

А.С. Ильинский¹, Т.Н. Галишникова²

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ОСНОВНОЙ ВОЛНОВОДНОЙ ВОЛНЫ НА ИНДУКТИВНОМ ЦИЛИНДРЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Введение

Исследована задача дифракции волноводной волны на импедансном индуктивном стержне в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками. Векторная задача для системы уравнений Максвелла в волноводной области, содержащей препятствие, сводится к решению контурного интегрального уравнения Фредгольма, Ядро интегрального уравнения определяется функцией Грина незаполненного плоского волновода, удовлетворяющего неоднородному уравнению Гельмгольца внутри волновода, на стенках волновода – граничному условию первого рода.

1. Постановка задачи и интегральное уравнение для плоского волновода с индуктивным препятствием

Рассмотрим прямоугольный волновод с идеально проводящими боковыми стенками Σ . Выберем систему координат $Oxyz$ так, чтобы волновод был регулярен вдоль оси z . Обозначим через a и b размеры поперечного сечения D_1 волновода по осям x и y соответственно ($a > b$). Пусть внутри волновода параллельно его узкой стенке a расположен проводящий цилиндр так, что основания цилиндра находятся на стенках волновода (рис.1). Такой стержень называется *индуктивным*. Библиография по таким исследованиям содержится в работе [1]. Будем рассматривать установившиеся во времени волновые процессы, имеющие вид $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота.

Учитывая расположение цилиндра в волноводе и независимость от z поля падающей на цилиндр волны H_{10} , будем искать решение системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}(x, y, z) + i\omega \varepsilon_1 \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(x, y, z) - i\omega \mu_1 \mathbf{H}(x, y, z) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

не зависящим от z , т.е. в виде

¹ Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: celd@cs.msu.ru

² Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: tgalish@cs.msu.ru

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, z), \quad \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, z),$$

где ε_1 и μ_1 – диэлектрическая и магнитная проницаемости заполняющей среды волновода.

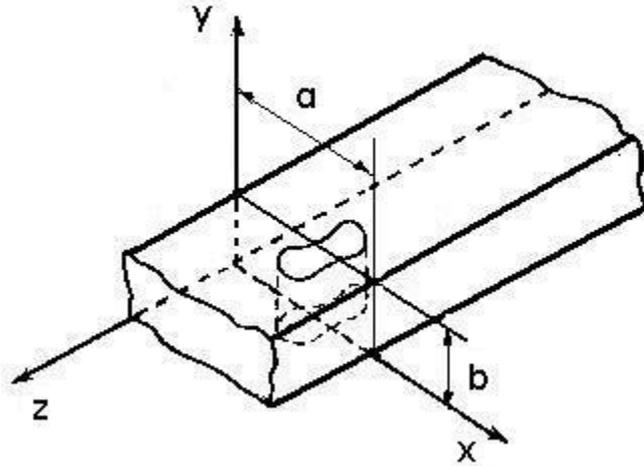


Рис. 1. Индуктивный цилиндр в прямоугольном волноводе.

Исследуемая векторная трёхмерная задача дифракции волны H_{10} сводится к следующей скалярной задаче относительно функции $E_y(x, z) = u(x, z)$. Найти во внутренней области плоского волновода вне цилиндра решение однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x, z) + k^2 u(x, z) = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющего на стенках волновода при $x = 0, x = a$ условию

$$u(x, z) = 0 \quad (2)$$

и импедансному граничному условию

$$\frac{\partial u(x, z)}{\partial n} - ik \frac{W_1}{W_2} u(x, z) = 0 \quad (3)$$

на поверхности цилиндра (на контуре S_0), а также парциальным условиям излучения на бесконечности. Здесь k – волновое число, $W_{1,2} = \sqrt{\mu_{1,2}/\varepsilon_{1,2}}$ – импедансы среды, заполняющей волновод, и металла, из которого изготовлен стержень, ε_2 и μ_2 – диэлектрическая и магнитная проницаемости металла, \mathbf{n} – нормаль, внутренняя к контуру S_0 .

