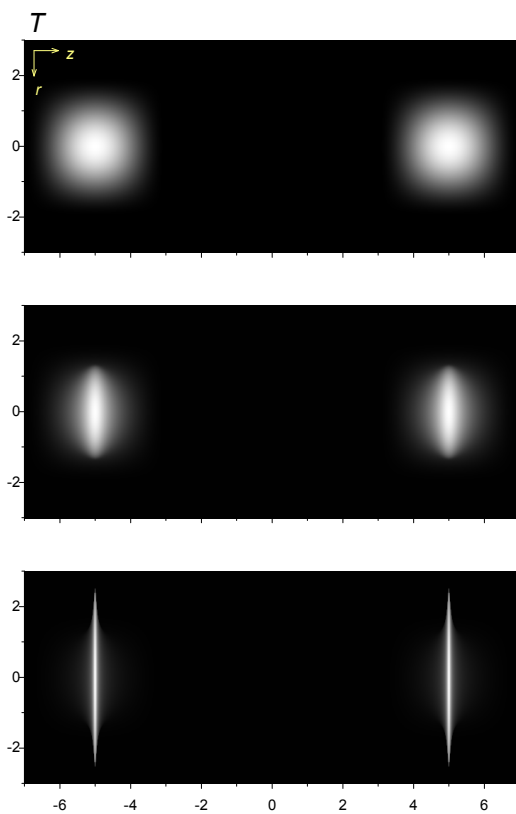


Рис. 7. HS-LS режим
 ($\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 2, \chi_r = 0.06,$
 $\chi_z = 0.006 \beta_1 = \beta_2 = 2$).

На Рис. 7 приведены результаты расчетов, выполненных при тех же значениях параметров, что и на Рис.4, но для другого начального возмущения фона. В начальный момент времени в рассматриваемой цилиндрической трубке задаются два очага горения, расположенных на достаточно большом расстоянии друг от друга. Каждый из них развивается в рассмотренном выше режиме HS-LS, принимая со временем форму тонкого диска. Поскольку по направлению оси цилиндра происходит сжатие каждой из структур, формирование обеих структур происходит независимо друг от друга. Внутри трубки формируется две локализованные области интенсивного горения, разделенные областью пространства с фоновой температурой.

На следующем рисунке представлен пример формирования более сложной тепловой структуры. Ранее были исследованы двумерные

многосвязные структуры на плоскости [10], в том числе так называемые структуры «с дыркой». В радиально-симметричном плоском случае такая структура представляет собой область горения в виде кольца. В настоящей работе приведен пример аналогичных расчетов в цилиндрической системе координат на ненулевом фоне.

