Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Функциональный анализ**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические и компьютерные методы решения задач естествознания**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится квариативной части ОПОП ВО.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по линейной алгебре в объеме, соответствующем программе первого года обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

теории конечных групп, евклидовых колец, конечных полей, кодов Боуза-Чоудхури-Хоквингема

**Уметь:**

применять методы абстрактной алгебры в современных прикладных задачах

**Владеть:**

навыками решения задач алгебры и теории кодирования

**4**. Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 6 з.е., в том числе 104 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 112 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося,**  **часы** |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |
| 1. Теория меры. Определение кольца, минимального кольца, алгебры, борелевской алгебры. Определение меры на полукольце, продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Определение внешней меры, измеримость по Лебегу, критерий измеримости по Лебегу, счетная аддитивность меры Лебега. Полная мера. Канторово множество, его свойства. Пример неизмеримого по Лебегу множества. Мера Лебега-Стильтьеса, необходимое и достаточное условие счетной аддитивности меры Лебега-Стильтьеса. Абсолютная непрерывность одной меры относительно другой. Критерий абсолютной непрерывности меры Лебега-Стильтьеса относительно меры Лебега, порожденной длиной. | **34** | **18** | 0 | **18** | **16** |
| 2. Интеграл Лебега. Измеримые функции, измеримость непрерывной функции, предела почти всюду измеримых функций, измеримость суммы, разности, произведения и частного измеримых функций. Аппроксимация измеримых функций простыми. Теорема Егорова. Интеграл Лебега от простых функций, от ограниченных и неограниченных функций. Интегрируемые функции и их свойства. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Леви и Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана, необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману. Заряды, представление заряда в виде разности двух взаимно сингулярных мер. Функции ограниченной вариации, запись в виде разности двух монотонных функций. Принцип выбора Хелли. Теорема Радона-Никодима. Производная Радона-Никодима. Теорема Фубини. | **34** | **18** | 0 | **18** | **16** |
| 3. Функциональные пространства L\_p, p>=1, их свойства. Пространства Lp и их основные свойства. Полнота пространства Lp, непрерывность произвольной функции из Lp в пространстве Lp, плотность в Lp множества непрерывных функций. Неравенства Гельдера и Минковского. | **8** | **6** | 0 | **6** | **2** |
| 4. Метрические пространства. Метрические пространства, полные метрические пространства, непрерывные отображения. Принцип сжимающих отображений, локальная форма принципа, применение принципа сжимающих отображений к доказательству разрешимости линейных и нелинейных интегральных уравнений. Теорема Хаусдорфа о пополнении метрического пространства. Плотные, нигде не плотные множества, принцип вложенных шаров, понятие категории, теорема Бэра-Хаусдорфа. Компактные метрические пространства. Полнота, ограниченность и вполне ограниченность компактного пространства. Критерий предкомпактности, предкомпактность пространства при наличии предкомпактной сети. Эквивалентность двух определений компактности (по Гейне-Борелю и Вейерштрассу). Критерий предкомпактности в пространствах C, Lp, lp. | **21** | **12** | 0 | **12** | **9** |
| 5. Банаховы пространства. Банаховы пространства. Эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора, полнота пространства линейных операторов по операторной норме. Теорема Банаха-Штейнгауза. | **8** | **6** | 0 | **6** | **2** |
| 6. Функциональные пространства и операторы. Обратные операторы, правый и левый обратные операторы, обратимые операторы. Обратимость оператора E-A. Открытость множества обратимых операторов. Теорема Банаха об обратном операторе. Замкнутые операторы, теорема о замкнутом графике. Теорема Хана-Банаха и следствия из нее. Сопряженное пространство, сепарабельные пространства, общий вид линейного ограниченного функционала в Lp, lp, C, c. Второе сопряженное пространство, рефлексивные пространства, слабая сходимость, слабая полнота и слабая компактность пространств. | **21** | **12** | 0 | **12** | **9** |
| Промежуточная аттестация: зачет | **18** |  |  |  | **18** |
| **Итого 5 семестр** | **144** | **72** |  | **72** | **72** |
| **6 семестр** |  |  |  |  |  |
| 7. Гильбертовы пространства. Теорема Леви об ортогональной проекции. Теорема Рисса о представлении линейного функционала. Рефлексивность и слабая полнота гильбертова пространства. Свойства слабо сходящихся последовательностей. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Изоморфизм гильбертовых пространств. | **9** | **7** | 0 | **7** | **2** |
| 8. Обобщенные решения краевых задач. Обобщенные производные, пространство Соболева, теоремы вложения, компактность оператора вложения. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевые задачи для уравнений в частных производных: задача Дирихле, задача Неймана. | **9** | **7** | 0 | **7** | **2** |
| 9. Линейные ограниченные операторы. Сопряженный оператор, вполне непрерывные и компактные операторы. Примеры вполне непрерывных операторов: интегральный оператор, оператор в пространстве l2. Приближение вполне непрерывных операторов.  Теория Фредгольма. Три теоремы Фредгольма. Альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода в пространствах Lp (p=2) и C . | **8** | **6** | 0 | **6** | **2** |
| 10. Спектр оператора. Резольвентное множество, точечный, непрерывный и остаточный спектр, спектр вполне непрерывного оператора, самосопряженного оператора. Тождество Гильберта. Теорема Гильберта-Шмидта, формулировка теоремы для интегральных операторов. | **8** | **6** | 0 | **6** | **2** |
| 11. Разрешимость нелинейных уравнений. Теорема Браудера. Теорема Шаудера, Лере-Шаудера о неподвижной точке. Применение к решению нелинейных краевых задач. | **8** | **6** | 0 | **6** | **2** |
| Итоговая аттестация: устный экзамен |  |  |  |  | **30** |
| **Итого 6 семестр** | **72** | **32** | 0 | **32** | **40** |
| **Итого** | **216** | **104** | 0 | **104** | **112** |

