

## **Раздел I. Математическое моделирование**

---

*М.С. Горбун<sup>1</sup>, А.В. Мельников<sup>2</sup>, Д.Ю. Сычугов<sup>3</sup>, А.Д. Садыков<sup>4</sup>*

### **О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ В УСТАНОВКЕ ТОКАМАК Т-15МД РАЗРЯДОВ С УМЕНЬШЕННЫМ ОБЪЕМОМ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА\***

#### **Введение**

В настоящее время монтаж установки токамак Т-15МД [1, 2] в основном завершен и на повестку дня встал вопрос о подготовке ее к физическому пуску, а затем — к первому этапу экспериментов. Этот этап будет проходить при ограниченной мощности нагрева плазмы, и поэтому просчитанные ранее сценарии разрядов с дополнительным нагревом [3] будут осуществляться несколько позже. В этой связи возникает вопрос о реализации таких разрядов в Т-15МД, в которых, при сохранении полного тока в плазме, достигался бы ее наименьший объем. Это позволило бы увеличить удельную мощность дополнительного нагрева и получать режимы с улучшенным удержанием, таких как Н-режим и АТ-режим.

Данная работа посвящена расчетам равновесных квазистационарных плазменных конфигураций, поиску конфигураций с минимальным объёмом плазмы. В качестве исходной точки бралась базовая конфигурация разряда на Т-15МД [4-6] и затем с помощью расчетов по коду Tokameq [7] рассматривались конфигурации с уменьшенным относительно исходной объемом сечения шнура. Уменьшение объема достигалось за счет перемещения плазменного шнура в область сильного магнитного поля к внутренней стенке камеры в сторону центрального индуктора. При этом, ввиду уменьшения размеров сечения плазмы, имеется возможность трех сценариев перехода: с перемещением плазменного шнура к внутренней стенке и вверх, к внутренней стенке и вниз, и к внутренней стенке, с сохранением положения центра шнура в экваториальной плоскости.

---

<sup>1</sup>Лаборант-исследователь, НИЦ «Курчатовский институт», Gorbun.MS@phystech.edu

<sup>2</sup>Заместитель руководителя отделения токамаков, НИЦ «Курчатовский институт», Melnikov\_AV@nrcki.ru

<sup>3</sup>Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, sychugov@cs.msu.ru

<sup>4</sup>Заведующий лабораторией Института Атомной Энергии Республики Казахстан, sadykov\_a@nnc.kz

\* Работа поддержана грантом РФФ 19-12-00312, разделы 1 и 2 частично поддержаны грантом РФФИ № 20-07-00391; А.В. Мельников частично поддержан программой повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ

# 1. Математическая постановка задачи расчета МГД равновесия плазмы в токамаке с воздушным сердечником магнитопровода

Постановка задачи расчета МГД равновесия основана на численном решении двумерного уравнения Грэда—Шафранова [8]. В настоящее время алгоритмы решения такой задачи хорошо отработаны и доведены до уровня стандартных кодов. Описанный ниже алгоритм включен в разработанную при участии авторов данной статьи в библиотеку "Виртуальный токамак" [8], основные модули которой выложены на сайте [pfusion.cs.msu.ru](http://pfusion.cs.msu.ru) [9]. Поскольку расчет МГД равновесия является одной из основных задач моделирования процессов в установках токамак, мы в целях связности изложения приводим математическую постановку задачи и краткое описание алгоритма ее решения.

Для потока полоидального магнитного поля  $\psi(r, z)$  решается задача в неограниченной области, с условиями регулярности на главной оси тора и на бесконечности:

$$-\frac{1}{r}\Delta^*\Psi = \gamma \begin{cases} j_\varphi(r, \psi - \psi_p) \text{ при } \psi > \psi_p \text{ (внутри плазмы)} \\ \sum_{k=1}^N I_k \delta(r - r_k, z - z_k) \text{ при } \psi < \psi_p \text{ (вне плазмы)} \end{cases} \quad (1)$$

$$\psi(0, z) = 0; \quad (2)$$

$$\lim_{r, z \rightarrow \infty} \psi(r, z) = 0 \quad (3)$$

Здесь:

