С.Г. Головина, Е.В. Захаров

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЦ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ.*

Введение

В настоящее время большой интерес представляют обратные задачи для уравнения Гельмгольца в трехмерной среде, решение которых сводится к построению численных методов [1-3].

В работах [4-5] авторами были рассмотрены задачи определения границы неоднородности в однородной среде. В работе [6] был рассмотрен метод акустического частотного зондирования для решения обратной задачи определения границ локальных неоднородностей в однородной среде по измерениям в ограниченной области расположения приемников отраженного от неоднородностей волнового поля, возбуждаемого точечным источником в многочастотном случае. Для уравнения Гельмгольца в трехмерной однородной среде, содержащей несколько локальных неоднородностей с гладкой поверхностью разной формы, была поставлена и решена обратная задача методом интегральных уравнений.

В данной работе рассмотрено построение численного метода решения системы интегральных уравнений для решения обратной краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Метод основан на использовании интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода и применим к определению границ неоднородностей произвольной формы. Построен итерационный метод решения обратной задачи, приводятся результаты вычислительного эксперимента.

1. Постановка задачи

В области Ω_f расположены источники первичного поля, которое задается формулой: $v_0(M,\omega)=\int\limits_{\Omega_f} G(M,P,\omega) f(\omega)\delta(P-M_f)\,dP$, где $\delta(\cdot)$- дельта-функция Дирака, $f(\omega)$- амплитуда поля.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, код проекта 17-01-00525.

Задача определения границ неоднородностей произвольной формы может быть сведена к системе интегральных уравнений [4-7]:

$$v_i(M,\omega) = v_0(M,\omega) + \omega^2 \int\limits_{\Omega_i} G(M,P_i,\omega)\bar{c}_i(P_i)v_i(P_i,\omega)\,dP_i, \quad i=1,...,N, \qquad (1)$$

где $G(M,P,\omega) = \frac{1}{4\pi R(M,P)} \exp\left(i\frac{\omega}{c_0}R(M,P)\right)$ - функция Грина, $R(M,P) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ - расстояние между точками $M(x,y,z)$ и $P(x_0,y_0,z_0)$, $v(M,\omega)$ - поле в среде, зависящее от пространственной переменной $M(x,y,z)\in R^3$ и частоты ω. Полное поле можно представить как сумму первичного и вторичных полей $v(M,\omega) = v_0(M,\omega) + \sum\limits_{i=1}^{N} v_i(M,\omega),\ i=1,...N$.

В однородной среде Ω_0 , в которой скорость распространения волн c_0, содержатся односвязные области $\Omega_i \in R^3$, $i=1,\dots,N$, с границами $\partial\Omega_i$, $i=1,...,N$, которые не имеют общих точек. В областях Ω_i определена кусочно-гладкая функция $c_i(M)$, где $M(x,y,z)\in\Omega_i$, $\bar{c}_i(M) = c_0^{-2} - c_i^{-2}(M)$, В области Ω_p расположены приемники для измерения рассеянного неоднородностями поля.

Запишем уравнение (1) отдельно для случаев, когда $M(x,y,z)$ принадлежит локальным неоднородностям Ω_i, $i=1,...,N$ и области расположения приемников Ω_p :

$$\begin{cases} v_i(M,\omega) = v_0(M,\omega) + \omega^2 \int\limits_{\Omega_i} G(M,P_i,\omega)\bar{c}_i(P_i)v_i(P_i,\omega)\,dP_i, & M\in\Omega_i, \\ V(M,\omega) = \omega^2 \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega_i} G(M,P_i,\omega)\bar{c}_i(P_i)v_i(P_i,\omega)\,dP_i, & M\in\Omega_p, \end{cases} \qquad (2)$$

где $i=1,...,N$, $V(M,\omega) = \sum\limits_{i=1}^{N} v_i(M,\omega) - v_0(M,\omega)$- поле, измеряемое в области расположения приемников Ω_p .

Данная система является нелинейной относительно функций $\bar{c}_i(M)$ и

$v_i(M,\omega)$, когда $M \in \Omega_i$, $i = 1,...,N$.

2. Численное решение обратной задачи

Обратная задача состоит в нахождении неизвестных функций $v_i(M,\omega)$ и $\bar{c}_i(M)$, когда $M \in \Omega_i$, $i = 1,...,N$. Введем следующие обозначения интегральных операторов:

$$
\begin{aligned}
&K_0(M) = \int_{\Omega_f} G(M,P,\omega) f(\omega) \delta(P - M_f)\, dP, && P \in \Omega_f,\ M \in \Omega_i, \\
&\left(K_1 \bar{c}_i v_i\right)(M) = \omega^2 \int_{\Omega_i} G(M,P,\omega) \bar{c}_i(P) v_i(P,\omega)\, dP, && P \in \Omega_i,\ M \in \Omega_i, \\
&\left(K_2 \bar{c}_i v_i\right)(M) = \omega^2 \int_{\Omega_i} G(M,P,\omega) \bar{c}_i(P) v_i(P,\omega)\, dP, && P \in \Omega_i,\ M \in \Omega_p,
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где $K_0 : C\left(\Omega_f\right) \to C\left(\Omega_i\right)$, $K_1 : C\left(\Omega_i\right) \to C\left(\Omega_i\right)$, $K_2 : C\left(\Omega_i\right) \to C\left(\Omega_p\right)$ - операторы, устанавливающие связь между первичным полем, вторичным полем и полем измерений.

