В. П. Горьков [1], *Л. Н. Лукьянова* [2], *С. А. Шатков* [3]

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ГИБРИДНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ [*]

Введение

Рассматривается задача перелета на заданную кеплеровскую орбиту управляемого космического аппарата (КА), динамика которого описывается математической моделью движения при гравитационном и световом воздействии на КА Солнца. Двигательная система предполагаеся гибридной, включающей реактивный двигатель, имеющий запас горючего, и солнечный парус. Управление гибридной двигательной системой позволяет уменьшать расход топлива в процессе перелета. Приведен класс позиционных управлений радиальной и трансверсальной тягой двигательной системы, зависящий от параметров, который решает задачу управляемости на заданную кеплеровскую орбиту. Позиционные управления получены в аналитической форме. Приведены результаты расчетов позиционного управления и траекторий движения для различных тестовых параметров процесса и вариантов целевых траекторий КА.

1. Постановка задачи управления движением КА с реактивной тягой при одном притягивающем центре

Уравнения движения КА в плоскости орбиты имеют следующий вид [1-3]:

$$\dot{r}(t) = V_r, \;\; \dot{V}_r(t) = V_\theta^2 r^{-1} - \frac{h_1^2}{p_1} r^{-2} + \bar{U}_r, \tag{1}$$

$$\dot{\theta}(t) = V_\theta r^{-1}, \;\; \dot{V}_\theta(t) = -V_r V_\theta r^{-1} + U_\theta. \tag{2}$$

$$r(0) = r_0, \; V_r(0) = V_{r0}, \; \theta(0) = \theta_0, \; V_\theta(0) = V_\theta(0). \tag{3}$$

---

[1]С.н.с факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `v-p-gorkov@yandex.ru`.

[2]Н.с факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `lln@cs.msu.ru`.

[3]аспирант факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `zuky1@mail.ru`.

[*]Работа выполнена при частичной поддержке госбюджетной темы НИР № 3.1.21 ВМК МГУ.

Здесь обозначено: r,θ - полярные координаты; V_r,V_θ - радиальная и трансверсальная составляющие скорости; $\bar{U}_r,U_\theta$ - радиальная и трансверсальная составляющие вектора тяги; $\theta=\chi+\gamma$, χ - истинная аномалия, γ - угловая постоянная, которая определяет угол между линией апсид и осью OX, h_1 - угловой момент, p_1 - фокальный параметр, $\frac{h_1^2}{p_1}=\mu$, μ гравитационный параметр притягивающего тела, который мы считаем равным единице.

Рассматривается задача синтеза законов управления движением КА при наличии одного притягивающего центра с гравитационным параметром μ, обеспечивающих его перелет на заданную кеплеровскую орбиту с параметрами e_2,p_2,h_2, $\frac{h_2^2}{p_2}=\mu$, при выполнении ограничения $r(t)\geqslant R_0,\ R_0>0$. Здесь e_2 - эксцентриситет, h_2 - угловой момент системы, p_2 - фокальный параметр заданной орбиты.

Решение этой задачи позволяет получить знания о необходимых ресурсах для управляемости системы (1)-(3) при движущейся целевой точке.

2. Построение позиционного управления движением КА с реактивной тягой

Решение задачи синтеза проведем с использованием следующих функций, фигуриющих в законах Кеплера для параметров e_2,p_2,h_2 целевой траектории:

$\omega_1=r(1+e_2\cos\theta)-p_2$, (уравнение конического сечения),

$\omega_2=r^2\dot{\theta}(t)-h_2$ (закон площадей).

2.1. Выбор управления $\bar{U}_r$ обеспечивающего фазовое ограничение $r(t)\geqslant R_0,\ R_0>0$

Чтобы решение системы (1),(2) удовлетворяло фазовому ограничению $r(t)\geqslant R_0,\ R_0>0,\ t\geqslant 0$, выберем управление $\bar{U}_r$ в форме гарантирующей выполнение этого ограничения, следуя подходу работы [3]. Рассмотрим второе уравнение (1), записанное с обозначением $\Phi=V_\theta^2 r^{-1}-\frac{h_1^2}{p_1 r^2}$ в виде: $\dot{V}_r(t)=\Phi(t)+\bar{U}_r$, и выберем управление $\bar{U}_r$ в форме

$$\bar{U}_r=U_r+A\,\mathrm{tg}(br-r_1), \tag{4}$$

где b,r_1 положительные константы, U_r - параметр управления.