$(r, \varphi, z)$  — система цилиндрических координат с осью  $z$ , направленной вдоль главной оси тора;

$$\Delta^*\psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (4)$$

$\gamma = 0.8\pi^2$  — размерный множитель, при котором расстояние измеряется в метрах, ток в МА, магнитное поле в Тл, магнитный поток в В·с (веберах);

$r_k, z_k, I_k$  — координаты внешних проводников с током и величины токов (проводники могут считаться как бесконечно тонкими, так и имеющими конечные размеры);

$\psi_p$  — значение магнитного потока на границе плазмы. Сама граница плазмы изначально неизвестна и находится в процессе вычислений.

Компоненты полоидального магнитного поля выражаются через функцию  $\psi(r, z)$  следующим образом:

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\psi}{dz}; B_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\psi}{dr} \quad (5)$$

Функция распределения плазменного тока предполагается заданной в виде

$$\begin{aligned} j_\varphi(r, \psi - \psi_p) &= r \frac{dp}{d\psi} + \frac{I(\psi)I'(\psi)}{r} = \\ &= \lambda \left\{ \beta r (\psi - \psi_p)^{\gamma_1} + \frac{\hat{R}^2}{r} (1 - \beta) (\psi - \psi_p)^{\gamma_2} \right\} = \lambda f(r, \psi - \psi_p) \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\beta$  — «бета токовая», увеличение этого параметра соответствует росту давления в плазме;

$$\hat{R}^2 \text{ — среднее по шнуру значение } r^2, \hat{R}^2 = \frac{\iint_{\Omega_p} r dr dz}{\iint_{\Omega_p} \frac{dr dz}{r}};$$

$\gamma_1, \gamma_2$  — показатели распределения плотности тока, при росте этих параметров функция распределения плотности меняется от плоской к пикированной;

$f(r, \psi - \psi_p)$  — краткая запись выражения в фигурных скобках;

$p(\psi) = \lambda \beta r (\psi - \psi_p)^{\gamma_1}$  — распределение давления по магнитным поверхностям;

$I(\psi) = \lambda \frac{\hat{R}^2}{r} (1 - \beta) (\psi - \psi_p)^{\gamma_2}$  — полоидальный ток, величина тороидальной компоненты магнитного поля  $B_\varphi$  связана с ним соотношением  $B_\varphi(r, z) = \frac{I(\psi)}{2\pi r}$ ; множитель  $\lambda$  вычисляется в ходе решения, исходя из заданной наперёд величины полного тока по сечению шнура  $I_{pl}$ :

$$\lambda \iint_{\Omega_p} f(r, \psi - \psi_p) dr dz = I_{pl} \quad (7)$$

Функция плотности тока (4) является модельной, однако она за счет выбора ее параметров  $I_{pl}, \beta, \gamma_1, \gamma_2$  достаточно хорошо аппроксимирует наблюдаемые в эксперименте распределения.

Рассматриваются два варианта постановки задачи (1)-(7).

**Постановка прямой задачи.** Цель задачи — при заданных  $r_k, z_k, I_k, I_{pl}$  и параметрах, описывающих  $j_\varphi(r, \psi)$ , найти распределение магнитных поверхностей плазменного шнура. Очевидно, что решение существует не для всех заданных параметров.

**Постановка квазиобратной задачи.** Пусть равновесное состояние плазменного шнура описывается большим радиусом  $R_{pl}$ , малым радиусом  $a_{pl}$ ,  $z$ -координатой магнитной оси  $z_{pl}$ , эллиптичностью  $\varepsilon$ . Тогда постановка квазиобратной задачи равновесия будет иметь следующий вид: для заданных значений координат полоидальных токов  $r_k, z_k$  и параметров, описывающих  $j_\varphi(r, \psi)$  найти величины полоидальных токов  $I_k$ , так, чтобы плазма имела требуемые значения  $R_{pl}, a_{pl}, z_{pl}, \varepsilon$ . Будем называть такую задачу квазиобратной, так как в качестве входной информации задается не вся форма сечения плазменного шнура, а лишь небольшое число характеристик этого сечения.

