

## Раздел III. Математическое моделирование

---

*Н. Л. Григоренко*<sup>1</sup>

### СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПО ЗАДАННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРАЕКТОРИИ

#### Введение

Рассматривается задача аналитического синтеза управления для нелинейной математической модели, обеспечивающего движение части координат фазового вектора по заданной траектории в  $R^3$ . Решение классов задач управления движением по определенной траектории для нелинейных систем содержится в работах [1,2,3], в которых предложены подходы к аналитическому конструированию соответствующих управлений. В настоящей работе предложен алгоритм управления, гарантирующий асимптотическое сближение и удержание части компонент фазового вектора нелинейной системы на желаемой траектории движения. Эта траектория задается в виде некоторой кривой в местной пространственной системе координат. Предлагаемый алгоритм управления может быть востребован для реализации различных задач робототехники, например, задач мониторинга окружающей среды.

#### Математическая модель

Рассматривается движение фазового вектора  $y \in R^3$  описываемое системой уравнений

$$\ddot{y} = A(y, \dot{y}) + B(y, \dot{y})v, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad (1)$$

где  $v \in R^3$  - вектор управления; функция  $A(y, \dot{y}) \in R^3$  и  $3 \times 3$  матрица  $B(y, \dot{y})$  удовлетворяют условиям теорем существования, единственности и нелокальной продолжимости решений системы (1) в классе измеримых по Лебегу управлений  $v(t), t \geq 0$ .

#### Постановка задачи

Поставим задачу определения вектора управления  $v$  как функции координат состояния  $v = v(y, \dot{y})$  обеспечивающих асимптотическое движение вектора  $y(t)$  к заданной траектории в  $R^3$  и движение вдоль нее.

---

<sup>1</sup>Профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, e-mail: grigor@cs.msu.ru .

Заданная траектория представляет собой кривую в  $R^3$  в виде пересечения двух поверхностей

$$f_1(y) = 0, f_2(y) = 0, \quad (2)$$

где  $f_1, f_2$  - дифференцируемые функции.

Простроение управления движением системы (1) в  $R^3$

В основу решения рассматриваемой задачи синтеза положены алгоритмы формирования притягивающих предельных множеств в виде кривых в пространстве координат движения, т. е. аттракторов заданной геометрической формы [1,2,3]. С точки зрения процедуры синтеза регуляторов это выражается в виде задаваемых инвариантных многообразий. Инвариантные многообразия задаются таким образом, чтобы уравнения декомпозированной системы на пересечении многообразий соответствовали бы некоторым эталонным дифференциальным уравнениям, описывающим динамику систем с заданным геометрическим аттрактором. Обозначим

$$f(y) = f_1^2(y) + f_2^2(y). \quad (3)$$

**Предположение 1.** а).  $f_1 \cap f_2 \neq \emptyset$ ;

б). Кривая пересечения функций  $f_1, f_2$  не содержит особых точек [4];

в). Существует окрестность  $D(y_0, \dot{y}_0)$  начальной точки  $(y_0, \dot{y}_0)$  и положительная константа  $\alpha_0$  такие, что для векторов  $y \in D(y_0, \dot{y}_0)$  выполнено условие  $\varphi(y) = f_{y_1}'^2 + f_{y_2}'^2 + f_{y_3}'^2 \geq \alpha_0$ .

**Лемма 1.** Модель динамической системы с аттрактором в виде пересечения двух поверхностей  $f_1, f_2$ , заданных соотношениями (2) в  $R^3$ , имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_{1t} = -w f_{y_1}' f \pm k f_{2y_3}' f_{1y_2}' \mp k f_{2y_2}' f_{1y_3}', \\ \dot{y}_{2t} = -w f_{y_2}' f \mp k f_{2y_3}' f_{1y_1}' \pm k f_{2y_1}' f_{1y_3}', \\ \dot{y}_{3t} = -w f_{y_3}' f \pm k f_{2y_2}' f_{1y_1}' \mp k f_{2y_1}' f_{1y_2}'. \end{cases} \quad (4)$$

где  $k(y) > 0, w(y) > 0$  - дифференцируемые функции,  $\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt}, f_{jy_i}' = \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, f_{y_i}' = \frac{\partial f}{\partial y_i}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2$ . Знаки  $\pm$  и  $\mp$  в (4) позволяют выбрать желательное направление движения вектора  $y(t)$  по линии пересечения поверхностей  $f_1, f_2$ .