Лемма 1. *Управление (4) при выборе констант b,r_1 в форме $b=\frac{\varepsilon}{2R_0}$ и $r_1=\frac{\pi+\varepsilon}{2}$, $\varepsilon>0$ - малый параметр, гарантирует выполнение соотношения для фазовой переменной $r(t)$:*

$$R_0<r(t)<R_0\Big(1+\frac{2\pi}{\varepsilon}\Big),\ \varepsilon>0. \tag{5}$$

Доказательство. Подставив управление (4) во второе уравнение системы

(1), выразив из него $r(t)$ и выписав для него оценки, имеем

$$\frac{r_1}{b}-\frac{\pi}{2b}<r(t)=\frac{r_1}{b}+\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{\dot V_r(t)-\Phi(t)-U_r(t)}{A}\right)<\frac{r_1}{b}+\frac{\pi}{2b}.$$

Выбирая константы b, r_1 виде $b=\frac{\varepsilon}{2R_0}$ и $r_1=\frac{\pi+\varepsilon}{2}$, получаем (5). □

2.2. Синтез законов управления U_r и U_θ

Учитывая (4), рассмотрим задачу выбора управлений U_r, U_θ с целью приведения траектории системы :

$$\dot r(t)=V_r,\quad \dot V_r(t)=V_\theta^2 r^{-1}-\frac{h_1^2}{p_1}r^{-2}+U_r+A\operatorname{tg}(br-r_1), \tag{6}$$

$$\dot\theta(t)=V_\theta r^{-1},\quad \dot V_\theta(t)=-V_rV_\theta r^{-1}+U_\theta. \tag{7}$$

на кеплеровскую орбиту с заданными параметрами e_2, p_2, h_2 и последующего движения фазового вектора системы в ее окрестности при начальных условиях (3) системы (6),(7). Синтез законов управления U_r и U_θ, проведем опираясь на метод АКАР [3] .

Выберем в качестве инвариантных многообразий $\omega_1(t)=0$ и $\omega_2=0$. В полярных координатах функции $\omega_1(t)=0$ и $\omega_2=0$ с учетом инварианта

$$\omega_1=r(1+e_2\cos\theta)-p_2$$

имеют вид

$$\dot\omega_1(t)=(1+e_2\cos\theta)\dot r(t)-e_2r\dot\theta(t)\sin\theta=V_r(1+e_2\cos\theta)-e_2V_\theta\sin\theta, \tag{8}$$

$$\ddot\omega_1=\dot V_r(1+e_2\cos\theta)-V_re_2\sin\theta\dot\theta-\dot V_\theta e_2\sin\theta-V_\theta e_2\cos\theta\dot\theta,$$

и

$$\omega_2=r^2\dot\theta(t)-h_2=rV_\theta-h_2. \tag{9}$$

Сформируем следующие инвариантные соотношения:

$$\ddot\omega_1(t)+\frac{2}{T_1}\dot\omega_1(t)+\frac{1}{T_1^2}\omega_1(t)=0, \tag{10}$$

и

$$T_2\dot\omega_2(t)+\omega_2(t)=0. \tag{11}$$

Заметим, что решение (10) имеет вид:

$$\omega_1(t)=e^{-\frac{t}{T_1}}(\omega_1(0)+\dot\omega_1(0)t)\rightarrow_{t\to\infty}0.$$