В данной работе задача (1)-(7) решалась для геометрии установки Т15 МД. Ставилась цель минимизации объема плазменного шнура при фиксированном токе в плазме и при дополнительных ограничениях на предельные величины токов в катушках магнитного поля (таблица 1). Как будет показано ниже, эти ограничения существенно ограничивают возможности уменьшения объема плазмы.

## 2. Описание численного алгоритма

Численный метод решения задачи (1)-(7) основан на вложенном тройном итерационном цикле.

Для вычисления значений плотности плазменного тока и магнитного потока внутри счетной области требуется знать магнитный поток на ее границе. Предполагается, что счетная область представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям  $r$  и  $z$ .

В ходе вычислений магнитный поток ищется в виде суммы потоков, создаваемых плазмой и внешними проводниками. Для нахождения в начале каждой внешней итерации по  $j$  магнитного потока на границе счетной области применяется следующая формула

$$\psi^{j+1}(r, z) |_{\partial\Omega} = \gamma \sum_{k=1}^N I_k^j G(r, z, r_k, z) + \lambda^j \gamma \iint_{\Omega_p} G(r, z, r_p, z_p) \quad (8)$$

Формула (8) позволяет преобразовать задачу для неограниченной области (1) к задаче внутри счетной области:

$$-\frac{1}{r} \Delta^* \Psi^{j,n+1} = \begin{cases} j_\varphi(r, \Psi^{j,n+1} - \Psi_p) & \text{при } \Psi > \Psi_p \text{ (внутри плазмы)} \\ 0 & \text{при } \Psi < \Psi_p \text{ (вне плазмы)} \end{cases} \quad (9)$$

$$\Psi^{j,n+1}(r, z) |_{\partial\Omega} = \Psi^{j,1}(r, z) |_{\partial\Omega} \quad (10)$$

где  $n$  — номер итерации среднего уровня. Множитель  $\lambda^{j,n+1}$  вычисляется из условия нормировки на полный ток плазмы (9).

Во внутреннем цикле методом переменных направлений решается уравнение Пуассона с фиксированной правой частью и граничными условиями.

В случае квазиобратной задачи в цикле среднего уровня величины внешних токов корректируются при помощи обратных связей, так чтобы геометрические характеристики сечения плазменного шнура  $R_{pl}, a_{pl}, z_{pl}, \varepsilon$  совпадали с наперед заданными. Разумеется, этого удастся достичь не всегда, и тогда в этом случае ищется квазирешение. Формализация понятия квазирешения обычно зависит уже от конкретных инженерно-конструкторских требований: иногда требуется, чтобы часть из упомянутых параметров все же совпадала с наперед заданными, иногда ищется некий компромисс, и т.п.

### 3. Результаты расчётов

#### 3.1 Магнитная система Т-15МД и магнитная конфигурация с номинальным током

Полоидальное поле в установке создаётся шестью полоидальными катушками (PF1—PF6) и тремя катушками индуктора (CSU, CS0, CSD). Геометрические характеристики катушек, а также величины предельно допустимых токов, текущих по ним, приведены на рис. 1 и в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Характеристики катушек полоидального поля

Катушка	PF1	PF2	PF3	PF4
Количество витков	100	100	48	60
Максимальный ток в витке, кА	20	20	20	20
Макс. ток в катушке, МАвиток	2,0	2,0	0,96	1,2
Площадь сечения катушки, м <sup>2</sup>	0,25	0,28	0,12	0,17
z-координата катушки, м	2,29	2,08	0,94	-0,86
r-координата катушки, м	0,87	2,32	3,04	3,24

Катушка	PF5	PF6	CSU	CS0	CSD
Количество витков	80	216	154	442	154
Максимальный ток в витке, кА	20	20	40	40	40
Макс. ток в катушке, МАвиток	1,6	4,32	6,16	17,7	6,16
Площадь сечения катушки, м <sup>2</sup>	0,22	1,31	0,46	1,35	0,46
z-координата катушки, м	-2,30	-3,00	1,77	0	-1,77
r-координата катушки, м	2,63	0,74	0,34	0,34	0,34