Для получения интегрального уравнения необходимо ввести функцию Грина незаполненного волновода $g_1(M, P)$, которая удовлетворяет граничному условию первого рода на боковой поверхности волновода, неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta g_1(M, P) + k^2 g_1(M, P) = -2\pi \delta(r_{MP}), \quad (4)$$

где $r_{MP} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (z_M - z_P)^2}$, и условию излучения на бесконечности (здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака). Алгоритмы построения $g_1(M, P)$ рассмотрим далее.

Для получения интегрального уравнения используются формулы Грина, граничные условия (3), свойство непрерывности потенциала простого слоя и теорема Ляпунова - Таубера о скачке потенциала двойного слоя, в результате получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\frac{\partial u(P)}{\partial n}$ на S_0 , где $M \in S_0$:

$$\frac{1}{2} \alpha_E \frac{\partial u(M)}{\partial n} + \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \left[g_1(M, P) + \alpha_E \frac{\partial g_1(M, P)}{\partial n_P} \right] ds_P = -u_0(M).$$

Если из (3) выразить $\frac{\partial u(P)}{\partial n}$ через $u(P)$, можно получить аналогичное интегральное уравнение относительно $u(P)$ на S_0 . Здесь $u_0(P)$ – поле падающей волны, $\alpha_E = iW_2/kW_1$. Если цилиндр является идеально проводящим, что соответствует $\alpha_E = 0$, то в этом случае получаем интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

2. Метод отражений для построения функции Грина плоского незаполненного волновода

Построим функцию Грина незаполненного плоского волновода $g_1(M, P)$, которая удовлетворяет на границе волновода нулевому условию Дирихле, имеет при совпадении аргументов логарифмическую особенность и удовлетворяет условиям излучения на бесконечности. Её можно построить методом отражений. Действительно, функция $\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(kr_{MP})$, где $H_0^{(1)}(kr_{MP})$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода, имеет особенность типа $\ln(1/r_{MP})$ при совпадении аргументов M и P . Это следует из представления:

$$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(kr_{MP}) = \frac{i\pi}{2} J_0(kr_{MP}) - \frac{\pi}{2} N_0(kr_{MP}),$$

где $J_0(kr_{MP})$ – функция Бесселя нулевого порядка, $N_0(kr_{MP})$ – функция Неймана нулевого порядка. Поскольку $J_0(0) = 1$, а

$$\pi N_0(z) = 2J_0(z) \left(\ln \frac{z}{2} + c \right) - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2j} \sum_{l=1}^j \frac{1}{l},$$

$c = 0,57721566 \dots$ – постоянная Эйлера, особенность при $r_{MP} = 0$ функции $\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(kr_{MP})$ определяется особенностью функции $N_0(kr_{MP})$ и имеет порядок $\ln(1/r_{MP})$.

Далее рассмотрим полосу $\{0 \ll x \ll a, -\infty < z < \infty\}$ (рис. 2). Пусть источник расположен в точке $P(x_0, z_0)$, точка наблюдения M имеет координаты (x, z) , $M, P \in \{0 \ll x \ll a, -\infty < z < \infty\}$. Обозначим расстояние между точками M и P через r . Введём линейный заряд 1 противоположного знака в зеркально-симметричной относительно плоскости $x = a$ точке $(2a - x_0, z_0)$, расстояние от точки (x, z) до точки $(2a - x_0, z_0)$ обозначим через r_1 .