Тогда, подставляя $\omega_1, \dot\omega_1, \ddot\omega_1$ (8) и ω_2 (9) в (10) и (11), получаем следующие равества: $U_\theta=-\frac{\omega_2}{rT_2}$,

$$\dot V_r(1+e_2\cos\theta)-V_re_2\sin\theta\dot\theta-\dot V_\theta e_2\sin\theta-V_\theta e_2\cos\theta\dot\theta+$$
$$+\frac{2}{T_1}(V_r(1-e_2\cos\theta)-e_2V_\theta\sin\theta)+\frac{1}{T_1^2}(r(1+e_2\cos\theta)-p_2)=0.$$

Подставляя (6),(7) в последнее равенство, и выражая из него U_r, U_θ имеем:

$$U_r=\frac{1}{1+e_2\cos\theta}\Big[e_2\sin\theta\left(-\frac{\omega_2}{rT_2}\right)-\frac{V_\theta^2}{r}+\frac{(1+e_2\cos\theta)h_1^2}{p_1r^2}-$$

$$-(1+e_2\cos\theta)A\,\mathrm{tg}(br-r_1)-\frac{2}{T_1}\dot{\omega}_1(t)-\frac{1}{T_1^2}\omega_1(t), \tag{12}$$

и

$$U_\theta=-\frac{\omega_2}{rT_2}. \tag{13}$$

В силу соотношений (10),(11) через некоторое время, которое определяется выбором положительных параметров T_1, T_2, ([3],стр.141) управления (12),(13) будут иметь вид

$$U_r=\frac{1}{1+e_2\cos\theta}\Big[-\frac{V_\theta^2}{r}+\frac{(1+e_2\cos\theta)h_1^2}{p_1r^2}-(1+e_2\cos\theta)A\,\mathrm{tg}(br-r_1)\Big]=$$

$$=-\frac{V_\theta^2}{p_2}+\frac{h_1^2}{p_1r^2}-A\,\mathrm{tg}(br-r_1). \tag{14}$$

и

$$U_\theta=-\frac{\omega_2}{rT_2}=0. \tag{15}$$

При подстановке (14) во второе уравнение (1), учитывая (9) имеем:

$$\dot{V}_r(t)=\frac{V_\theta^2}{r}-\frac{V_\theta^2}{p_2}=\frac{V_\theta^2}{r}-\frac{h_2^2}{r^2p_2}.$$

Т.о. показано, что траектория системы (6),(7) при управлениях (12),(13), через конечное время приходит в окрестность заданной параметрами e_2, p_2, h_2 кеплеровской орбиты и двигается в её окрестности согласно параметрам требуемого закона площадей.

2.3. Оценка времени регулирования

Приведем лемму об оценке времени регулирования устойчивой линейной системы [5]:

$$\dot{x}=Ax. \tag{16}$$

Пусть $x(t)=x(x^0,t)$ - решение уравнения (16) при начальном условии $x(0)=x^0$ и $\bar{t}_p$ - минимальное время, по истечении которого $|x(t)|$ не превышает некоторой заданной величины Δ:

$$\bar{t}_p=\min\{t:|x(t)|\leqslant\Delta,\ \forall t\geqslant\bar{t}\}.$$

Отметим, что $\bar{t}_p$ при соответствующем выборе начального условия не совпадает со временем регулирования t_p, принятым в теории управления линейных систем. Тем не менее $\bar{t}_p$ также будем называть временем регулирования систем (16) при начальном условии $x(0)=x^0$.

Лемма 2. *Пусть матрица B является решением уравнения Ляпунова $A^TB+BA=-I(I-\text{единичная матрица})$, λ_m и λ_M - минимальное и максимальное собственные значения матрицы B. Решение $x(t)=x(x^0,t)$ уравнения (16) при начальном условии $x(0)=x^0$ удовлетворяет условию*

$$\frac{V_0}{\lambda_M}e^{-t/\lambda_m}\leqslant|x|^2\leqslant\frac{V_0}{\lambda_m}e^{-t/\lambda_M}, \tag{17}$$

где $V_0 = x^{0^T} B x^0$, *и время регулирования* $\bar{t}_p$ *определяется соотношением*

$$\bar{t}_p = \lambda_M \ln \frac{V_0}{\lambda_m \Delta^2}. \tag{18}$$

Верхняя оценка времени регулирования, полученная на основании леммы 2 для уравнения (10), определяется соотношением

$$\bar{t}_{p1} = \ln \frac{T_1(\omega_1(0)^2 + 0.5\omega_1(0)\dot{\omega}_1(0)(T_1^2 - 1)}{\Delta^2}. \tag{19}$$