Для решения этой задачи была взята базовая магнитная конфигурация (рис. 1, 2а), полученная в работе [6] (полный ток через плазму  $I = 2$  МА, малый радиус  $a = 66$  см; вытянутость  $\epsilon = 1,75$ ; треугольность  $\delta = 0,317$ ). Токи в катушках полоидального поля этой конфигурации представлены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Токи в базовой конфигурации

Катушка	PF1	PF2	PF3	PF4	PF5	PF6	CSU	CS0	CSD
$I$ , кА-виток	0	210	698	1047	400	3155	1055	15056	5147

Затем с помощью кода Tokameq были рассчитаны магнитные конфигурации с плазменным шнуром, смещённым в сторону сильного магнитного поля и уменьшенным в сечении. При этом положение центра плазмы по  $Z$  было фиксировано на значении  $-0,13$  м, а ток в плазме – на значении  $2$  МА (рис. 2б).

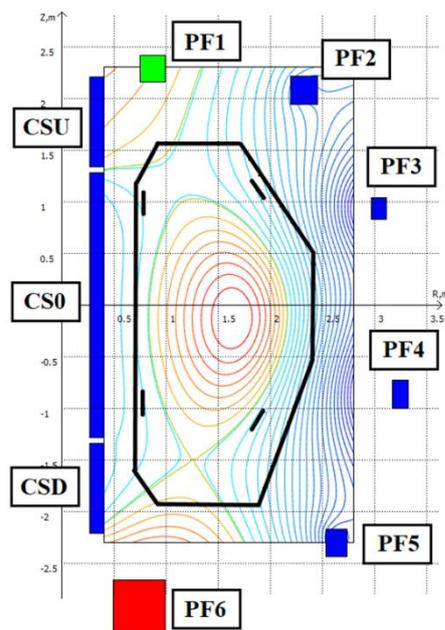


Рис. 1. Изображение магнитной системы токамака Т-15МД в используемой системе координат. Магнитные линии соответствуют базовой конфигурации.

В отличие от базовой однонулевой диверторной конфигурации, конфигурация без х-точки обладает естественной границей плазмы на первой стенке. Это условие служило критерием для выбора граничной магнитной поверхности. Для уменьшения объёма был использован следующий алгоритм. Центр плазменного шнура перемещался в сторону сильного поля и плазменный шнур сжимался сверху и снизу катушками PF1 и PF6. Ограничением данного способа служило превышение предельного тока в катушках PF3 и PF4, изменение тока в которых удерживает положение центра плазмы на заданной высоте.

В результате была получена конфигурация с объёмом в 1,56 раз меньше базовой.

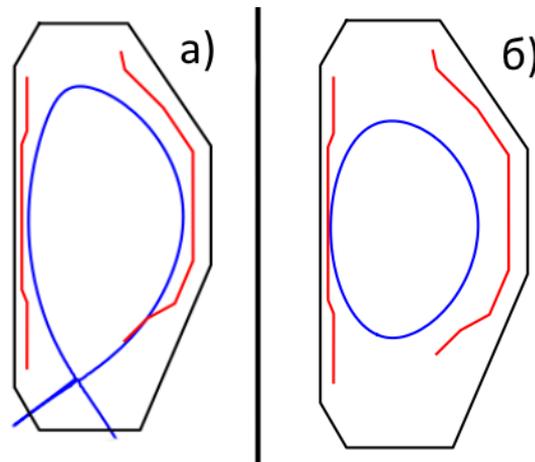


Рис. 2. а) базовая конфигурация  $V=22,19 \text{ м}^3$ ;  
 б) конфигурация с уменьшенным объёмом  $V=14,2 \text{ м}^3$ .

### 3.2 Конфигурация с уменьшенным током плазмы

Для того, чтобы сильнее уменьшить объём плазмы был снижен ток через неё. После чего была повторен алгоритм поиска минимального объёма. Были рассчитаны варианты с магнитным полем 2Т и током 1.8 и 1.6 МА (рис. 3).