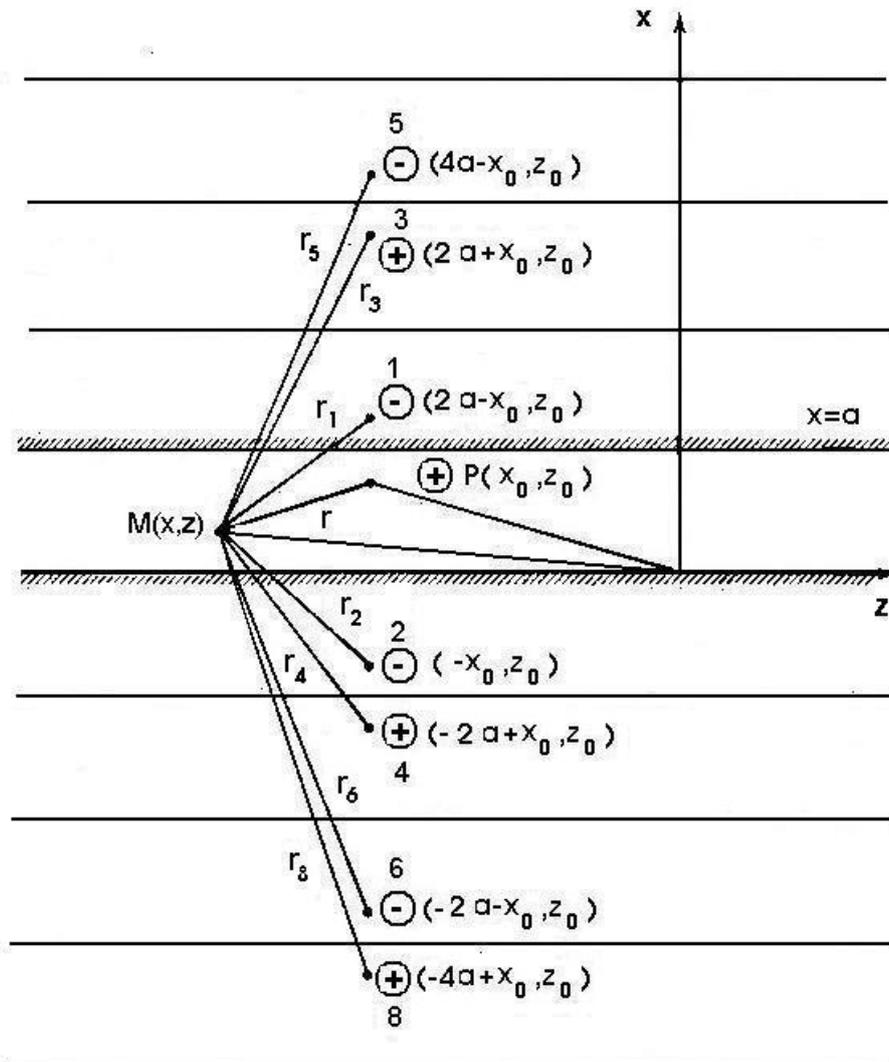


Рис. 2. Расположение зарядов при построении функции Грина плоского волновода методом отражений.

Рассмотрим функцию

$$g_1^{(1)}(r, r_1) = \frac{i\pi}{2} \left(H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr_1) \right).$$

Если точка наблюдения (x, z) лежит в плоскости $x = a$, то $r = r_1$ и $g_1^{(1)}(r_1, r_1) = 0$, т.е. функция $g_1^{(1)}(r, r_1)$ удовлетворяет нулевому условию Дирихле на плоскости $x = a$. Единственная особенность, имеющаяся в

полосе $\{0 \ll x \ll a, -\infty < z < \infty\}$, находится в точке расположения источника (x_0, z_0) при $r = 0$ и является особенностью логарифмического типа. При $r_1 = 0$ особенность находится за пределами рассматриваемой полосы, где представление для $g_1^{(1)}(r, r_1)$ не применимо.

