

С.Г. Головина, А.Г. Разборов

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ЛИНИИ РАЗРЫВА КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО КОЭФФИЦИЕНТА В ДВУМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

1. Постановка обратной задачи

Рассмотрим следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = k(M)\Delta P, \quad P = P(t, M), \quad M(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2, \quad t > 0, \\ k(M) = \begin{cases} \omega_1^{-2}, & M \in D_1, \\ \omega_2^{-2}, & M \in D_2 \end{cases}, \quad \bar{D}_1 \cup D_2 = D, \quad \bar{D}_1 = D_1 \cup \Gamma_1, \quad \bar{D} = D \cup \Gamma_2, \\ \omega_2^{-2} \frac{\partial P}{\partial \bar{n}_2} \Big|_{M \in \Gamma_2} = f(t, M), \quad t \geq 0, \quad P(0, M) = P_0, \quad M \in \bar{D}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где D_1 и D – односвязные звездные области с гладкими границами Γ_1 и Γ_2 , начало координат принадлежит D_1 , \bar{n}_2 – единичный вектор внешней нормали к Γ_2 , а ω_1 , ω_2 и P_0 – фиксированные числа.

Обратная задача заключается в определении контура Γ_1 при известных Γ_2 , $f(t, M)$, ω_1 , ω_2 и P_0 по решению прямой задачи (1) $P(t, M)$, известному в некоторых точках $M_1, \dots, M_n \in \Gamma_2$ и при всех $t \geq 0$.

Обратная задача такого типа возникает, например, при неразрушающем контроле качества. На границу детали, внутри которой могут содержаться каверны, подается известный тепловой поток и проводятся измерения температуры в некоторых точках этой границы. По полученным данным требуется определить форму каверн.

Подобные обратные задачи рассматривались, например, в работах [5] – [7]. В отличие от данной постановки, в указанных работах в качестве дополнительной информации использовалось решение прямой задачи, заданное на всей внешней границе, а не в конечном множестве ее точек.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, код проекта 11-01-00259.

В работе приведены результаты вычислительных экспериментов, показывающие хорошую обусловленность обратной задачи в указанной постановке. Прямая задача сводилась к краевой задаче для уравнения Гельмгольца, решение которой выписывалось через потенциалы. Подобный подход использовался авторами в работах [1] – [4].

2. Численное решение прямой задачи

Решение задачи (1) можно искать в виде

$$P(t, M) = \begin{cases} u_1(t, M), & M \in D_1, \\ u_2(t, M), & M \in D_2, \end{cases}$$

с функциями $u_1(t, M)$ и $u_2(t, M)$, являющимися решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_l}{\partial t} = \omega_l^{-2} \Delta u_l, \quad u_l = u_l(t, M), \quad M(x, y) \in D_l \subset \mathbf{R}^2, \quad t > 0, \quad l = 1, 2, \\ \omega_2^{-2} \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}_2} \Big|_{M \in \Gamma_2} = f(t, M), \quad t \geq 0, \quad u_l(0, M) = P_0, \quad M \in \bar{D}_l, \quad l = 1, 2, \\ u_1|_{M \in \Gamma_1} = u_2|_{M \in \Gamma_1}, \quad t \geq 0, \quad \omega_1^{-2} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{n}_1} \Big|_{M \in \Gamma_1} = \omega_2^{-2} \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}_1} \Big|_{M \in \Gamma_1}, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где \bar{n}_l – единичный вектор внешней нормали к Γ_l , а равенства в последней строке описывают непрерывность температуры и теплового потока при переходе через линию разрыва $k(M)$.

После замены $\hat{u}_l(t, M) = u_l(t, M) - P_0$ и применения преобразования Лапласа $v_l(p, M) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \hat{u}_l(t, M) dt$, $F(p, M) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t, M) dt$ для новых неизвестных функций $v_l(p, M)$, $l = 1, 2$ при $\text{Re } p > 0$ получаем задачу вида

$$\begin{cases} \Delta v_l - \omega_l^2 p v_l = 0, \quad M \in \bar{D}_l, \\ \omega_2^{-2} \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}_2} \Big|_{M \in \Gamma_2} = F(p, M), \\ v_1|_{M \in \Gamma_1} = v_2|_{M \in \Gamma_1}, \quad \omega_1^{-2} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}_1} \Big|_{M \in \Gamma_1} = \omega_2^{-2} \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}_1} \Big|_{M \in \Gamma_1}. \end{cases} \quad (3)$$