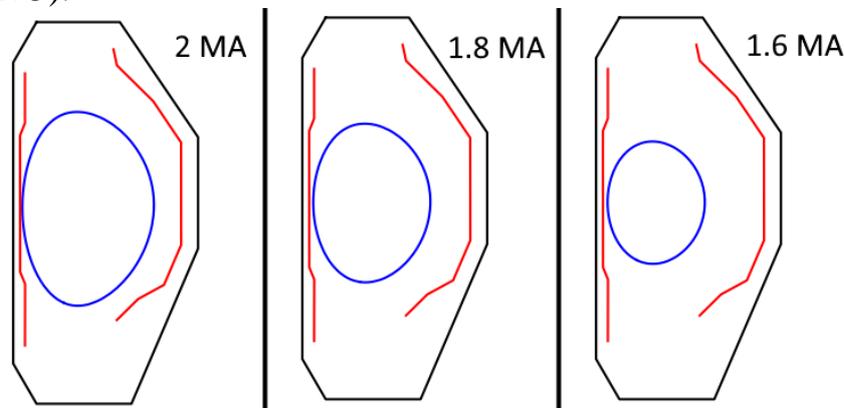


Рис. 3. Уменьшение площади сечения плазмы при уменьшении текущего через неё тока с сохранением положения центра по оси Z.

### 3.3 Конфигурации с вертикальным смещением плазменного шнура

Если отказаться от фиксации положения центра плазменного шнура по оси  $Z$ , дополнительное уменьшение объёма можно получить за счёт смещения вверх. Результаты представлены в таблице 1 и на диаграмме (рис 5).

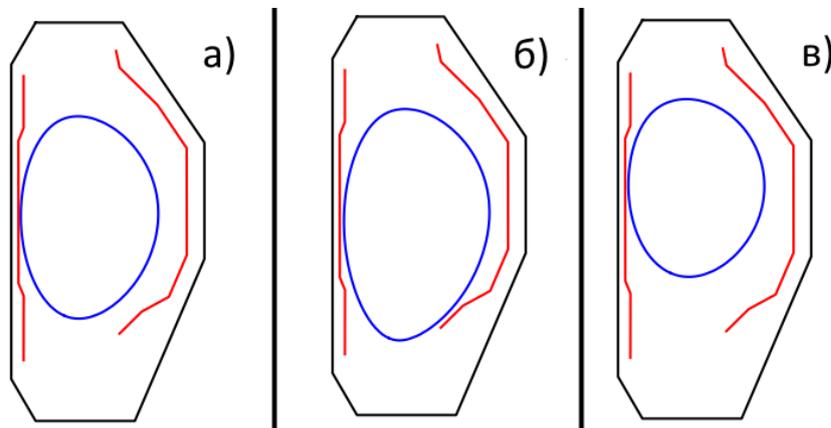


Рис. 4. а) Конфигурация с уменьшенным объёмом; б) Смещение центра вниз; в) Смещение центра вверх.

Так же были предприняты попытки уменьшить объём плазмы за счет смещения шнура вниз. Однако, из-за отсутствия в системе симметрии по  $Z$ , при смещении шнура вниз ограничения на предельные величины токов не позволяли "сжать" плазменный шнур, что в конечном счете приводило к увеличению объёма относительно центрального положения (рис.4-5).

Кроме того, был рассмотрен вариант с уменьшением тока в центральном соленоиде  $CS0$ . Данный способ дал уменьшение объёма плазмы в 1,76 раз относительно базовой конфигурации при уменьшении тока в  $CS0$  на 16,7%.