**7. Фонд оценочных средств (ФОС)для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

**7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.**

**Экзаменационные вопросы**. Список теоретических вопросов (также будут задачи, см. ниже):

1. Определение кольца, минимального кольца, алгебры, полукольца, структура минимального кольца.
2. Примеры мер и зарядов. Определение меры на полукольца. Пример не аддитивной меры.
3. Непрерывные и аддитивные меры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
4. Сигма аддитивность длины. Определение и свойства внешней меры, измеримость по Лебегу.
5. Критерий измеримости по Лебегу.
6. Измеримость по Жордану. Сравнение с мерой Лебега.
7. Свойства измеримых множеств, конечная мера.
8. Канторово множество, пример неизмеримого множества.
9. Мера Лебега-Стильтьерса, необходимое и достаточное условие аддитивной меры.
10. Абсолютная непрерывность одной меры относительно другой, критерий абсолютной непрерывности меры относительно меры Лебега, пример неабсолютно непрерывной меры.
11. Измеримые функции, измеримость непрерывной функции, предела измеримых функций, производной.
12. Измеримость суммы, разности, произведения, частного измеримых функций. Теорема Егорова.
13. Сходимость по мере, единственность предела. Связь со сходимостью почти всюду.
14. Интеграл Лебега от простых функций, от ограниченных и неограниченных функций.
15. Интегрируемые функции и их свойства.
16. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега, теорема Лебега о предельном переходе.
17. Теоремы Леви и Фату. Интегрирование по множеству с конечной мерой.
18. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Пример функции неинтегрируемой по Риману даже при изменении на множестве меры нуль.
19. Пространство L, его полнота, плотность множества непрерывных функций в L.
20. Неравенство Гельдера, Минковского, полнота пространства , непрерывность в среднем функций из .
21. Заряды, представление заряда в виде разности двух взаимно сингулярных мер.
22. Теорема Радона-Никодима, производная Радона-Никодима.
23. Теорема Фубини о перестановке интегрирования.
24. Метрические пространства, пересечение открытых и замкнутых множеств, полные метрические пространства, непрерывные отображения.
25. Принцип сжимающих отображений, локальная форма принципа, примеры применения к решению интегральных уравнений.
26. Теорема Хаусдорфа о пополнении метрического пространства.
27. Плотные, нигде не плотные множества, принцип вложенных шаров, понятие категории, теорема Бэра-Хаусдорфа. Пример вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.
28. Компактные метрические пространства, их полнота, свойство ограниченности и вполне ограниченности.
29. Необходимое и достаточное условие предкомпактности, предкомпактность пространства при наличии предкомпактной сети.
30. Эквивалентность двух определений компактности.
31. Критерии предкомпактности в .
32. Банаховы пространства, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора, полнота пространства линейных ограниченных операторов.
33. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема о расходимости тригонометрического ряда.
34. Обратные операторы, правый, левый обратные операторы. Обратимые операторы, признак обратимости.
35. Обратимость оператора . Открытость множества обратимых операторов, сходимость обратных операторов.
36. Теорема Банаха об обратном операторе. Замкнутые операторы, теорема о замкнутом графике.
37. Теорема Хана-Банаха и следствия их нее.
38. Сопряженное пространство, связь между сепарабельностью исходного и сопряженного пространства.
39. Второе сопряженное пространство, рефлексивные пространства. Представление линейного ограниченного функционала в .
40. Слабая сходимость, ограниченность слабо сходящейся последовательности, слабая полнота рефлексивного пространства, признак слабой компактности.