Решение (3) при $p = s^2 > 0$ существует, единственно и выражается через потенциалы простого слоя

$$\begin{aligned}
v_1(s, M) &= \int_{\Gamma_1} K_0(\omega_1 s | \overline{MN} |) \mu(N) d\sigma_N, \quad M \in D_1, \\
v_2(s, M) &= \int_{\Gamma_1} K_0(\omega_2 s | \overline{MN} |) \nu(N) d\sigma_N + \int_{\Gamma_2} K_0(\omega_2 s | \overline{ML} |) \eta(L) d\sigma_L, \quad M \in D_2
\end{aligned} \tag{4}$$

с непрерывными плотностями μ , ν и η , являющимися решениями системы интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned}
&\pi\eta(L) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial K_0(\omega_2 s | \overline{LQ} |)}{\partial \bar{n}_L} \nu(Q) d\sigma_Q + \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial K_0(\omega_2 s | \overline{LR} |)}{\partial \bar{n}_L} \eta(R) d\sigma_R = \omega_2^2 F(s^2, L), \quad L \in \Gamma_2, \\
&\int_{\Gamma_1} K_0(\omega_1 s | \overline{NQ} |) \mu(Q) d\sigma_Q = \\
&\quad = \int_{\Gamma_1} K_0(\omega_2 s | \overline{NQ} |) \nu(Q) d\sigma_Q + \int_{\Gamma_2} K_0(\omega_2 s | \overline{NR} |) \eta(R) d\sigma_R, \quad N \in \Gamma_1, \\
&\omega_1^{-2} \omega_2^2 \pi \mu(N) + \omega_1^{-2} \omega_2^2 \int_{\Gamma_1} \frac{\partial K_0(\omega_1 s | \overline{NQ} |)}{\partial \bar{n}_N} \mu(Q) d\sigma_Q = -\pi \nu(N) + \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial K_0(\omega_2 s | \overline{NQ} |)}{\partial \bar{n}_N} \nu(Q) d\sigma_Q + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial K_0(\omega_2 s | \overline{NR} |)}{\partial \bar{n}_N} \eta(R) d\sigma_R, \quad N \in \Gamma_1,
\end{aligned} \right. \tag{5}$$

где $K_0(z)$ – функция Макдональда нулевого порядка, а выражения $|\overline{MN}|$, $|\overline{ML}|$ и т.д. обозначают длины соответствующих отрезков.

Так как гладкие Γ_1 и Γ_2 ограничивают звездные области, полярные координаты точек Γ_1 и Γ_2 имеют вид $(h(\varphi), \varphi)$ и $(g(\alpha), \alpha)$ соответственно, где $h(0) = h(2\pi)$, $g(0) = g(2\pi)$, $h(\varphi), g(\alpha) \in C^1[0; 2\pi]$. В этом случае, при переходе в уравнениях (4) и (5) к полярным координатам, нормали и длины элементов границ пересчитываются в терминах $h(\varphi)$ и $g(\alpha)$, например,

$$\begin{aligned}
d\sigma_N &= \sqrt{h^2(\varphi) + (h'(\varphi))^2} d\varphi, \\
\bar{n}_N &= \frac{(h'(\varphi) \sin \varphi + h(\varphi) \cos \varphi, h(\varphi) \sin \varphi - h'(\varphi) \cos \varphi)}{\sqrt{h^2(\varphi) + (h'(\varphi))^2}}.
\end{aligned}$$

В полярных координатах формулы (4) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
v_1(s, r, \alpha) &= \\
&= \int_0^{2\pi} K_0 \left(\omega_1 s \sqrt{r^2 + h^2(\varphi) - 2rh(\varphi) \cos(\alpha - \varphi)} \right) \mu(h(\varphi), \varphi) \sqrt{h^2(\varphi) + (h')^2(\varphi)} d\varphi, \\
v_2(s, r, \alpha) &= \\
&= \int_0^{2\pi} K_0 \left(\omega_2 s \sqrt{r^2 + h^2(\varphi) - 2rh(\varphi) \cos(\alpha - \varphi)} \right) \nu(h(\varphi), \varphi) \sqrt{h^2(\varphi) + (h')^2(\varphi)} d\varphi + \\
&+ \int_0^{2\pi} K_0 \left(\omega_2 s \sqrt{r^2 + g^2(\beta) - 2rg(\beta) \cos(\alpha - \beta)} \right) \eta(g(\beta), \beta) \sqrt{g^2(\beta) + (g')^2(\beta)} d\beta,
\end{aligned} \tag{6}$$

