

Т.Н. Галишникова¹, А.С. Ильинский²

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

Рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны на прозрачном бесконечном цилиндре произвольного поперечного сечения, находящемся в свободном пространстве. Для построения численного алгоритма краевая задача для системы уравнений Максвелла в бесконечной неоднородной области сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений, которая решается методом аппроксимации и коллокации. Элементы полученной комплексной матрицы вычислены с помощью специально разработанного алгоритма, учитывающего как сильную, так и логарифмическую особенности входящих в них интегралов [1,2].

1. Постановка задачи и граничные условия на поверхности диэлектрического цилиндра

Пусть в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε_1 и магнитной проницаемостью μ_1 расположен бесконечный диэлектрический цилиндр соответственно с постоянными характеристиками ε_2 и μ_2 ; $k_{1,2}^2 = \omega^2 \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}$ – волновые числа, где ω – круговая частота. Введём декартову систему координат $Oxyz$ таким образом, что ось z была параллельна образующей цилиндра. Будем рассматривать установившиеся во времени волновые процессы, имеющие вид $\exp(-i\omega t)$.

Предположим, что на цилиндр из полупространства $x \geq 0$ падает произвольно направленная плоская волна, заданная в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(x, y, z) &= \mathbf{E}_0 \exp(-i\alpha_0 x + i\beta_0 y + i\gamma_0 z), \\ \mathbf{H}_0(x, y, z) &= \mathbf{H}_0 \exp(-i\alpha_0 x + i\beta_0 y + i\gamma_0 z), \end{aligned} \quad (1)$$

где, по определению,

$$\alpha_0 = k_1 \sin \varphi_0 \cos \vartheta_0, \quad \beta_0 = k_1 \sin \varphi_0 \sin \vartheta_0, \quad \gamma_0 = k_1 \cos \varphi_0.$$

¹ Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: tglish@cs.msu.ru

² Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: celd@cs.msu.ru

Здесь φ_0 – угол между осью z и направлением распространения падающей волны; ϑ_0 – угол между отрицательным направлением оси x и проекцией на плоскость $z = 0$ направления распространения падающего поля, имеющего амплитуду $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$. Углы φ_0 и ϑ_0 меняются в пределах $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$; $-\pi/2 \leq \vartheta_0 \leq \pi/2$; $\lambda = 2\pi/k_1$ – длина волны в однородном пространстве, $k_1^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2$.

Обозначим полное электромагнитное поле в областях V_1 и V_2 , т.е. вне и внутри диэлектрического цилиндра, через $\mathbf{E}_1(x, y, z)$, $\mathbf{H}_1(x, y, z)$ и $\mathbf{E}_2(x, y, z)$, $\mathbf{H}_2(x, y, z)$. Боковую поверхность цилиндра обозначим через Σ . Эти поля будут удовлетворять в соответствующих областях $V_{1,2}$ уравнениям Максвелла вида

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_{1,2}(x, y, z) + i\omega\epsilon_{1,2}\mathbf{E}_{1,2}(x, y, z) &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_{1,2}(x, y, z) - i\omega\mu_{1,2}\mathbf{H}_{1,2}(x, y, z) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача состоит в нахождении неизвестных электромагнитных полей $\mathbf{E}_{1,2}(x, y, z)$, $\mathbf{H}_{1,2}(x, y, z)$ в областях $V_{1,2}$, удовлетворяющих однородным уравнениям Максвелла (1) с соответствующими параметрами, граничным условиям на поверхности Σ , обеспечивающим непрерывность тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей при переходе через границу Σ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}(x, y, 0) \times \mathbf{E}_1(x, y, z)] &= [\mathbf{n}(x, y, 0) \times \mathbf{E}_2(x, y, z)], \\ [\mathbf{n}(x, y, 0) \times \mathbf{H}_1(x, y, z)] &= [\mathbf{n}(x, y, 0) \times \mathbf{H}_2(x, y, z)], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{E}_{1,2}(x, y, z)$, $\mathbf{H}_{1,2}(x, y, z)$ – полные поля. Для рассеянных полей $\mathbf{E}_1(x, y, z) - \mathbf{E}_0(x, y, z)$, $\mathbf{H}_1(x, y, z) - \mathbf{H}_0(x, y, z)$ в области V_1 должны выполняться условия излучения. Здесь $\mathbf{n}$ – нормаль, внешняя к области V_2 .