**Доказательство.** Из (3) учитывая  $f_{y_i}' = 2f_1 f_{1y_i}' + 2f_2 f_{2y_i}'$ ,  $i = 1, 2, 3$  имеем:

$$\dot{f}_t = f_{y_1}' y_{1t}' + f_{y_2}' y_{2t}' + f_{y_3}' y_{3t}' = -w(f_{y_1}'^2 + f_{y_2}'^2 + f_{y_3}'^2) f = -w\varphi(y(t))f.$$

Согласно предположения 1:  $\varphi(y) > 0$  и для решений системы (4), решение уравнения  $f'(t) + w\varphi(t)f(t) = 0$  удовлетворяет условию  $f(y(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, в некоторый конечный момент времени  $T^*$ , траектория системы (4) попадает в малую окрестность линии пересечения поверхностей  $f_1, f_2$ . Для  $f_1(y(t)), f_2(y(t))$  при  $t \geq T^*$  справедливо аналогичное утверждение. Таким образом, для  $t > T^*$  вектор

$y(t)$  движется асимптотически приближаясь к линии пересечения. Движение происходит по одному из направлений, задаваемому знаками  $\pm$  и  $\mp$  в уравнении (4). Функции  $w, k$  выбираются из условия нелокальной продолжимости решений системы (4). ■

Для решения поставленной задачи применим метод структурного синтеза [2,3]. Введем функции рассогласования таким образом, чтобы уравнения декомпозированной системы совпадали с уравнениями (4):

$$\psi = \dot{y} - C(y, w, k), \quad \psi \in R^3, \quad (5)$$

где  $C(y, w, k) \in R^3$  - правая часть системы (4).

**Предположение 2.** Вектор-функция рассогласования  $\psi$  удовлетворяют функциональным уравнениям

$$T \dot{\psi}_t + \psi = 0, \quad (6)$$

где  $T$  -  $(3 \times 3)$  диагональная матрица, с элементами на диагонали - константами  $T_i > 0$ . Матрица  $B(y, \dot{y})$  невырождена для  $(y, \dot{y}) \in D(y_0, \dot{y}_0)$ .

Найдем управления как решение функциональных уравнений (7). Из (5),(6) имеем:

$$\ddot{y} = \dot{C}_t(y, w, k) - T^{-1} \psi. \quad (7)$$

Из (6),(7) получаем систему уравнений относительно параметров управления :

$$A(y, \dot{y}) + B(y, \dot{y})v = \dot{C}_t(y, w, k) - T^{-1} \psi. \quad (8)$$

Решение системы (8), относительно  $v \in R^3$ , имеет вид:

$$v = B^{-1}(y, \dot{y}) \left[ -A(y, \dot{y}) + \dot{C}_t(y, w, k) - T^{-1} \psi \right]. \quad (9)$$

Оценка времени  $T^*$  попадания вектора  $(y_1, y_2, y_3)$  в малую окрестность пересечения поверхностей (2) из заданной начальной позиции системы (1) выполняется из анализа уравнения Ляпунова [5] для решений уравнений (6).

При управлении (9) для  $\psi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  выполнено соотношение  $\psi_i(t) - > 0, t - > \infty$  и для  $t > T^*$ , уравнения для переменных  $y_1, y_2, y_3$ , приобретают форму (4). Решение системы (1) сначала приходит в малую окрестность пересечения поверхностей  $f_1$  и  $f_2$  а за тем движется в малой окрестности линии пересечения [2,3].

**Теорема 1.** При выполнении предположений 1 и 2, и выборе функций рассогласования в форме (6), управления (9) гарантируют приход вектора  $y(t)$  в малую окрестность пересечения поверхностей (2) за конечное время и дальнейшее асимптотическое движение в окрестности пересечения.

**Замечание 1.** Направление движения вектора  $y(t)$  по линии пересечения, для моментов времени  $t > T^*$ , определяется выбором знака (верхнего или нижнего) в уравнениях (4).