а система интегральных уравнений (5) примет вид

$$\left\{ \begin{aligned}
&\pi \omega_2^{-2} \eta(g(\beta), \beta) + \int_0^{2\pi} W(\omega_2, s, g(\beta), h(\psi)) \nu(h(\psi), \psi) d\psi + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} W(\omega_2, s, g(\beta), g(\gamma)) \eta(g(\gamma), \gamma) d\gamma = F(s^2, g(\beta), \beta), \\
&\int_0^{2\pi} K(\omega_1, s, h(\varphi), h(\psi)) \mu(h(\psi), \psi) d\psi = \\
&\quad = \int_0^{2\pi} K(\omega_2, s, h(\varphi), h(\psi)) \nu(h(\psi), \psi) d\psi + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} K(\omega_2, s, h(\varphi), g(\gamma)) \eta(g(\gamma), \gamma) d\gamma, \\
&\pi \omega_1^{-2} \omega_2^2 \mu(h(\varphi), \varphi) + \omega_1^{-2} \omega_2^2 \int_0^{2\pi} W(\omega_1, s, h(\varphi), h(\psi)) \mu(h(\psi), \psi) d\psi = \\
&\quad = -\pi \nu(h(\varphi), \varphi) + \int_0^{2\pi} W(\omega_2, s, h(\varphi), h(\psi)) \nu(h(\psi), \psi) d\psi - \\
&\quad + \int_0^{2\pi} W(\omega_2, s, h(\varphi), g(\gamma)) \eta(g(\gamma), \gamma) d\gamma,
\end{aligned} \right. \tag{7}$$

где K и W задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
K(\omega, s, h(\varphi), g(\gamma)) &= K_0 \left(s \omega \sqrt{h^2(\varphi) + g^2(\gamma) - 2h(\varphi)g(\gamma) \cos(\varphi - \gamma)} \right), \\
W(\omega, s, g(\beta), h(\psi)) &= -s \omega \frac{K_1 \left(s \omega \sqrt{g^2(\beta) + h^2(\psi) - 2g(\beta)h(\psi) \cos(\beta - \psi)} \right)}{\sqrt{g^2(\beta) + h^2(\psi) - 2g(\beta)h(\psi) \cos(\beta - \psi)}} \times \\
&\times \sqrt{\frac{h^2(\psi) + h'^2(\psi)}{g^2(\beta) + g'^2(\beta)}} \left[g^2(\beta) - g(\beta)h(\psi) \cos(\beta - \psi) - g'(\beta)h(\psi) \sin(\beta - \psi) \right].
\end{aligned}$$

Решение прямой задачи сводится, таким образом, к вычислению из системы (7) функций $\mu(h(\varphi), \varphi)$, $\nu(h(\varphi), \varphi)$ и $\eta(g(\beta), \beta)$ по известным функциям $h(\varphi)$, $g(\beta)$ и $F(s^2, g(\beta), \beta)$.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Численный алгоритм решения (7) был реализован в рамках стандартных вычислительных методов. Для проверки построенного численного алгоритма задача (3) была решена аналитически для случая, когда области D_1 и D являются кругами с центрами в начале координат, с краевым условием на границе D , приблизительно соответствующим случаю сосредоточенного в точке потока. Точная постановка модельной задачи и формулы, задающие ее решение, приведены в Приложении. Аналитическое решение данной модельной задачи с высокой точностью совпало с решением, вычисленным с помощью системы (7) и формул (6). На Рис. 1 приведен график полученного численно из интегральных уравнений (7) и формул (6) решения модельной задачи при радиусе круга D_1 , равном 2, радиусе круга D , равном 5, $F(s^2, 5, \beta) = s^{-2} \pi e^{-\pi|\beta - \pi|}$, что соответствует $f(t, 5, \beta) = \pi e^{-\pi|\beta - \pi|}$, $s = 0,2$, $\omega_1 = 20$, $\omega_2 = 1$.