Функция $g_1^{(1)}(r, r_1)$, удовлетворяющая нулевому условию Дирихле $g_1^{(1)}(r, r_1) = 0$ при $x = a$, не удовлетворяет этому условию при $x = 0$. Произведя отражение относительно плоскости $x = 0$, получим заряды противоположного знака в точке 2 с координатами $(-x_0, z_0)$ и расстоянием r_2 до точки (x, z) и в точке 4 с координатами $(-2a + x_0, z_0)$ и расстоянием r_4 до точки (x, z) . Полученная функция

$$g_1^{(2)}(r, r_1, r_2, r_4) = \frac{i\pi}{2} \left(H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr_1) + H_0^{(1)}(kr_4) - H_0^{(1)}(kr_2) \right)$$

удовлетворяет нулевому условию Дирихле при $x = 0$, но условие при $x = a$ окажется невыполненным. Снова производим отражение относительно плоскости $x = a$, получим заряды 3 и 5 в точках $(2a + x_0, z_0)$ и $(4a - x_0, z_0)$. Процесс продолжается неограниченно, приводя к бесконечному числу отражений источника (x_0, z_0) относительно плоскостей $x = 0$ и $x = a$. Положительные заряды находятся в точках с координатами $(2ma + x_0, z_0)$, отрицательные заряды – в точках $(2ma - x_0, z_0)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В результате получим функцию Грина

$$g_1(M, P) = \frac{i\pi}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[H_0^{(1)} \left(k \sqrt{(x - x_0 - 2ma)^2 + (z - z_0)^2} \right) - H_0^{(1)} \left(k \sqrt{(x + x_0 - 2ma)^2 + (z - z_0)^2} \right) \right], \quad (5)$$

удовлетворяющую нулевому условию Дирихле при $x = 0$, $x = a$ и имеющую в точке (x_0, z_0) логарифмическую особенность.

Функция (5) представлена в виде медленно сходящегося знакопеременного ряда. Действительно, при $|m| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0 - 2ma)^2 + (z - z_0)^2} &\approx 2|m|a \pm (x - x_0), \\ \sqrt{(x + x_0 - 2ma)^2 + (z - z_0)^2} &\approx 2|m|a \pm (x + x_0). \end{aligned}$$

Для функции $H_0^{(1)}(z)$ при $z \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$H_0^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left(i \left(z - \frac{\pi}{4} \right) \right). \quad (6)$$

При больших значениях kta (пусть для определённости $t > 0$) заменим функцию Ханкеля её асимптотическим значением по формуле (6), учитывая, что $\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \sqrt{i}$, получим

$$\begin{aligned} & H_0^{(1)}\left(k \sqrt{(x - x_0 - 2ta)^2 + (z - z_0)^2}\right) \\ & \quad - H_0^{(1)}\left(k \sqrt{(x + x_0 - 2ta)^2 + (z - z_0)^2}\right) \approx \\ & \approx \sqrt{\frac{1}{i\pi kta}} \left[\exp(ik(2ta - x + x_0)) - \exp(ik(2ta - x - x_0)) \right] = \\ & = \sqrt{\frac{4i}{\pi kta}} \exp(ik(2ta - x)) \sin(kx_0). \end{aligned}$$

Таким образом, при $t > 0$ ряд (5) аппроксимируется рядом

$$2 \sqrt{\frac{i}{\pi ka}} \exp(-ikx) \sin(kx_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(2ikma)}{\sqrt{m}},$$

который сходится условно (не абсолютно). Аналогично получается при $t < 0$. Следовательно, ряд (5) также сходится условно со скоростью $O\left(1/\sqrt{m}\right)$, т.е. очень медленно.