Проведём сечение плоскостью $z = 0$ области $V_1 \cup \Sigma \cup V_2$. Обозначим через S кривую, по которой пересекаются поверхности $z = 0$ и Σ , где S – кривая Ляпунова. Двумерную область, расположенную вне S обозначим через D_1 , а внутри S – через D_2 .

Если падающее поле (1) Е- или Н-поляризовано, т.е. $\gamma_0 = 0$, поставленная задача (1)-(3) сводится к решению скалярных задач, состоящих в определении в областях $D_{1,2}$ неизвестных функций $u_{1,2}(x, y)$ являющихся продольными вдоль оси z компонентами полного поля $\mathbf{E}_{1,2}(x, y)$ в случае Е-поляризации или $\mathbf{H}_{1,2}(x, y)$ в случае Н-поляризации.

Рассмотрим, как в этих случаях записываются граничные условия (3). В случае Е-поляризации имеем

$$\mathbf{E}(x, y) = \{0, 0, u(x, y)\}, \quad \mathbf{H}(x, y) = \left\{ -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, 0 \right\}.$$

Поскольку $\mathbf{n}(x, y) = \{n_x(x, y), n_y(x, y), 0\}$, то вектор $[\mathbf{n}(x, y) \times \mathbf{E}(x, y)]$ будет иметь вид:

$$[\mathbf{n}(x, y) \times \mathbf{E}(x, y)] = \{n_y(x, y) u(x, y), -n_x(x, y) u(x, y), 0\},$$

и первое из условий (3) на S запишем так:

$$\begin{aligned} & \{n_y(x, y) u_1(x, y), -n_x(x, y) u_1(x, y), 0\} = \\ & = \{n_y(x, y) u_2(x, y), -n_x(x, y) u_2(x, y), 0\}. \end{aligned}$$

Из условия равенства векторов следует равенство соответствующих координат. Если равенство для x -х координат умножить на $n_y(x, y)$, а равенство для y -х координат – на $n_x(x, y)$ и результаты сложить, а также учесть, что $n_x^2(x, y) + n_y^2(x, y) = 1$, то получим первое граничное условие:

$$u_1(x, y)|_S = u_2(x, y)|_S. \quad (4)$$

Вектор $[\mathbf{n}(x, y) \times \mathbf{H}(x, y)]$ имеет отличную от нуля z -ю компоненту, т.е.

$$\begin{aligned} & [\mathbf{n}(x, y) \times \mathbf{H}(x, y)] = \\ & = \left\{ 0, 0, \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} n_y(x, y) + \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} n_x(x, y) \right\} = \left\{ 0, 0, \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому второе граничное условие в (3) в скалярной форме имеет вид:

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial n} \Big|_S = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n} \Big|_S. \quad (5)$$

Следовательно, в случае Е-поляризации граничные условия, обеспечивающие непрерывность тангенциальных составляющих электрического и магнитных полей при переходе через границу S , записываются в виде (4) и (5).

В случае Н-поляризации

$$\mathbf{H}(x, y) = \{0, 0, u(x, y)\}, \quad \mathbf{E}(x, y) = \left\{ \frac{i}{\omega\varepsilon} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, -\frac{i}{\omega\varepsilon} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, 0 \right\},$$

следовательно

$$[\mathbf{n}(x, y) \times \mathbf{E}(x, y)] = \left\{ 0, 0, -\frac{i}{\omega\varepsilon} \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right\}.$$

Таким образом, первое граничное условие в (3) перепишем в виде:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial n} \Big|_S = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n} \Big|_S. \quad (6)$$

Наконец, $[\mathbf{n}(x, y) \times \mathbf{H}(x, y)] = \{n_y(x, y) u(x, y), n_x(x, y) u(x, y), 0\}$, поэтому аналогично Е-поляризации получаем из граничного условия (3) соотношение

$$\begin{aligned} \{n_y(x, y) u_1(x, y), n_x(x, y) u_1(x, y), 0\} = \\ = \{n_y(x, y) u_2(x, y), n_x(x, y) u_2(x, y), 0\}, \end{aligned}$$

аналогичное (4).