Для уравнения (11) время регулирования $\bar{t}_{p2}$ определяется соотношением

$$\bar{t}_{p2} = T_2 \ln \frac{\omega_2(0)}{\Delta}. \tag{20}$$

Итоговая оценка для времени регулирования $\bar{t}_p$ уравнений (11),(12), согласно (19),(20) определяется соотношением:

$$\bar{t}_p = \max\left(\ln \frac{T_1(\omega_1(0))^2 + 0.5\omega_1(0)\dot{\omega}_2(0)(T_1^2 - 1)}{\Delta^2}, T_2 \ln \frac{\omega_2(0)}{\Delta} \right). \tag{21}$$

Отметим, что параметры $T_i > 0, i = 1, 2$ задаются пользователем.

Полученные в п.2,3 свойства управлений (12),(13) и оценка времени регулирования (21) позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Траектория системы (6),(7) при управлениях (12),(13), через конечное время (21) приходит в окрестность заданной параметрами* e_2, p_2, h_2 *кеплеровской орбиты и двигается в её окрестности согласно параметрам требуемого закона площадей.*

2.4.1. Результаты численного моделирования при целевой эллиптической орбите

На рис. 1-9 приведены результаты моделирования системы управления КА с параметрами целевой эллиптической орбиты: $e = 0.5, p = 0.75, h = 0.86$, при параметрах управления $T_1 := 0.5, T_2 = 0.5$, и начальных условиях $r(0) = 1.17, V_r(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, V_\theta(0) = 1.2$.