3. Преобразование Пуассона при построении функции Грина плоского волновода

С помощью формулы суммирования Пуассона [2]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\nu\tau) d\tau \quad (7)$$

из разложения (5) получим представление для функции $g_1(M, P)$ в виде разложения в ряд по собственным функциям поперечного сечения плоского волновода. При этом нам потребуются интегралы [2]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik(x-x_0))}{k^2 - K^2} dk = \frac{i}{2K} \exp(iK|x-x_0|),$$

$$H_0^{(1)}(k|r - r_0|) = \frac{i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dK_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i(K_x(x - x_0) + K_z(z - z_0))\right)}{k^2 - K_x^2 - K_z^2} dK_z, \quad (8)$$

$$|r - r_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad K^2 = K_x^2 + K_z^2.$$

Способ, каким обходятся полюсы при вычислении интегралов (8), укажем ниже.

Итак, нам нужно вычислить интеграл под знаком суммы в правой части (7), т.е.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu\tau) \left[H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x - x_0 - \tau a/\pi)^2 + (z - z_0)^2}\right) - H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x + x_0 - \tau a/\pi)^2 + (z - z_0)^2}\right) \right] d\tau.$$

$$I = \frac{i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dK_z \int_{-\infty}^{\infty} dK_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu\tau) \times \left[\frac{\exp\left(i(K_x(x - x_0 - \tau a/\pi) + K_z(z - z_0))\right)}{k^2 - K_x^2 - K_z^2} - \frac{\exp\left(i(K_x(x + x_0 - \tau a/\pi) + K_z(z - z_0))\right)}{k^2 - K_x^2 - K_z^2} \right] d\tau.$$

Учитывая, что $\exp(-iK_x x_0) - \exp(iK_x x_0) = -2i \sin(K_x x_0)$, предыдущее соотношение перепишем в виде:

$$I = \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iK_z(z - z_0)) dK_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iK_x x) \sin(K_x x_0)}{k^2 - K_x^2 - K_z^2} dK_x \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\tau\left(\nu + \frac{K_x a}{\pi}\right)\right) d\tau.$$

Интеграл по τ берётся, так как [3]

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega(x - x_0)) d\omega,$$

здесь ω – параметр интегрирования, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Поскольку $\delta(-x) = \delta(x)$, то будем иметь

$$I = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iK_z(z - z_0)) dK_z \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iK_x x) \sin(K_x x_0) \delta\left(\nu + \frac{K_x a}{\pi}\right)}{k^2 - K_x^2 - K_z^2} dK_x.$$

Интеграл по K_x также можно взять, если учесть, что [3, 4]

$$\delta\left(\nu + \frac{K_x a}{\pi}\right) = \frac{\pi}{a} \delta\left(K_x + \frac{\nu\pi}{a}\right),$$

$$\int_c^d f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad c \leq x_0 \leq d,$$

получим

$$I = -\frac{4}{a} \exp\left(-\frac{i\pi\nu x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi\nu x_0}{a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iK_z(z - z_0))}{\left(k^2 - \frac{\pi^2\nu^2}{a^2}\right) - K_z^2} dK_z.$$

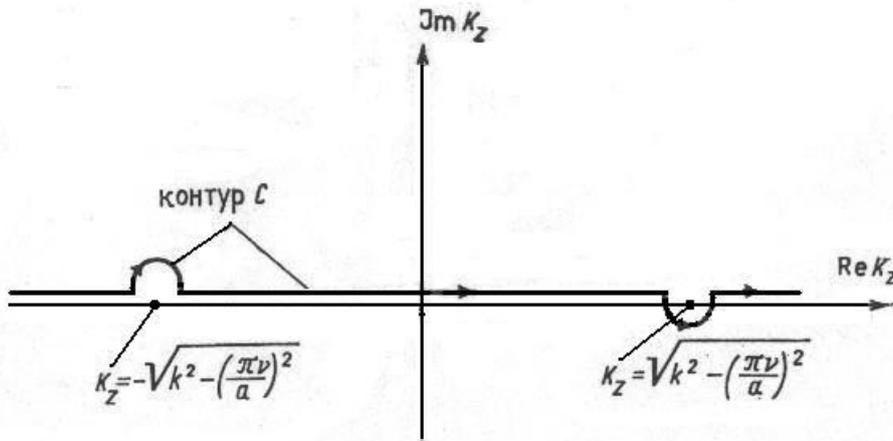


Рис. 3. Выбор контура интегрирования в преобразовании Пуассона при построении функции Грина плоского волновода.