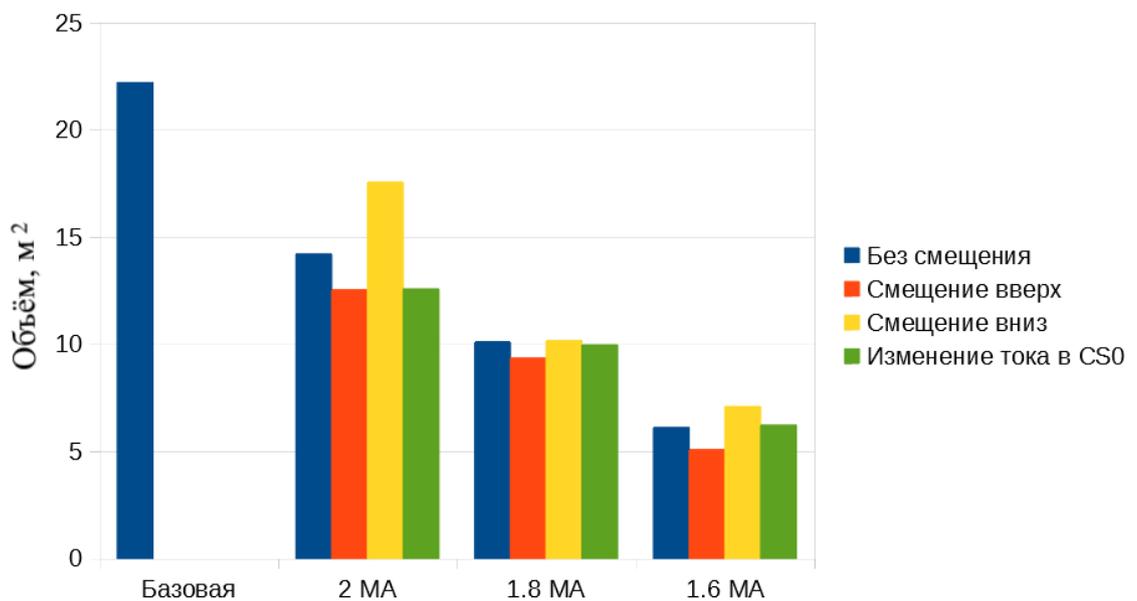
Объёмы шнура в перечисленных конфигурациях можно увидеть на приведённой гистограмме (рис. 5) и в приведённой ниже таблице 3. Значения токов в катушках полоидального поля для разных магнитных конфигураций можно найти в таблице 4.

**Т а б л и ц а 3. Результаты расчёта объёма в разных магнитных конфигурациях**

Ток плазмы	Без смещения	Смещение вверх	Смещение вниз	Изменение тока в $CS0$
Базовая	22,19			
2 МА	14,2	12,53	17,55	12,57
1.8 МА	10,11	9,35	10,16	9,96
1.6 МА	6,11	5,08	7,08	6,22

**Т а б л и ц а 4. Токи в катушках полоидального поля (МА-виток) при различных магнитных конфигурациях**

	$I_{pl}$ , МА	PF1	PF2	PF3	PF4	PF5	PF6
Предельные токи		2	2	0,96	1,2	1,6	4,32
Базовая	2	0	0,21	0,62	1,06	0,39	3,155
Без смещения	2	0,45	0,23	0,76	1,20	0,4	2,6
	1,8	0,5	0,23	0,78	1,12	0,4	2,2
	1,6	0,5	0,23	0,81	1,19	0,4	2,2
Смещение вниз	2	0,45	0,23	0,63	1,18	0,4	2,6
	1,8	0,5	0,23	0,74	1,19	0,4	2,2
	1,6	0,5	0,23	0,73	1,18	0,4	2,2
Смещение вверх	2	1,8	0,23	0,74	1,19	0,4	2,4
	1,8	1,9	0,23	0,81	1,04	0,4	2,4
	1,6	1,9	0,23	0,92	1,03	0,4	2,4