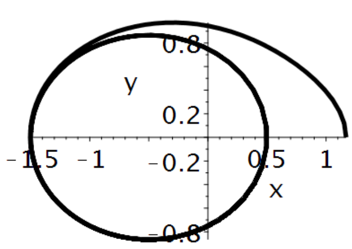

Рис. 1. Фазовый портрет $e = 0.5$

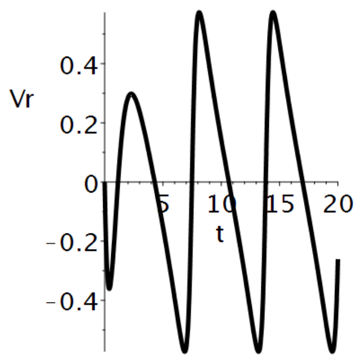

Рис. 2. $\dot{r}(t) = V_r(t)$

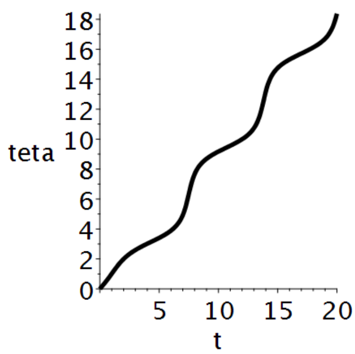

Рис. 3. $\theta(t)$

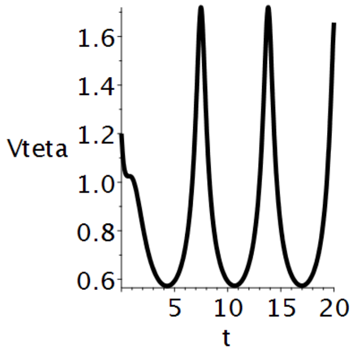

Рис. 4. $V_\theta(t)$

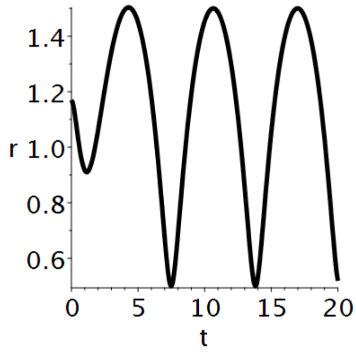

Рис. 5. $r(t)$

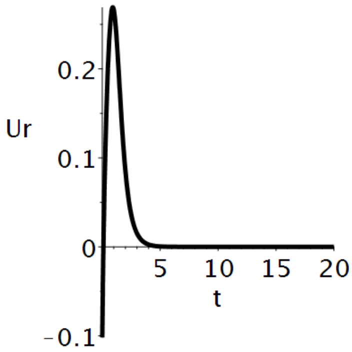

Рис. 6. $U_r(t)$

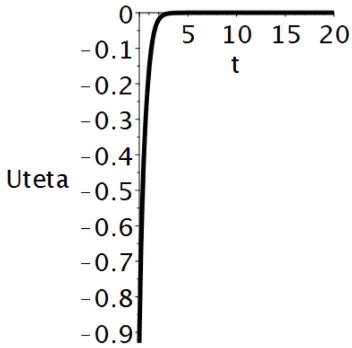

Рис. 7. $U_\theta(t)$

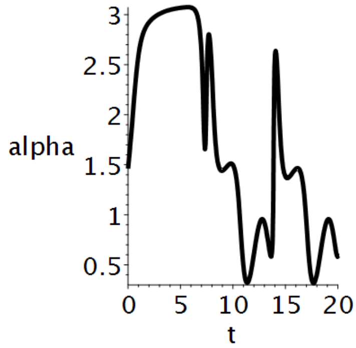

Рис. 8. $\alpha(t)$

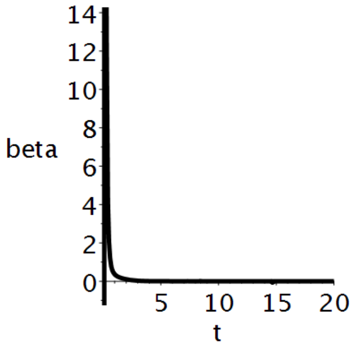

Рис. 9. $\beta(t)$

2.4.2. Результаты численного моделирования при целевой гиперболической орбите

На рис. 10-18 приведены результаты моделирования системы управления КА с параметрами целевой гиперболической орбиты: $e = \sqrt{2}, p = 1, h = 1$, при параметрах управления $T_1 = 1, T_2 = 1$, при начальных условиях $r(0) = 1.17, V_r(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, V_\theta(0) = 1.2$.