Оставшийся интеграл по K_z берётся, если контур интегрирования C взять в плоскости K_z как на рис. 3. Такой выбор контура C обусловлен тем, чтобы точка $x = x_0, z = z_0$ была только источником, т.е. от неё волны расходились. Используя первую формулу в (8), перепишем I следующим образом:

$$I = 4\pi i/a \exp\left(-\frac{i\pi\nu x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi\nu x_0}{a}\right) \frac{\exp\left(i|z-z_0|\sqrt{k^2-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{k^2-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2}}}.$$

Следовательно, получили разложение для функции Грина $g_1(M, P)$ вида $g_1(M, P) =$

$$\begin{aligned} &= -\pi/a \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\pi\nu x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi\nu x_0}{a}\right) \frac{\exp\left(i|z-z_0|\sqrt{k^2-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{k^2-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2}}} = \\ &= -\pi/a \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\exp\left(\frac{i\pi\nu x}{a}\right) \sin\left(-\frac{\pi\nu x_0}{a}\right) + \exp\left(-\frac{i\pi\nu x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi\nu x_0}{a}\right) \right] \times \\ &\quad \times \frac{\exp\left(i|z-z_0|\sqrt{k^2-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{k^2-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2}}} = \\ &= 2\pi i/a \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi\nu x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi\nu x_0}{a}\right)}{\sqrt{k^2-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2}}} \exp\left(i|z-z_0|\sqrt{k^2-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2}}\right) = \\ &= 2\pi/a \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi\nu x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi\nu x_0}{a}\right)}{p_\nu} \exp(-p_\nu |z-z_0|), \quad (9) \\ &\quad p_\nu = -i\gamma_\nu = -i\sqrt{k^2-\frac{\pi^2\nu^2}{a^2}}. \end{aligned}$$

Ветвь корня у постоянных распространения нормальных волн плоского регулярного волновода γ_ν выбирается так, чтобы $\text{Im } \gamma_\nu > 0$. Если $\text{Im } \gamma_\nu = 0$, то $\text{Re } \gamma_\nu > 0$. Такой выбор ветви корня обусловлен временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$.

Итак, получили представление (9) для функции $g_1(M, P)$ в виде разложения в ряд по собственным ортонормированным функциям $\varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi\nu x}{a}\right)$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, поперечного сечения плоского волновода. В работах [5, 6] разработан специальный алгоритм улучшения сходимости

ряда (9), позволивший выделить содержащуюся в нём логарифмическую особенность.

Заключение

Методом интегральных уравнений рассмотрена задача дифракции поля основной волноводной волны на индуктивном цилиндре, расположенном в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками. Ядро исследуемого интегрального уравнения Фредгольма определяется функцией Грина плоского волновода, для построения которой применён метод отражений и преобразование Пуассона. С помощью преобразования Пуассона функция $g_1(M, P)$ представлена в виде ряда по собственным функциям поперечного сечения плоского волновода.

Литература

1. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Метод интегральных уравнений в задачах дифракции волн. - М.: МАКС Пресс, 2013.
2. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. – М.: ИЛ, 1958.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
5. Il'inskii A.S., Galishnikova T.N. The Method of Integral Equation in Problems of Wave Diffraction in Waveguides // Lobachevskii Journal of Mathematics, издательство Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet / Kazan State University (Russian Federation), 2019, vol. 40, No. 10, pp. 1660-1672.
6. Il'inskii A.S., Galishnikova T.N. Study of the Kernels of Integral Equations in Problems of Wave Diffraction in Waveguides and by Periodic Structures //Differential Equations, 2020, vol. 56, No. 9, pp. 1167-1180.