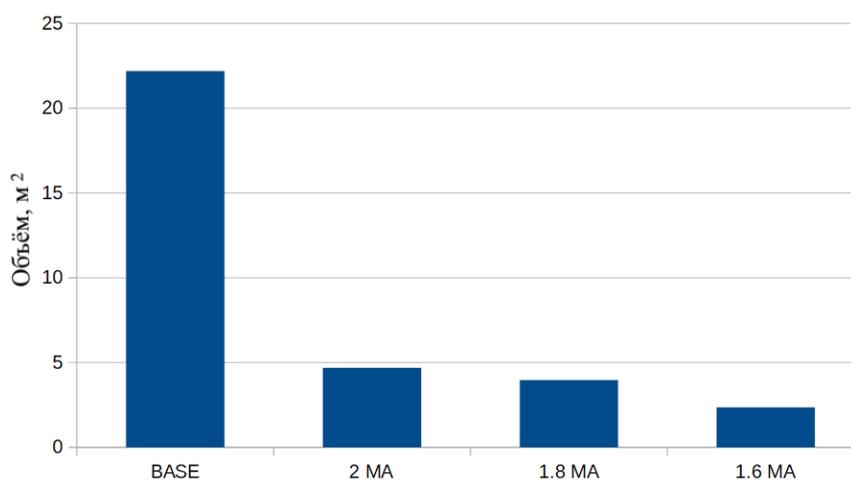
**Рис. 5. Соотношение объёмов для различных магнитных конфигураций.**

### 3.2 Результаты расчётов без ограничений на максимальный ток в катушках

Стоит отметить, что если бы можно было превысить предельные токи в катушках PF3 и PF4, например, на ограниченный период времени, то можно было бы получить гораздо более впечатляющие результаты. Так, не изменяя вертикального положения плазменного шнура и ток через плазму, но превысив ток в указанных катушках, можно получить уменьшение объёма плазменного шнура в 4,7 раза. Остальные результаты расчётов можно найти в таблице 5 и на рисунках 6 и 7.

**Т а б л и ц а 5. Результаты расчётов без ограничений на максимальный ток в катушках**

	Объём, м <sup>3</sup>	Превышение тока в PF3, МА	Превышение тока в PF4, МА	Отн. превышение тока в PF3	Отн. превышение тока в PF4
Базовая	22,19				
2 МА	4,69	0,102	0,344	10,60%	28,63%
1.8 МА	4,42	0,100	0,348	10,46%	29,02%
1.6 МА	2,35	0,148	0,421	15,46%	35,12%



**Рис. 6. Соотношение объёмов для различных магнитных конфигураций без ограничений на максимальный ток в катушках.**

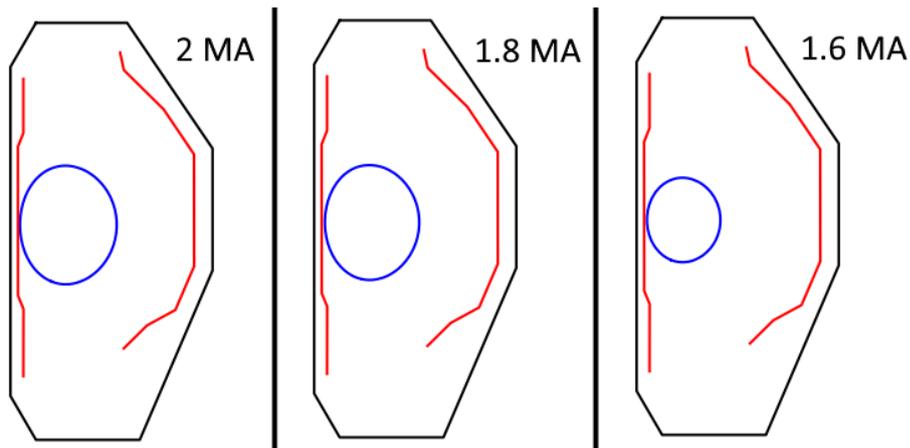


Рис. 7. Уменьшение площади сечения плазмы при уменьшении текущего через неё тока с сохранением положения центра по оси  $Z$  без ограничений на максимальный ток в катушках.

### Выводы

С помощью кода Tokameq был найден набор равновесных конфигураций плазмы с объемом, существенно меньшим, чем объем базовой конфигурации. Для базового разряда ( $B=2T$ ,  $I_{pl} = 2MA$ ) и стандартного положения плазмы по вертикали была получена конфигурация с объёмом в 1,56 раз меньше базового.