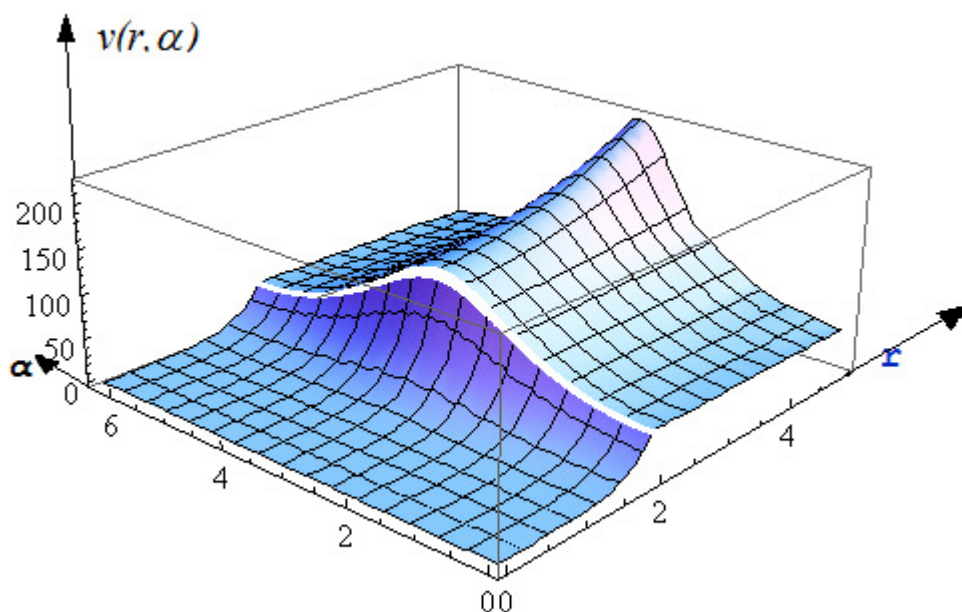


Рис. 1

На Рис. 2 приведены графики, показывающие чувствительность измеренной на внешней границе температуры к размеру внутренней неоднородности. Расчеты производились для модельной задачи при радиусе круга D_1 $a=1/2$, $a=3/2$ или $a=2$, радиусе круга D , равном 5, $F(s^2, 5, \beta) = s^{-2} \pi e^{-\pi|\beta - \pi|}$, $s = 0,07$, $\omega_1 = 20$, $\omega_2 = 1$.

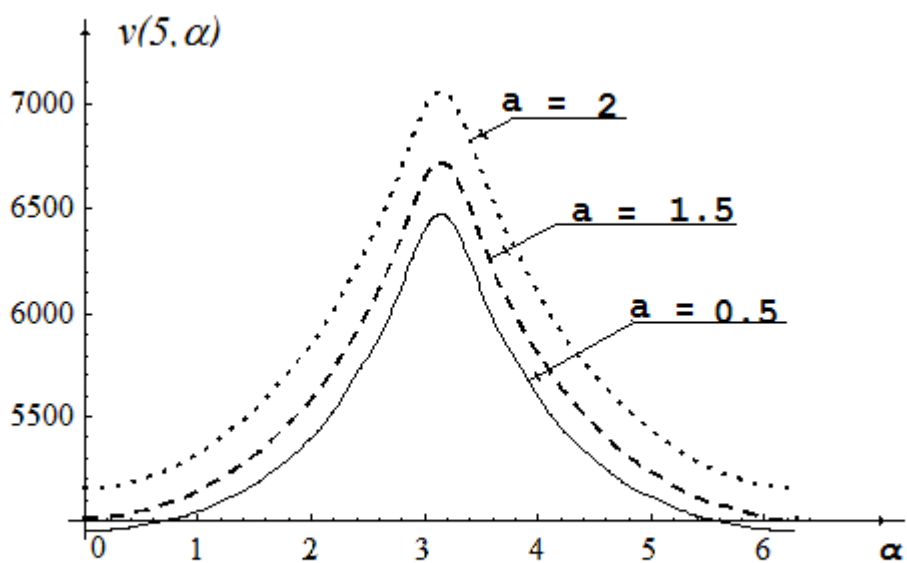


Рис. 2

На Рис. 3 приведен результат решения обратной задачи для случая, когда контур Γ_1 является эллипсом с полуосями $7/2$ и 1 , центром в начале координат и наклоном большей оси к оси абсцисс в 45° , а контур Γ_2 является окружностью радиуса 4 с центром в начале координат (изображены сплошной линией).