**Задачи по функциональному анализу.**

1. Какова мощность всех непрерывных функций на ?
2. Доказать, что подмножество  такое, что  - замкнутое в .
3. Является ли множество  - непрерывных функций, удовлетворяющих условию  открытым в ?
4. Доказать, что пространство  - ограниченных последовательностей с метрикой является полным пространством.
5. Пусть  - отображение -мерного пространства в себя, задаваемое с системой линейных уравнений  или . В пространстве введена метрика двумя способами: а) , и б) , где , .

Доказать, что условие  является необходимым и достаточным, чтобы отображение являлось сжатием.

1. Доказать, что любое измеримое множество  на прямой с мерой  содержит измеримое подмножество меры .
2. Пусть - измеримое на сегменте  для любого интервала  имеет место неравенство . Доказать, что .
3. Пусть  и  - измеримые подмножества сегмента  и . Доказать, что .
4. Может ли открытое неограниченное множество иметь конечную меру?
5. Пусть замкнутое множество имеет конечную меру. Может ли оно быть неограниченным?
6. Доказать, что непрерывные функции на  эквивалентны тогда и только тогда, когда они равны.
7. Доказать, что непрерывные на измеримом множестве  функции являются измеримыми.
8. Доказать, что если имеет производную на сегменте , то производная  измерима.
9. Привести пример ограниченной, измеримой функции, не эквивалентной никакой функции, интегрируемой по Риману.
10. Привести пример неизмеримой функции. Доказать, что множество и его характеристическая функция измеримы или не измеримы одновременно.
11. Будет ли измерима функция  на ?
12. Будет ли измерима функция 
13. Пусть  - неизмеримое множество на интервале . Будет ли функция  измеримой?
14. Привести пример ограниченной функции, разрывной в каждой точке отрезка  и интегрируемой по Лебегу. Будет ли эта функция интегрируема по Риману?
15. Привести пример функции, интегрируемой по Лебегу на , но не являющейся ограниченной ни на каком отрезке .
16. При каких  и  функция  интегрируема по Лебегу на .
17. Доказать, что если  на множестве  и , то функция удовлетворяет неравенству Чебышева 
18. Существует ли интеграл Лебега от  на ?
19. Будет ли функция  интегрируемы по Лебегу на , если 
20. При каких  и  существует интеграл Лебега на , от функции .
21. Существует ли интеграл Лебега на  от функции 
22. Привести пример последовательности функций, сходящейся по мере на измеримом , но не сходящейся ни в одной точке множества .
23. Показать, что из сходимости почти всюду не следует сходимости в среднем. Рассмотреть пример: 
24. Показать, что из сходимости в среднем не следует сходимости почти всюду. Пример: для любого  определим 
25. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости почти всюду. Рассмотрите пример задачи 29.
26. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости в среднем. Пример: при 