Сформулируем в окончательном виде граничные условия на S для скалярной задачи:

$$u_1(x, y)|_S = u_2(x, y)|_S,$$

$$p_1 \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial n} \Big|_S = p_2 \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n} \Big|_S, \quad (7)$$

где

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{\mu_1}, \quad p_2 = \frac{1}{\mu_2}, \quad \text{для Е – поляризации;} \\ p_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}, \quad p_2 = \frac{1}{\varepsilon_2}, \quad \text{для Н – поляризации.} \end{cases} \quad (8)$$

Теперь окончательно сформулируем полученную краевую задачу для скалярных полей. Найти решения $u_{1,2}(x, y)$, удовлетворяющие однородным уравнениям Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_{1,2}(x, y) + k_{1,2}^2 u_{1,2}(x, y) = 0 \quad (9)$$

соответственно в областях $D_{1,2}$, где $u_{1,2}(x, y)$ – полные электромагнитные поля, удовлетворяющие на S граничным условиям (7)-(8), а поле

$$u_1(x, y) - u_0(x, y) = u_1(x, y) - \exp(-i\alpha_0 x + i\beta_0 y)$$

удовлетворяет условию излучения, где $u_0(x, y)$ – падающее поле.

Единственность решения сформулированной краевой задачи доказана в работе [3].

2. Вывод системы интегральных уравнений

Введём функции Грина, $g_{1,2}(M, P)$ для каждой из которых на всей плоскости справедливо одно из неоднородных уравнений Гельмгольца

$$\Delta g_{1,2}(M, P) + k_{1,2}^2 g_{1,2}(M, P) = -2\pi\delta(M, P) \quad (10)$$

и условие излучения на бесконечности. Эти функции Грина имеют вид:

$$g_{1,2}(M, P) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(k_{1,2} r_{M,P}), \quad r_{M,P} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2}, \quad (11)$$

где $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода; (x_M, y_M) и (x_P, y_P) координаты точек M и P соответственно.

Применяя в области D_1 к функциям $u_1(P)$ и $g_1(M, P)$, вторую формулу Грина и используя (9) и (11), получим соотношение, позволяющее определить поле $u_1(M)$ в области D_1 через $u_1(P)$ и $\frac{\partial u_1(P)}{\partial n}$ на S :

$$u_1(M) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[g_1(M, P) \frac{\partial u_1(P)}{\partial n} - u_1(P) \frac{\partial g_1(M, P)}{\partial n_P} \right] ds_P + u_0(M), \quad (12)$$

где $M \in D_1$. Аналогично можно получить интегральное представление для поля $u_2(P)$ в области D_2 :

$$u_2(M) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[u_2(P) \frac{\partial g_2(M, P)}{\partial n_P} - g_2(M, P) \frac{\partial u_2(P)}{\partial n} \right] ds_P, \quad (13)$$

где $M \in D_2$.

Для получения интегральных уравнений опустим в формулах (12) и (13) точку M на контур S . Учитывая при переходе через границу непрерывность потенциала простого слоя и разрыв потенциала двойного слоя, имеем

$$\frac{1}{2} u_1(M) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[g_1(M, P) \frac{\partial u_1(P)}{\partial n} - u_1(P) \frac{\partial g_1(M, P)}{\partial n_P} \right] ds_P + u_0(M), \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} u_2(M) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[u_2(P) \frac{\partial g_2(M, P)}{\partial n_P} - g_2(M, P) \frac{\partial u_2(P)}{\partial n} \right] ds_P, \quad (15)$$

где $M \in S$ в соотношениях (14) и (15).

Сложив соотношения (14) и (15) и учитывая граничные условия для поля (7)-(8), получим

$$\begin{aligned} u_2(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S u_2(P) \left[\frac{\partial g_2(M, P)}{\partial n_P} - \frac{\partial g_1(M, P)}{\partial n_P} \right] ds_P + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial u_2(P)}{\partial n} \left[g_2(M, P) - \frac{p_2}{p_1} g_1(M, P) \right] ds_P = u_0(M), \quad M \in S. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом получили первое интегральное уравнение для нахождения на S неизвестных функций $u_2(P)$ и $\frac{\partial u_2(P)}{\partial n}$.

Для вывода второго интегрального продифференцируем соотношения (12) и (13) по нормали, точку M опустим на S и учтём свойства нормальных производных потенциалов двойного и простого слоёв. В результате получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_1(M)}{\partial n_M} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_S \left[\frac{\partial u_1(P)}{\partial n_P} g_1(M, P) - u_1(P) \frac{\partial g_1(M, P)}{\partial n_P} \right] ds_P + \frac{\partial u_0(M)}{\partial n_M}, \quad M \in S, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_2(M)}{\partial n_M} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_S \left[u_2(P) \frac{\partial g_2(M, P)}{\partial n_P} - g_2(M, P) \frac{\partial u_2(P)}{\partial n_P} \right] ds_P. \quad M \in S. \quad (18)$$