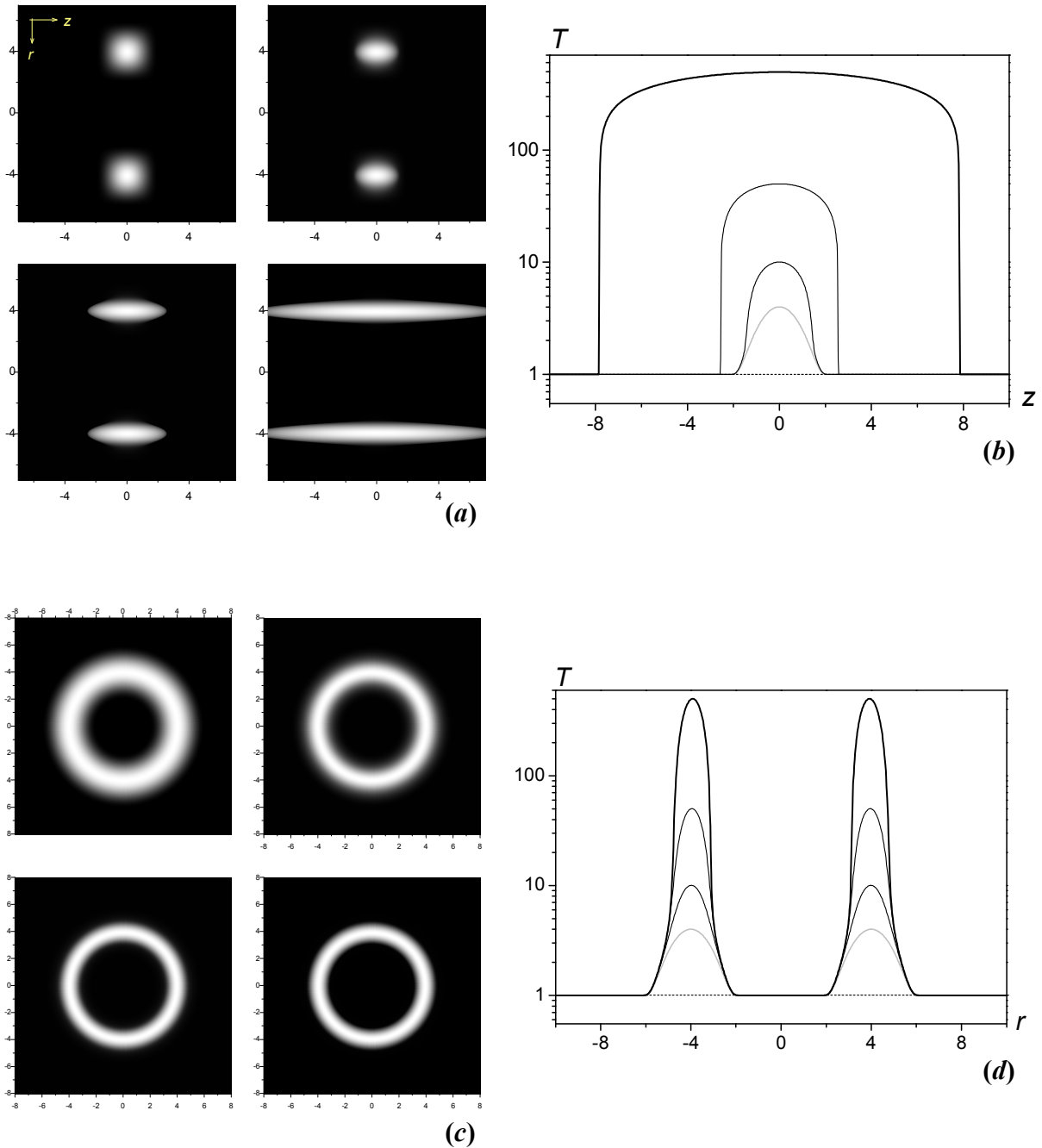


Рис. 8. *LS-HS режим* ($\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \chi_r = 0.06, \chi_z = 0.06, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 1.51$); **(a)** - температурное поле в сечении трубки $r = 0$ в разные моменты времени t ; **(b)** - профили температуры по оси z ; **(c)** - температурное поле в сечении трубки $z = 0$ в разные моменты времени t ; **(d)** - профили температуры по радиальному направлению.

На Рис.8(a) и 8(b) показано температурное поле в продольном сечении трубки $r = 0$ и соответствующие профили температуры для одной из двух симметричных проекций в разные моменты времени; Рис 8(c) и 8(d) – аналогично, температурное поле и профили решения в поперечном сечении трубки $z = 0$. Поскольку в ходе развития решения температура области интенсивного горения увеличилась на 3 порядка, рисунки для большей наглядности приведены в логарифмическом масштабе. В начальный момент времени (левый верхний рисунок) область пространства с возмущенным температурным фоном представляет собой кольцо, расположенное поперек цилиндра. Далее, в соответствии с заданными параметрами, которые удовлетворяют соотношениям $\sigma_1 < \beta_1 + \beta_2 - 1$, $\sigma_2 > \beta_1 + \beta_2 - 1$, решение развивается в LS-HS-режиме. Значения параметров были выбраны таким образом, чтобы полуширина области горения в поперечном направлении сокращалась очень медленно, для этого положили $\sigma_1 \approx \beta_1 + \beta_2 - 1$ (близость к S-режиму). С течением времени в пространстве формируется структура в виде трубки, вытянутой вдоль оси. С выходом на автомодельный режим толщина стенок трубки, то есть полуширина радиальных профилей решения, практически перестает изменяться, тогда как длина продолжает увеличиваться.