## Простроение управления движением системы (1) в $R^n$ при заданной скорости движения

Для случая движения по линии пересечения поверхностей  $f_1, f_2$  с заданной скоростью  $V(y)$  [1], используется система уравнений (4) вида:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \omega \Phi(y), \\ \|\dot{y}\| = V(y), \end{cases}$$

где  $\Phi(y)$  - вектор правой части системы (4);  $\omega = \frac{V}{\|\Phi(y)\|}$ .

### Пример математической модели, имеющий форму уравнений (1)

Рассмотрим математическую модель движения центра масс твердого тела в трехмерном пространстве [6]:

$$\begin{cases} \dot{V} = -g \sin \theta + g v_1, & \dot{H} = V \sin \theta, \\ \dot{\theta} = -\frac{\cos \theta}{V} g + \frac{g}{V} v_2, & \dot{L} = V \cos \theta \cos \psi, \\ \dot{\psi} = -\frac{g}{V \cos \theta} v_3, & \dot{Z} = -V \cos \theta \sin \psi, \end{cases} \quad (10)$$

где  $V$  - земная скорость твердого тела, м/с;  $\theta$  - угол наклона траектории, рад;  $\psi$  - угол пути, рад;  $H$  - высота, м;  $L$  - дальность, м;  $Z$  - боковая дальность, м;  $(v_1, v_2, v_3)$  - вектор управления, м/с<sup>2</sup>.

Систему (10) запишем в виде трех уравнений второго порядка. Выбрав в качестве новых неизвестных функции  $y_1 = H$ ,  $y_2 = L$ ,  $y_3 = Z$  и положив  $y_4 = \dot{y}_1$ ,  $y_5 = \dot{y}_2$ ,  $y_6 = \dot{y}_3$ , получим шесть функций, определяющих в области фазового пространства системы (10), заданной ограничениями

$$V > 0, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \psi < \pi, \quad (11)$$

обратимую замену переменных, поскольку

$$\begin{cases} V = \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}, \\ \sin \theta = \frac{y_4}{\sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}{\sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}}, \\ \sin \psi = -\frac{y_6}{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}, \quad \cos \psi = \frac{y_5}{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}. \end{cases} \quad (12)$$

В переменных  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , система (10) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_4, \quad \dot{y}_4 = -g + v_1 g \sin \theta + v_2 g \cos \theta, \\ \dot{y}_2 = y_5, \quad \dot{y}_5 = v_1 g \cos \theta \cos \psi - v_2 g \sin \theta \cos \psi + v_3 g \sin \psi, \\ \dot{y}_3 = y_6, \quad \dot{y}_6 = -v_1 g \cos \theta \sin \psi + v_2 g \sin \theta \sin \psi + v_3 g \cos \psi, \end{cases} \quad (13)$$

где величины  $V, \sin \theta, \cos \theta, \sin \psi, \cos \psi$  определяются соотношениями (12). Систему (13) с учетом (12) можно записать как систему трех уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $y_1, y_2, y_3$ :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -g + v_1 g \sin \theta + v_2 g \cos \theta, \\ \ddot{y}_2 = v_1 g \cos \theta \cos \psi - v_2 g \sin \theta \cos \psi + v_3 g \sin \psi, \\ \ddot{y}_3 = -v_1 g \cos \theta \sin \psi + v_2 g \sin \theta \sin \psi + v_3 g \cos \psi. \end{cases} \quad (14)$$

В векторной форме система (14) имеет вид (1) где

$$\begin{cases} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ L \\ Z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, A = -g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B(y, \dot{y}) = g \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi & \sin \psi \\ -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \end{cases} \quad (15)$$

и величины  $\sin \theta, \cos \theta, \sin \psi, \cos \psi$  определены через  $y_4, y_5, y_6$  по формулам (15). Матрица  $\frac{1}{g}B^{-1}(y, \dot{y})$  является ортогональной, так что  $B^{-1}(y, \dot{y}) = \frac{1}{g^2}B^T(y, \dot{y})$ . Согласно (15), система (14) имеет форму уравнений (1). Приведем для нее примеры построения управлений и траекторий решающих поставленную задачу управления для ряда уравнений поверхностей, задающих кривую пересечения.

#### Управление движением по линии пересечения двух плоскостей

Рассмотрим поверхности, определяющие целевую траекторию (2) следующего вида:  $f_1(y_1, y_2, y_3) = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + d_1$ ,  $f_2(y_1, y_2, y_3) = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + d_2$ .