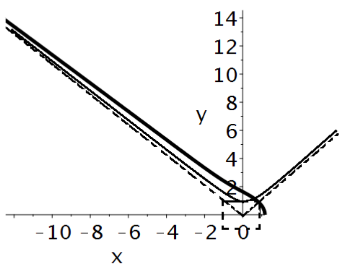

Рис. 10. Фазовый портрет

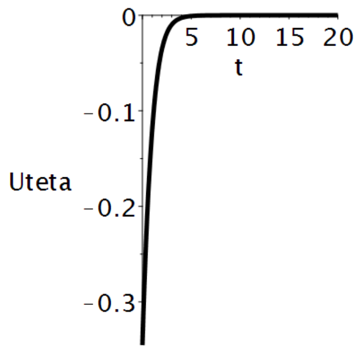

Рис. 11. $U_\theta(t)$

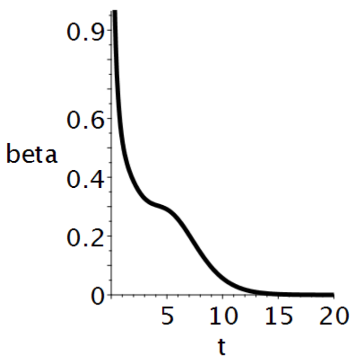

Рис. 12. $\beta(t)$

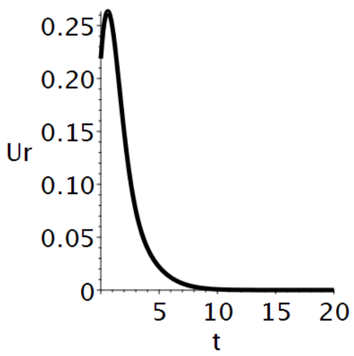

Рис. 13. $U_r(t)$

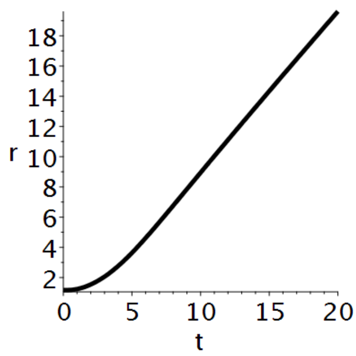

Рис. 14. $r(t)$

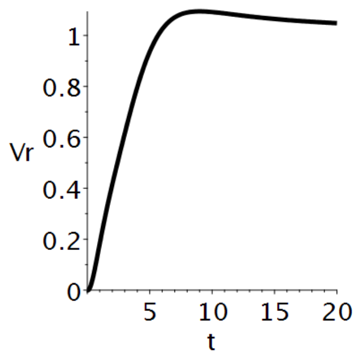

Рис. 15. $V_r(t)$

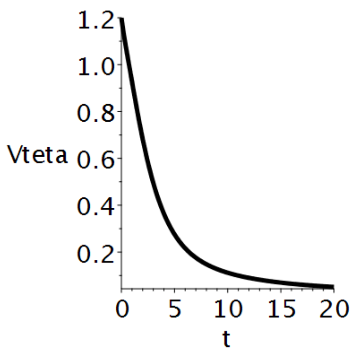

Рис. 16. $V_\theta(t)$

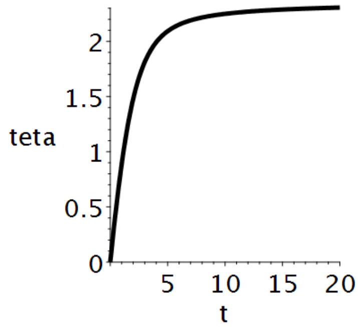

Рис. 17. $\theta(t)$

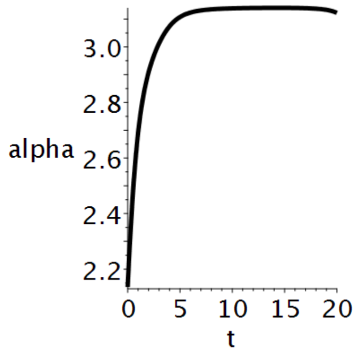

Рис. 18. α

3. Использование тяги солнечного паруса в гибридном варианте двигательной установки

Работам, посвященным движению КА с солнечным парусом посвящены многие фундаментальные работы, из которых отметим [1,2,4] . Рассматривая солнечный парус как двигательную систему, мы рассматриваем вопрос о ее вкладе в реализацию позиционного управления (12),(13) в гибридном варианте, имея в виду возможность одновременной работы реактивной тяги и тяги солнечного паруса. Позиционное управление (12),(13) не требует дополнительных коррекций при движении к целевой орбите и движении по ней. Оно зависит от начальных условий (3), параметров целевого множества α_2, p_2, h_2 и параметров желательного времени перелета T_1, T_2. Его реализация с помощью гибридной двигательной установки, вкючающей реактивный двигатель и солнечный парус, представляет, например, интерес с точки зрения экономии топлива. Другие примеры - оценка параметров управления в ситуации, при которой тяга солненчного паруса используется только в формировании тангенцальной компоненты управления, либо в режиме полного отключения реактивной тяги.

Рассмотрим движение (КА) при помощи «солнечного паруса» под воздействием силы солнечного давления на парус. Согласно электромагнитному описанию света, импульс передается солнечному парусу с помощью электромагнитных волн [1,2,4]. Сила солнечного давления на парус с нормалью $\vec{n}$ и углом α между нормалью паруса $\vec{n}$ и линией солнце-центр паруса [4]:

$$F = \beta \frac{\mu}{r^2} \cos^2 \alpha \, \vec{n}, \tag{22}$$

где β - безразмерный управляемый параметр паруса, $0 < \beta \leqslant \beta_{\max}$,μ - гравитационный параметр Солнца. Пример конструкции солнечного паруса с управляемым параметром β приведен в работах [6,7]. Уравнения движения КА с солнечным парусом в плоскости орбиты имеют вид (1),(2), где:

$$U_r = \frac{\beta \cos^3 \alpha}{r^2}, U_\theta = \frac{\beta \sin \alpha \cos^2 \alpha}{r^2} \tag{23}$$