Сложив соотношения, входящие в (17), (18), и приняв во внимание граничные условия (7), (8), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_2}{p_1} \right) \frac{\partial u_2(M)}{\partial n_M} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_S u_2(P) \left[\frac{\partial g_2(M, P)}{\partial n_P} - \frac{\partial g_1(M, P)}{\partial n_P} \right] ds_P + \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_S \frac{\partial u_2(P)}{\partial n_P} \left[g_2(M, P) - \frac{p_2}{p_1} g_1(M, P) \right] ds_P = \frac{\partial u_0(M)}{\partial n_M}, \quad M \in S. \end{aligned} \quad (19)$$

Итак, получили систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $u_2(P)$ и $\frac{\partial u_2(P)}{\partial n_P}$ на S следующего вида:

$$\begin{aligned} & u_2(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S u_2(P) \frac{\partial}{\partial n_P} [g_2(M, P) - g_1(M, P)] ds_P + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial u_2(P)}{\partial n_P} \left[g_2(M, P) - \frac{p_2}{p_1} g_1(M, P) \right] ds_P = u_0(M), \\ & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_2}{p_1} \right) \frac{\partial u_2(M)}{\partial n_M} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_S u_2(P) \frac{\partial}{\partial n_P} [g_2(M, P) - g_1(M, P)] ds_P + \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_S \frac{\partial u_2(P)}{\partial n_P} \left[g_2(M, P) - \frac{p_2}{p_1} g_1(M, P) \right] ds_P = \frac{\partial u_0(M)}{\partial n_M}, \quad M \in S. \end{aligned} \quad (20)$$

В работе [4] доказана единственность решения системы интегральных уравнений (20) в классе функций с непрерывной в смысле Гёльдера производной. Поскольку система (20) является системой интегральных уравнений Фредгольма второго рода, то из единственности решения системы следует его существование в рассматриваемом классе функций. А из существования и единственности решения для системы (20) следует существование исходной краевой задачи. Таким образом, показана эквивалентность сформулированной краевой задачи (1)-(3) и системы интегральных уравнений (20).

Решив систему (20), найдём по формулам (12), (13) и принимая во внимание граничные условия (7), (8), искомое поле во всех точках как области D_1 , так и области D_2 .

3. Численный алгоритм решения системы сингулярных интегральных уравнений

Вычислительный алгоритм основан на сведении системы интегральных уравнений (20) методом аппроксимации и коллокации к комплексной системе линейных алгебраических уравнений. Обозначим через S_0 длину контура S . Разобьём отрезок $[0, S_0]$ точками P_i на N частей, где $P_0 = 0$, $P_N = S_0$. Интегралы, входящие в систему уравнений (20), заменяем суммами интегралов по отрезкам разбиения. Искомое решение на участке разбиения $[S(P_j), S(P_{j+1})]$ приближаем неизвестной постоянной, которую обозначим как значение кусочно-постоянной аппроксимирующей функции в средней точке $P_{j+1/2}$ участка разбиения.

Полагая $M = M_{i+1/2}$, $i, j = 0, \dots, N-1$, в результате получаем алгебраическую систему порядка $2N$ относительно неизвестных значений $u_2(P)$ и $\frac{\partial u_2(P)}{\partial n_P}$ на контуре S :

$$\begin{aligned}
 & u_2 \left(M_{i+1/2} \right) - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} u_2 \left(P_{j+1/2} \right) \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[g_2 \left(M_{i+1/2}, P \right) - g_1 \left(M_{i+1/2}, P \right) \right] ds_P + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial u_2(P_{j+1/2})}{\partial n} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \left[g_2 \left(M_{i+1/2}, P \right) - \frac{p_2}{p_1} g_1 \left(M_{i+1/2}, P \right) \right] ds_P = \\
 & = u_0 \left(M_{i+1/2} \right), \\
 & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_2}{p_1} \right) \frac{\partial u_2(M_{i+1/2})}{\partial n_M} - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} u_2 \left(P_{j+1/2} \right) \frac{\partial}{\partial n_M} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[g_2 \left(M_{i+1/2}, P \right) - g_1 \left(M_{i+1/2}, P \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial u_2(P_{j+1/2})}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \left[g_2(M, P) - \frac{p_2}{p_1} g_1(M, P) \right] ds_P = \\
 & = \frac{\partial u_0(M)}{\partial n_M}, \quad M \in S. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Возникает вопрос о вычислении интегралов, входящих в формулы для расчёта элементов матрицы. Заметим, что те элементы матрицы в системе алгебраических уравнений (21), которые зависят от функций Грина $g_{1,2}(M, P)$, определённых равенством (11), в силу свойств функции Ханкеля имеют логарифмическую особенность при совпадении аргументов, поэтому при построении численного алгоритма

логарифмическая особенность выделяется в явном виде и соответствующие интегралы вычисляются аналитически. При вычислении элементов матрицы, зависящих от первой нормальной производной, нужно выбирать так точки разбиения при численном интегрировании, чтобы $M \neq P$.