1. Показать, что если мера множества  бесконечна, то из сходимости почти всюду не следует сходимость по мере. Пример: 
2. Показать, что из сходимости в  не следует сходимости в . Пример:



1. Доказать полноту пространства .
2. Будет ли полным пространство многочленов на сегменте , если метрика вводится по формуле: 
3. Доказать, что пространство  - сепарабельно.
4. Пусть - компактное множество в банаховом пространстве . Доказать, что для любого  найдется точка  такая, что 
5. Если на метрическом компакте  для любых , принадлежащих компакту, то оператор  имеет единственную неподвижную точку. Существенно ли условие компактности?
6. Доказать множество непрерывно дифференцируемых на  функций  таких, что  где  - постоянные, компактно в пространстве 
7. Будет ли компактом множество всех степеней  в пространстве 
8. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве компактно.
9. Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество компактно.
10. Доказать, что следующие функционалы в пространстве  являются линейными и непрерывными и найти их нормы:

  .

1. Пусть  - множество функций , определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая . Будет ли пространство банаховым?

**Пример экзаменационного билета**

|  |
| --- |
| 1. Доказать, что подмножество  такое, что  - замкнутое в .   Задачи:   1. Если на метрическом компакте  для любых , принадлежащих компакту, то оператор  имеет единственную неподвижную точку. Существенно ли условие компактности? 2. Пусть  - множество функций , определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая . Будет ли пространство банаховым? |

**Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации**.

|  |
| --- |
| 1. Привести пример последовательности функций, сходящейся по мере на измеримом множестве, но не сходящейся ни в одной точке этого множества. 2. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости почти всюду. 3. Пусть – компактное множество в банаховом пространстве . Доказать, что для любого  найдется точка  такая, что 4. Будет ли компактом множество всех степеней  , в пространстве ? 5. Доказать, что функционал , действующий в пространстве , является линейным и непрерывным, и найти его норму. 6. Определить спектр оператора , действующего в пространстве  по правилу: . |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| **Знания**  *Зачет* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания | |
| **Умения**  *Контрольная работа, зачет* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение | |
| **Навыки  (владения, опыт деятельности)**  *Зачет* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач | |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | | | | | |
| Результаты обучения | | | | | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**   1. основы теории меры и интеграла Лебега; 2. основные понятия теории метрических пространств; 3. принцип сжимающих отображений.   **Уметь:**   1. применять на практике интеграл Лебега; 2. формулировать теоретические и прикладные задачи в терминах метрических пространств.   **Владеть:**   1. навыками применения интеграла Лебега. | | | | | ОПК-1.Б |
| **Знать:**   1. общую теорию функциональных пространств; 2. обобщенные производные и пространства Соболева.   **Уметь:**   1. доказывать однозначную разрешимость уравнений с помощью принципа сжимающих отображений; 2. пользоваться обобщенными производными.   **Владеть:**   1. навыками применения принципа сжимающих отображений; | | | | | ОПК-2.Б |
| **Знать:**   1. теорию Фредгольма; 2. теорему о неподвижной точке.   **Уметь:**   1. применять теорию Фредгольма; 2. применять теорему о неподвижной точке.   **Владеть:**   1. навыками применения теорем Фредгольма. | | | | | ПК-2.Б |

**8. Ресурсное обеспечение:**

Основная литература:

1. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1981.
2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. *Краткий курс функционального анализа.* М.: Высшая школа, 1982

Дополнительная литература:

1. Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967.
2. Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. Линейные операторы. М.: ИЛ, 1962.
3. К. Иосида. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
4. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
5. А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
6. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
7. Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
8. У. Рудин. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

Информационные справочные системы:

https://eqworld.ipmnet.ru/

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания - русский.

10. Преподаватель: академик РАН, д.ф.-м.н., профессор,

заведующий кафедрой функционального анализа и его применений факультета ВМК МГУ Е.И. Моисеев

11. Авторы программы: академик РАН, д.ф.-м.н., профессор,

заведующий кафедрой функционального анализа и его применений факультета ВМК МГУ Е.И. Моисеев

профессор факультета ВМК МГУ Н.Ю. Капустин

доцент факультета ВМК МГУ А.А. Полосин