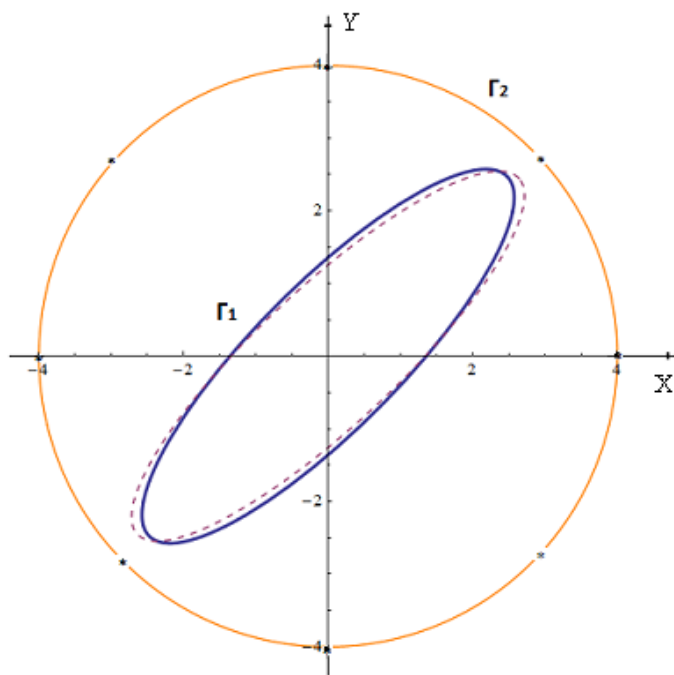


Рис. 3

Пунктиром изображен восстановленный контур. Обратная задача решалась подбором (т.е. многократно решалась прямая задача для эллипсов с разными полуосями и наклоном к оси абсцисс), при этом считалось известным, что восстанавливаемый контур является эллипсом с центром в начале координат.

Точки измерения решения прямой задачи $M_l, l = \overline{1,8}$ были расположены с шагом $\frac{\pi}{4}$, начиная с точки $(4,0)$, на окружности радиуса 4 с центром в начале координат, $F(s^2, 4, \beta) = s^{-2} \pi e^{-\pi|\beta - \pi|}$, $s = 0,07$, $\omega_1 = 20$, $\omega_2 = 1$. В качестве значений $v(s, r, \alpha)$ в точках M_l были взяты результаты численного решения прямой задачи с точным эллипсом. Полученный результат показывает хорошую обусловленность рассматриваемой обратной задачи.

4. Приложение

Для проверки описанного в пункте 2 алгоритма решения прямой задачи была рассмотрена модельная задача:

$$\begin{cases} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) + r^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} - \omega_1^2 s^2 v_1 = 0, & r < a, \alpha \in [0; 2\pi], \\ r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_2}{\partial r} \right) + r^{-2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \alpha^2} - \omega_2^2 s^2 v_2 = 0, & a < r < b, \alpha \in [0; 2\pi], \\ \omega_2^{-2} \frac{\partial v_2}{\partial r} (b, \alpha) = s^{-2} \pi e^{-\pi|\alpha - \pi|}, & \alpha \in [0; 2\pi], \\ v_1(a, \alpha) = v_2(a, \alpha), \quad \omega_1^{-2} \frac{\partial v_1}{\partial r} (a, \alpha) = \omega_2^{-2} \frac{\partial v_2}{\partial r} (a, \alpha), & \alpha \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет следующий вид (через I_n и K_n обозначены, соответственно, функции Инфельда и Макдональда порядка n):

$$v_1(r, \alpha, s, \omega_1) = A_0 I_0(\omega_1 s r) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n I_n(\omega_1 s r) \cos n\alpha,$$

$$v_2(r, \alpha, s, \omega_2) = B_0 I_0(\omega_2 s r) + C_0 K_0(\omega_2 s r) + \sum_{n=0}^{+\infty} (B_n I_n(\omega_2 s r) + C_n K_n(\omega_2 s r)) \cos n\alpha,$$