Заключение

В работе исследованы решения нелинейного уравнения теплопроводности с объемным источником тепла, описывающего процесс горения на ненулевом температурном фоне. Задача рассматривалась в цилиндрической системе координат в предположении радиальной симметрии. Были изучены процессы горения как в изотропной, так и в анизотропной среде.

Исследованы различные типы диссипативных структур, возникающих в данной задаче. Формирование структур на ненулевом фоне происходят при некоторых сверхкритических возмущениях температурного фона, тогда как начальные распределения ниже критических затухают и возвращаются со временем к фоновым значениям температуры. Типы получаемых режимов зависят от соотношений между показателями степенных зависимостей коэффициентов теплопроводности $\chi_r T^{\sigma_1}$, $\chi_z T^{\sigma_2}$ и источника $Q(T) = q_0(T^{\beta_1} - T_1)(T^{\beta_2} - T_2)$ от температуры. В функции источника при этом определяющим является только старший член разложения $T^{\beta_1 + \beta_2}$. Если рассматривать получаемые структуры в проекциях на радиальное и продольное направления, то разные типы режимов возникают при тех же соотношениях параметров $\sigma_1, (\beta_1 + \beta_2)$ и $\sigma_2, (\beta_1 + \beta_2)$, что и в соответствующих одномерных случаях. В работе приведены примеры

формирования в цилиндрической трубке таких видов структур как LS-HS, S-HS, HS-LS, S-S и других, а также структуры «с дыркой» в форме трубки.

Список литературы

1. Режимы с обострением: эволюция идеи / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 312 с.
2. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений // М.: Наука, 1987. 480 с.
3. Капица С.П. Общая теория роста человечества: сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. Опыт теории человечества. // М.: Международная программа образования, 1999.
4. Биленко И.А., Ковалев В.А. О режимах нагрева во время солнечных вспышек. // Письма в Астрон. журн., Т. 35, № 11, 2009, С. 873 – 880.
5. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью // Письма в ЖЭТФ, 1978, Т.26, Вып.9.
6. E.D. Kuretova and E.S. Kurkina “Modeling general laws of spatial-temporal evolution of society: hyperbolic growth and historical cycles” // Computational Mathematics and Modeling, Vol. 21, No 1, 2010, pp.70-89.
7. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. // J. Discrete and continuous dynamical systems, 2002, V. 8, № 2, pp. 399-433.
8. Курдюмов С.П., Куркина Е.С. «Спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником» // ЖВМиМФ, 2004 г. Т. 44. № 9. С. 1619-1637.
9. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., А.Б. Потанов, А.А. Самарский Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 8. С. 1189-1205.
10. E.S. Kurkina, I.M. Nikol'skii “Bifurcation analysis of the spectrum of two-dimensional thermal structures evolving with blow-up” Computational Mathematics and Modeling, Vol. 17, No 4, 2006, pp.320-340.
11. E.S. Kurkina, I.M. Nikol'skii “Stability and localization of unbounded solutions of a non-linear heat equation in a plane” // Computational Mathematics and Modeling, Vol. 20, N 4, pp. 348-366, 2009.
12. Димова С.Н. «Численное исследование нестационарных тепловых структур» // Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – Дубна 2004 г.
13. E. S. Kurkina , E. D. Kuretova, V. A. Kovalev «Formation of thermal structures with blowup during solar flares // Computational Mathematics and Modeling, Vol. 26, No. 2, 2015, pp. 144-155.

14. *E. S. Kurkina, Yu. V. Troshchiev, V. A. Kovalev, E. D. Kuretova* «Small-scale heat localization with blowup in the magnetic-tube cross section during a solar flare»// *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. 27, No. 4, 2016, pp. 295-416.
15. *Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла // Док. АН СССР, 1976, Т.227, №2.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1983.
17. *E.S. Kurkina, I.M. Nikol'skii* «Investigation of a nonlinear heat equation with a quadratic source» *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. 18, No 3, 2007, pp.217-233.