Во втором уравнении, входящем в систему (20), имеется ядро, зависящее от второй нормальной производной функции Грина, т.е. от $\partial^2 g_{1,2}(M, P) / \partial n_M \partial n_P$. Покажем, что при вычислении соответствующих элементов матрицы можно так преобразовать подынтегральную функцию, представив её в виде двух слагаемых, что первое из них окажется полным дифференциалом некоторой функции, и, как следствие, интеграл от него вычисляется аналитически, а второе слагаемое будет иметь логарифмическую особенность, и его интегрирование осуществляется с помощью выделения этой особенности.

Используем параметрическую формулу записи контура $S: x = x(s), y = y(s)$. Тогда нормаль к области S есть $\mathbf{n} = -y'_s \mathbf{i} + x'_s \mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – орты осей x и y . Рассмотрим в матрице системы (21) элемент, который зависит от второй нормальной производной функции Грина, при этом учтём равенство $\partial f(M) / \partial n_M = (\mathbf{n}_M, \text{grad } f(M))$, вид функции Грина (11) и выражение для нормали $\mathbf{n}_M = -y'_{s_M} \mathbf{i} + x'_{s_M} \mathbf{j}$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial n_M} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[g_2(M_{i+1/2}, P) - g_1(M_{i+1/2}, P) \right] ds_P = \\
 & = (\mathbf{n}_M, \text{grad}_M \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[g_2(M_{i+1/2}, P) - g_1(M_{i+1/2}, P) \right]) = \\
 & = -y'_{s_M} \frac{\partial}{\partial x_M} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[g_2(M_{i+1/2}, P) - g_1(M_{i+1/2}, P) \right] ds_P + \\
 & + x'_{s_M} \frac{\partial}{\partial y_M} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[g_2(M_{i+1/2}, P) - g_1(M_{i+1/2}, P) \right] ds_P = \\
 & = -\frac{i\pi}{2} y'_{s_M} \frac{\partial}{\partial x_M} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] ds_P + \\
 & + \frac{i\pi}{2} x'_{s_M} \frac{\partial}{\partial y_M} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] ds_P.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Во втором равенстве соотношений (22) сначала вычисляем градиент функции в точке M , а затем полагаем $M = M_{i+1/2}$.

В последнем выражении соотношений (22) преобразуем сначала одно из слагаемых, содержащее частную производную по x , которое обозначим через $K_x(M_i, P_j)$, а именно

$$\begin{aligned}
K_x(M_i, P_j) &= \frac{\partial}{\partial x_M} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - (k_1 M_{i+1/2}, P) \right] ds_P = \\
&= - \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{\partial}{\partial x_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] ds_P = \\
&= \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial x_P} \left[\frac{\partial}{\partial x_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] \right] y'_{s_P} ds_P - \\
&- \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial y_P} \left[\frac{\partial}{\partial x_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] \right] x'_{s_P} ds_P.
\end{aligned}$$

Учитывая, что используемые функции Ханкеля удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца при $M \neq P$, предыдущее соотношение для $K_x(M_i, P_j)$ запишем в виде:

$$\begin{aligned}
K_x(M_i, P_j) &= \\
&= - \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial y_P} \left[\frac{\partial}{\partial y_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] \right] y'_{s_P} ds_P - \\
&- \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \left[k_2^2 H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - k_1^2 H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] y'_{s_P} ds_P - \\
&- \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial x_P} \left[\frac{\partial}{\partial y_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] \right] x'_{s_P} ds_P = \\
&= - \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_P} \left[\frac{\partial}{\partial y_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] \right] x'_{s_P} + \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial y_P} \left[\frac{\partial}{\partial y_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] \right] y'_{s_P} \Big\} ds_P - \\
&- k_2^2 \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) y'_{s_P} ds_P + \\
&+ k_1^2 \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) y'_{s_P} ds_P = \\
&= - \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} d \left[\frac{\partial}{\partial y_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] \right] - \\
&- k_2^2 \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) y'_{s_P} ds_P + \\
&+ k_1^2 \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) y'_{s_P} ds_P. \tag{23}
\end{aligned}$$

Итак, получили, что в последнем выражении соотношений (23) под знаком первого интеграла содержится полный дифференциал, и этот интеграл вычисляется аналитически.