При смещении шнура вверх объём плазмы был уменьшен в 1,77 раз.

Для разряда с параметрами ( $B=2T$ ,  $I_{pl} = 1.6 MA$ ) и стандартного положения плазмы по вертикали была получена конфигурация с объёмом в 3,63 раз меньше базового. При смещении шнура вверх объём плазмы был уменьшен в 4,37 раза.

При превышении токов в катушках PF3 и PF4 на 10,6% и 28,6% по сравнению с пределом соответственно и сохранении тока через плазму на уровне 2 MA была получена конфигурация с объёмом в 4,7 раза меньше базового.

При превышении токов в катушках 15,5% и 35,1% по сравнению с пределом соответственно и снижении тока через плазму до 1.6 MA была получена конфигурация с объёмом в 9,4 раз меньше базового.

### Литература

1. Хвостенко П.П., Анашкин И.О., Бондарчук Э.Н., Инютин Н.В., Крылов В.А., Левин И.В., Минеев А.Б., Соколов М.М. Экспериментальная термоядерная установка токамак Т-15МД // ВАНТ. Сер. Термоядерный Синтез, 2019, т. 42, вып. 1, с. 15—38.

2. *Melnikov A.V., Sushkov A.V., Belov A.M., Dnestrovskij Yu N., Eliseev L.G., Ivanov D.P., Kirneva N.A., Korobov K.V., Krupin V.A., Lysenko S.E., Mukhovatov V.S., Mustafin N.A., Perfilov S.V., Razumova K.A., Roy I.N., Savruxhin P.V., Strelkov V.S., Shestakov E.A., Tilinin and V L Vdovin G.N.* Physical Program and Diagnostics of the T-15 Upgrade Tokamak: Brief Overview // Fusion Engineering and Design, Issue 96, 2015.
3. *Докука В.Н., Кавин А.А., Лукаш В.Э., Соколов М.М., Р.Р. Хайрутдинов Р.Р., В.А. Хайрутдинова В.А.* Численное моделирование управления плазмой в модернизированном токамаке Т-15. // ВАНТ. Сер. Термоядерный Синтез, 2014, вып. 3, с. 56—70
4. *Андреев В.Ф., Иванов А.А., Касьянова Н.В., Лукаш В.Э., Медведев С.Ю., Мельников А.В., Садыков А.Д., Сушков А.В., Сычугов Д.Ю., Хайрутдинов Р.Р.* Расчёты равновесия и устойчивости плазмы для модернизированного токамака Т-15. // ВАНТ. Сер. Термоядерный Синтез, 2014, вып. 3, с. 48—55.
5. *Sychugov D.Yu, Zotov I.V., Kasyanova N.V., Melnikov A.V., Dokuka V.N., Lukash V.E., Khayrutdinov R.R., Tsaun S.V., Sadykov A.D.* Analysis of initial stage of the discharge in the T-15 tokamak. // 44rd EPS Conference on Plasma Physics, Belfast, Northern Ireland, June 26—30, 2017. Europhysics Conference Abstracts (ECA), series F, P1.142.
6. *Sychugov D.Yu, Zotov I.V., Kasyanova N.V., Melnikov A.V., Sushkov A.V., Sadykov A.D., Shapovalov G.V.* Analysis of discharge scenarios in the T-15. // J. of Physics: Conference series, Issue 907, October 2017, 012011.
7. *Сычугов Д.Ю.* Код для расчёта МГД равновесия ТОКАМЕQ (модуль библиотеки программ «Виртуальный Токамак». // ВАНТ. Сер. Термоядерный Синтез, 2008, вып.4, с. 85—89.
8. *В.Д. Шафранов.* О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях. // ЖЭТФ, 1957, 33, вып.3, с. 710-722.
9. *Высоцкий Л.И., Соловьев С.Ю., Сычугов Д.Ю.* Интернет-технологии интегрированного моделирования процессов в установках токамак. // Computational nanotechnology, том 1, с. 21-24.