Запишем систему (2) в матричном виде для каждой неоднородности:

$$
A_i \begin{pmatrix} \bar{c}_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_0 - v_i + K_1 \bar{c}_i v_i \\ K_2 \bar{c}_i v_i - V \end{pmatrix}, \quad i = 1,...,N. \qquad (4)
$$

Через w_i обозначим матрицу, на диагонали которой расположены элементы v_i, тогда

$$
A_i' \begin{pmatrix} \bar{c}_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 w_i & -E + K_1 \bar{c}_i \\ K_2 w_i & K_2 \bar{c}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1,...,N. \qquad (5)
$$

При решении прямой задачи, когда дано:

- первичное поле v_0, которое облучает область Ω_0, содержащую неоднородности Ω_i, $i = 1,...,N$,
- известны границы неоднородностей Ω_i и функции $\bar{c}_i(M)$,

$M \in \Omega_i$, $i = 1,...,N$, необходимо решить интегральные уравнения Фредгольма второго рода и найти вторичные поля $v_i(M,\omega)$, $M \in \Omega_i$, $i = 1,...,N$, затем вычислить значения функции $V(M,\omega)$ в области расположения приемников $M \in \Omega_p$ для частоты ω.

При решении обратной задачи, когда нам известно первичное поле и поле в области расположения приемников, необходимо определить границы и расположение локальных неоднородностей в ограниченной области Ω_0. В работе [8] предложен метод Ньютона-Гаусса для решения обратной задачи:

$$z_{n+1} = \min_{z \in H} \left\| A\ (z_n) + A'\ (z - z_n) \right\|^2 = z_n - \left(A'^{*} A' \right)^{-1} A'^{*} A\ ,$$

где z - неизвестно.

Так как входные данные вычисляются с погрешностью, то необходимо использовать регуляризирующий метод. Для решения операторного уравнения $Az = 0$, применим итеративно-регуляризованный метод Ньютона-Гаусса [9], на каждом шаге которого минимизируется по z функционал:

$$\Phi(\alpha_n, z_n, z) = \left\| A(z_n) + A'\ (z - z_n) \right\|^2 + \alpha_n \left\| z - \xi_n \right\|^2, \tag{6}$$

где $A = (A_1, A_2, ..., A_n)^T$, $A' = (A_1', A_2', ..., A_n')^T$, A_i, A_i' - операторы, которые определены в (4) и (5), $z = [v_1(M,\omega),...,v_N(M,\omega),\ \bar{c}_1(M),...,\bar{c}_N(M)]^T$ - вектор неизвестных, α_n - параметр регуляризации, ξ_n - некоторый элемент. Так как оператор $\left(A'^{*} A' \right)^{-1}$ может быть необратим, запишем итерационный метод в модифицированном виде:

$$z_{n+1} = z_n - \left(A'^{*}(z_n) A'(z_n) + \alpha_n I \right)^{-1} (A'^{*}(z_n) A(z_n) + \alpha_n (z_n - \xi_n)),$$

где $z_n = [v_1^n(M,\omega),...,v_N^n(M,\omega),\ \bar{c}_1^n(M),...,\bar{c}_N^n(M)]^T$ - искомое приближенное решение на n - ой итерации.

Заменяя интегралы в (3) конечными суммами:

$$\int\limits_{\Omega_i} G(M,P,\omega)\bar{c}_i(P)v_i(P,\omega)\,dP =$$

$$= h\sum_{j=0}^{m-1} G(M, P_j + \frac{h}{2},\omega)\bar{c}_i(P_j + \frac{h}{2})v_i(P_j + \frac{h}{2},\omega),$$

где h - шаг интегрирования, m- количество точек, получим линейную систему алгебраических уравнений.

На первом шаге задается начальное приближение для функций $\bar{c}_i^0 = 0,\ i = 1,\dots,N$, верхний индекс обозначает номер итерации, далее найдем v_i^0 - вторичное поле, решив уравнение $\mathrm{K}_1\left(v_i^0, \bar{c}_i^0\right) = 0,\ i = 1,\dots, N$.

Модельные расчеты проводились для случая, когда в качестве входных данных использовалось решение прямой задачи с внесенной погрешностью 4%. Источники имели координаты (-170, 15,-10) и (170, 10, -10), 25 приемников располагались в одной плоскости OXY. Измерения проводились на сетке приемников 25x25, расположенных в области $\Omega_p = \{z = 0, -120 < x < 120, -120 < y < 120\}$.