Аналогично в последнем выражении соотношений (22) преобразуем слагаемое, содержащее частную производную по y , которое обозначим через $K_y(M_i, P_j)$, а именно

$$\begin{aligned} K_y(M_i, P_j) &= \frac{\partial}{\partial y_M} \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} \frac{\partial}{\partial n_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - (k_1 M_{i+1/2}, P) \right] ds_P = \\ &= \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} d \left[\frac{\partial}{\partial x_P} \left[H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) - H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) \right] \right] + \\ &\quad + k_2^2 \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} H_0^{(1)}(k_2 M_{i+1/2}, P) x'_{s_P} ds_P - \\ &\quad - k_1^2 \int_{S(P_j)}^{S(P_{j+1})} H_0^{(1)}(k_1 M_{i+1/2}, P) x'_{s_P} ds_P. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно, и при вычислении частной производной по y в подынтегральной функции получили полный дифференциал.

Соотношения (23) и (24) позволяют свести сингулярные интегралы в системе (21) к вычислению интегралов с логарифмической особенностью.

При реализации численного алгоритма решения системы (21) появляются дополнительные трудности, связанные с тем, что интегрирование осуществляется по длине контура S , а ядра интегральных уравнений зависят от координат точек M и P . Для произвольного контура S координаты точек M и P невозможно выразить через длину дуги без вычисления квадратур. Поэтому целесообразно ввести вспомогательный контур L , составленный, например, из отрезков прямых линий, парабол и частей окружностей таким образом, чтобы связь между координатами точек на этом контуре L и длиной дуги устанавливалась с помощью простых соотношений, а форма вспомогательного контура L была бы достаточно близка к исходному контуру S .

Пусть $r = r_0(\varphi)$ – уравнение контура S в полярной системе координат с центром в некоторой точке O , лежащей внутри области D_2 . Выбрав контур L таким, для которого легко получить зависимость полярного угла φ как функцию l – длину дуги на контуре L , т.е. $\varphi = \varphi(l)$, получим параметрическое задание контура S как функцию длины дуги l контура L :

$$r = r_0(\varphi(l)) = R(l), \quad x = R(l) \cos \varphi(l), \quad y = R(l) \sin \varphi(l).$$

При этом элемент дуги ds контура S связан следующим образом с новым параметром интегрирования dl :

$$ds = \sqrt{R^2(l)(\varphi'(l))^2 + (R'(l))^2} dl. \quad (25)$$

Соотношение (25) позволяет в исследуемых интегральных уравнениях перейти от интегрирования по S к интегрированию по L .

Заключение

Рассмотрена задача дифракции поля плоской электромагнитной волны на диэлектрическом бесконечном цилиндре произвольного поперечного сечения в свободном пространстве. Для построения численного алгоритма применён метод интегральных уравнений. Краевая задача для системы уравнений Максвелла в неоднородном пространстве сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений, которая решена методом аппроксимации и коллокации. При вычислении соответствующих элементов матрицы, к решению которой сведена система сингулярных интегральных уравнений, разработан специальный вычислительный алгоритм, суть которого состоит в преобразовании подынтегральной функции, зависящей от второй нормальной производной используемой функции Грина, в виде двух слагаемых так, что первое из них окажется полным дифференциалом некоторой функции, и, как следствие, интеграл от него вычисляется аналитически, а второе слагаемое будет иметь логарифмическую особенность, и его интегрирование осуществляется с помощью выделения этой особенности. В результате сведено вычисление сингулярных интегралов к вычислению интегралов с логарифмической особенностью.

Литература

1. *Галишникова Т.Н., Ильинский А.С.* Метод интегральных уравнений в задачах дифракции волн. - М.: МАКС Пресс, 2013.
2. *Il'inskii A.S., Galishnikova T.N.* Method of integral equations for the three-dimensional problem of wave reflection from an irregular surface // *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 9, p. 1191-1201.
3. *Купрадзе В.Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. – М.: ГИТТЛ, 1950.
4. *Захаров Е.В.* О единственности и существовании решений интегральных уравнений электродинамики неоднородных сред // В сб. Вычислительные методы и программирование. Вып. 24. М.: Изд-во МГУ. 1975, с.37-43.