- радиальная и трансверсальная составляющие вектора тяги солнечного паруса [1,2,4]. Рассмотрим случай реализации управлений (12),(13) только тягой солнечного паруса. Найдем значения β, α при которых выполнены оба равенства (23). Решение системы уравнений (23) относительно параметров β, α имеет вид:

$$\beta(t) = \left(U_r^{2/3}(t) + \frac{U_\theta^2(t)}{U_r^{4/3}(t)} \right)^{3/2} r^2(t), \quad \operatorname{ctg} \alpha(t) = \frac{U_r(t)}{U_\theta(t)}. \tag{24}$$

При краевых условиях п.2.4.1, график функции $\beta(t)$ - решения системы (23) представлен на рис.9; график $\alpha(t)$ представлен на рис.8. В этом случае $\beta_{\max} = \max_{t \geqslant 0} \beta(t) \leqslant 14$. Отметим, что изменение параметров T_1, T_2 в (10), (11) позволяет уменьшить $\beta_{\max}$ (увеличив при этом время прихода на целевое множество).

При краевых условиях п.2.4.2, график функции $\beta(t)$ - решения системы (23) представлен на рис.12; график $\alpha(t)$ представлен на рис.18. В этом случае $\beta_{\max} \leqslant 1$.

Утверждение. *Если на каком либо подотрезке времени регулирования (21), параметр $\beta(t)$ солнечного паруса удовлетворяет соотношению, $\beta(t) \leqslant \beta_{\max}$, то тяга паруса может уменьшить или заменить тягу реактивного двигателя (12),(13) для экономии топлива. Если для моментов времени t: $\beta(t) \geqslant \beta_{\max}$, то тяга солнечного паруса при реализации управления (12),(13) может рассматриваться только как дополнение к реактивной тяге.*

Заключение

В статье рассмотрена задача перелета на заданную кеплеровскую орбиту управляемого КА, динамика которого описывается математической моделью движения при гравитационном и световом воздействии на КА Солнца. Двигательная система предполагается гибридной, включающей реактивный двигатель, имеющего запас горючего и солнечного паруса. Наличие гибридной двигательной системы позволяет уменьшать расход топлива в процессе перелета. Перелет характеризутся временем его исполнения. При малом времени перелета основной вклад в формирование результирующей тяги отводится реактивному двигателю. При большом времени перелета возрастает вклад солнечного паруса в формирование результирующей тяги. Приведенные в статье управляющие функции позволяют оценить полезность наличия солнечного паруса в гибридной двигательной системе при заданных параметрах целевой орбиты, начальных условиях движения и желательном времени перелета на целевую орбиту.

Авторы благодарят д.ф.м.н. М.С.Никольского, д.ф.м.н. Н.Л.Григоренко за обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета: Проблемы оптимизации. — М.: Наука, 1975. 702 с.

2. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. М.Наука, 1990, 448 с.

3. *Колесников А.А.* Новые нелинейные методы управления полетом. Физматлит. 2013. 196 с.

4. *Colin R. McInnes* Solar Sailing, Technology, Dynamics and Mission Applications. 2004 Springer. 321 p.

5. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления.Физматлит. 2007. 440 с.

6. *A. Caruso, G. Mengali, A. A. Quarta, L. Niccolai* Solar sail optimal control with solar irradiance fluctuations, Advances in Space Research, Elsevier, https://doi.org/10.1016/j.asr.2020.05.037

7. *J. B. Pezent, R. Sood, A. Heaton* Contingency target assessment, trajectory design, and analysis for NASA's NEA scout solar sail mission, Advances in Space Research, https://doi.org/10.1016/j.asr.2020.02.004