Исследуемая область Ω_0, в которой располагались три тела, имела форму куба $\Omega_0 = \{-150 \le x \le 150, -150 \le y \le 150, 100 \le z \le 400\}$, размером 300x300x300, неоднородности имели следующие размеры:

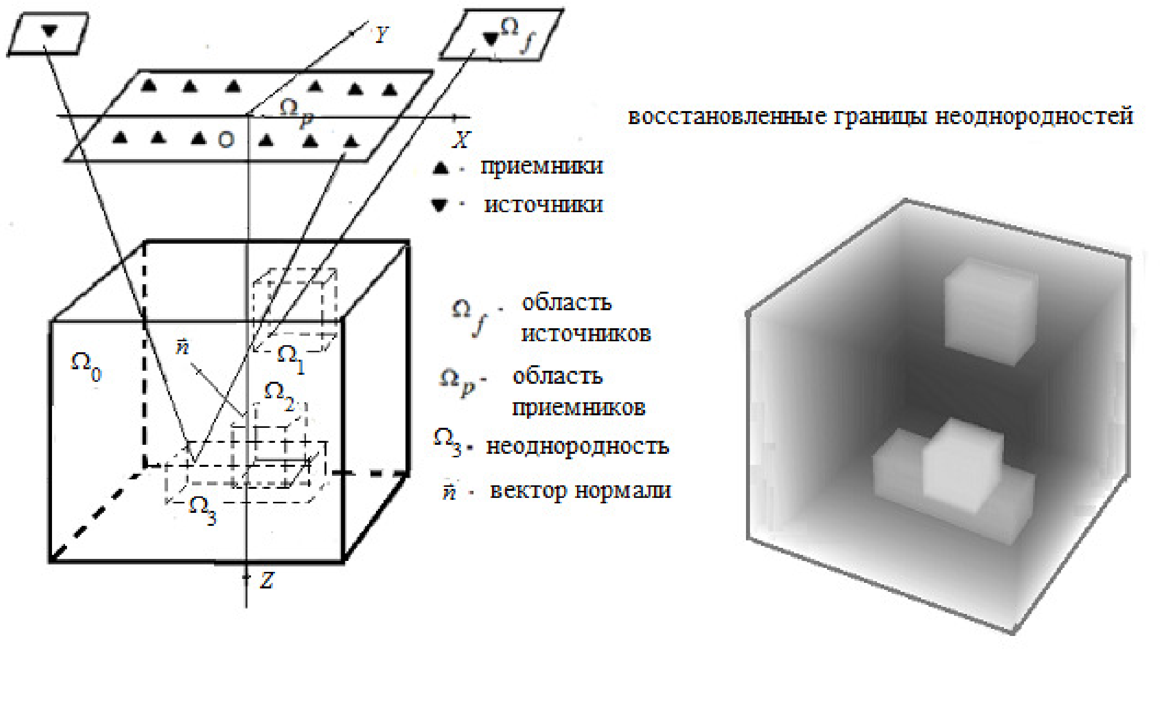

Рис.1

$\Omega_1 = \{5 \le x \le 65,\ 10 \le y \le 50, 120 \le z \le 180\}$, размером 60x40x60, $\Omega_2 = \{-10 \le x \le 30,\ -20 \le y \le 20, 250 \le z \le 290\}$, размером 40x40x40, $\Omega_3 = \{-60 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 40, 310 \le z \le 350\}$, размером 120x40x40, параметр регуляризации $\alpha = 0.015$, вычисления проводились для одной частоты 400. На Рис. 1 изображено точное решение обратной задачи и результаты вычислительного эксперимента предложенным итерационным методом. Для получения искомого решения было выполнено девять итераций.

Литература

1. *A.G. Ramm, Cong Van.* A numerical algorithm for solving 3D inverse scattering problem with non-over-determinad data. J. Appl.Math. Stat. App,Volume 2 Issue 1, 2018, pp. 11-13.
2. *M.V. Klibanov.* A Phaseless inverse scattering problem for the 3-D Helmholtz equation. Inverse Problems&Imaging, Vol.11 Issue 2, 2017, pp.263-276.
3. *M. Li, C. Chen, P. Li.* Inverse random source scattering for the Helmholtz equation in inhomogeneous media. Inverse Problems, T. 34 (2018), 015003, (19pp), https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa99d2.
4. *S.G. Golovina, E.V. Zakharov.* A Numerical Way of solving the Inverse Problem for the Wave Equation in a Medium with Local Inhomogeneity. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, Allerton Press Inc. (United States),Vol.41, No.4, 2017, pp.173-178.
5. *S.G. Golovina, E.V. Zakharov.* A Numerical Way of Determining the Boundaries of a System of Bodies in a Three-Dimensional Medium by Means of Integral Equations. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, Allerton Press Inc. (United States), № 42(3), 2018, pp. 100-104.
6. *S.G. Golovina, E.V. Zakharov.* Determination of the bounderies of the three-dimensional nonhomogeneities by acoustic frequency sounding. Computational Mathematics and Modeling, Vol.29, No.4, October, 2018, pp.443-448.
7. *Kolton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Third ed. Vol. 93. Springer-Verlag, 2013.
8. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решении некорректных задач. М.: Наука, 1989.
9. *Бакушинский А.Б., Левитан С.Ю.* Некоторые модели и численные методы нелинейной вычислительной диагностики.//Сборник трудов ВНИИСИ АН СССР. Вып. 13. М.: Изд-во ВНИИСИ, 1991. С. 3-25.