где

$$A_0 = -f_0(2s\omega_2 E_0)^{-1} [I_0(sa\omega_2)K_1(sa\omega_2) + K_0(sa\omega_2)I_1(sa\omega_2)],$$

$$B_0 = -f_0(2s\omega_2 E_0)^{-1} [I_0(sa\omega_1)K_1(sa\omega_2) + \omega_2 \omega_1^{-1} K_0(sa\omega_2)I_1(sa\omega_1)],$$

$$C_0 = f_0(2s\omega_2 E_0)^{-1} [\omega_2 \omega_1^{-1} I_0(sa\omega_2)I_1(sa\omega_1) - I_0(sa\omega_1)I_1(sa\omega_2)],$$

$$A_n = -f_n(2s\omega_2 E_n)^{-1} [I_n(sa\omega_2)(K_{n-1}(sa\omega_2) + K_{n+1}(sa\omega_2)) + K_n(sa\omega_2)(I_{n-1}(sa\omega_2) + I_{n+1}(sa\omega_2))],$$

$$\begin{aligned}
B_n &= -f_n(2s\omega_2 E_n)^{-1} \left[I_n(sa\omega_1) (K_{n-1}(sa\omega_2) + K_{n+1}(sa\omega_2)) + \right. \\
&\quad \left. + \omega_2 \omega_1^{-1} K_n(sa\omega_2) (I_{n-1}(sa\omega_1) + I_{n+1}(sa\omega_1)) \right], \\
C_n &= f_n(2s\omega_2 E_n)^{-1} \left[\omega_2 \omega_1^{-1} I_n(sa\omega_2) (I_{n-1}(sa\omega_1) + I_{n+1}(sa\omega_1)) - \right. \\
&\quad \left. - I_n(sa\omega_1) (I_{n-1}(sa\omega_2) + I_{n+1}(sa\omega_2)) \right], \\
f_n &= 2\pi s^{-2} \omega_2^2 \left((-1)^n - e^{-\pi^2} \right) (\pi^2 + n^2)^{-1}, \\
E_0 &= -I_1(sb\omega_2) \left[I_0(sa\omega_1) K_1(sa\omega_2) + \omega_2 \omega_1^{-1} K_0(sa\omega_2) I_1(sa\omega_1) \right] + \\
&\quad + K_1(sb\omega_2) \left[I_0(sa\omega_1) I_1(sa\omega_2) - \omega_2 \omega_1^{-1} I_0(sa\omega_2) I_1(sa\omega_1) \right], \\
E_n &= -\frac{1}{4} (I_{n-1}(sb\omega_2) + I_{n+1}(sb\omega_2)) \left\{ I_n(sa\omega_1) \left[K_{n-1}(sa\omega_2) + K_{n+1}(sa\omega_2) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \omega_2 \omega_1^{-1} K_n(sa\omega_2) \left[I_{n-1}(sa\omega_1) + I_{n+1}(sa\omega_1) \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{4} (K_{n-1}(sb\omega_2) + K_{n+1}(sb\omega_2)) \left\{ I_n(sa\omega_1) \left[I_{n-1}(sa\omega_2) + I_{n+1}(sa\omega_2) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \omega_2 \omega_1^{-1} I_n(sa\omega_2) \left[I_{n-1}(sa\omega_1) + I_{n+1}(sa\omega_1) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Литература

1. Головина С.Г., Денисов А.М., Дмитриев В.И. Об обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте // Прикладная математика и информатика. № 21. М.: МАКС Пресс, 2005. С. 5-14.
2. Головина С.Г. Метод линеаризации в обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. Вычисл. Матем. и Киберн. 2008, № 1, С. 5-9.
3. Golovina S.G., Razborov A.G. Determining the boundary of a two-dimensional region from the solution of the external initial boundary-value problem for the heat equation // Computational Mathematics and Modeling. 2010. 21. N 2. P. 178-183.
4. Golovina S.G., Razborov A.G. Determining the internal boundary of a region in the two-dimensional initial boundary-value problem for the heat equation // Computational Mathematics and Modeling. 2011. 22. N 3. P. 238-245.
5. Masaru Ikehata M and Mishio Kawashita The enclosure method for the heat equation // Inverse Problems. 2009. 25. N 7. 075205.
6. Kurt Bryan and Lester Caudill Reconstruction of an unknown boundary portion from Cauchy data in n dimensions // Inverse Problems. 2005. 21. N 1. P. 239-255.
7. Roman Chapko, Rainer Kress and Jeong-Rock Yoon An inverse boundary value problem for the heat equation: the Neumann condition // Inverse Problems. 1999. 15. N 4. P. 1033-1046.