Динамическая система (4) с аттрактором в виде пересечения поверхностей  $f_1, f_2$ , при выполнении предположения 1 имеет вид:

$$\begin{cases} y'_{1t} = -2w(f_1a_1 + f_2b_1)f \pm vb_3a_2 \mp vb_2a_3; \\ y'_{2t} = -2w(f_1a_2 + f_2b_2)f \mp vb_3a_1 \pm vb_1a_3; \\ y'_{3t} = -2w(f_1a_3 + f_2b_3)f \pm vb_2a_1 \mp vb_1a_2. \end{cases}$$

Знаки  $\pm$  и  $\mp$  соответствуют желательному направлению движения вектора  $(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$  по линии пересечения поверхностей  $f_1, f_2$ . Функции рассогласования (5) имеют вид

$$\begin{cases} \psi_1 = y_4 - [-2w(f_1a_1 + f_2b_1)f \pm vb_3a_2 \mp vb_2a_3], \\ \psi_2 = y_5 - [-2w(f_1a_2 + f_2b_2)f \mp vb_3a_1 \pm vb_1a_3], \\ \psi_3 = y_6 - [-2w(f_1a_3 + f_2b_3)f \pm vb_2a_1 \mp vb_1a_2]. \end{cases} \quad (16)$$

Закон управления находится как решение функциональных уравнений (6).

Подставляя (16) в (6) имеем:

$$\begin{cases} T_1 \left( y'_{4t} - [-2w(f_1a_1 + f_2b_1)f]'_t \right) + \psi_1 = 0; \\ T_2 \left( y'_{5t} - [-2w(f_1a_2 + f_2b_2)f]'_t \right) + \psi_2 = 0, \\ T_3 \left( y'_{6t} - [-2w(f_1a_3 + f_2b_3)f]'_t \right) + \psi_3 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Преобразуем уравнения (17) с учетом (14):

$$y'_{4t} = [-2w(f_1a_1 + f_2b_1)f]'_t - \frac{1}{T_1}\psi_1; \quad v_1g \sin \theta + v_2g \cos \theta = \Gamma_1 + g; \quad (18)$$

$$y'_{5t} = [-2w(f_1a_2 + f_2b_2)f]'_t - \frac{1}{T_2}\psi_2, \\ v_1g \cos \theta \cos \psi - v_2g \sin \theta \cos \psi + v_3g \sin \psi = \Gamma_2, \quad (19)$$

$$y'_{6t} = [-2w(f_1a_3 + f_2b_3)f]'_t - \frac{1}{T_3}\psi_3, \\ -v_1g \cos \theta \sin \psi + v_2g \sin \theta \cos \psi + v_3g \cos \psi = \Gamma_3. \quad (20)$$

В формулах (18),(19),(20) через  $\Gamma_i, i = 1, 2, 3$  обозначены правые части выражений  $y'_{i+3}, i = 1, 2, 3$ . Решение системы (18),(19),(20), относительно  $v_i, i = 1, 2, 3$ , имеет вид (9).

На рис.1 приведен фазовый портрет замкнутой системы, демонстрирующий движение вектора  $y(t)$  по линии пересечения  $f_1$  и  $f_2$ . Параметры:  $g = 9.8; a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 3; d_1 = 1; b_1 = 3; b_2 = 1; b_3 = 2; d_2 = -1; T_1 = 0.02; T_2 = 0.02; T_3 = 0.02; w = 1; v = 0; z = 1; y_1(0) = 2; y_2(0) = 3; y_3(0) = 2; y_4(0) = 0; y_5(0) = -0.5; y_6(0) = -0.5$ .

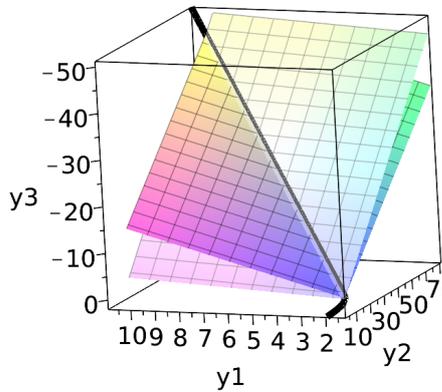


Рис. 1

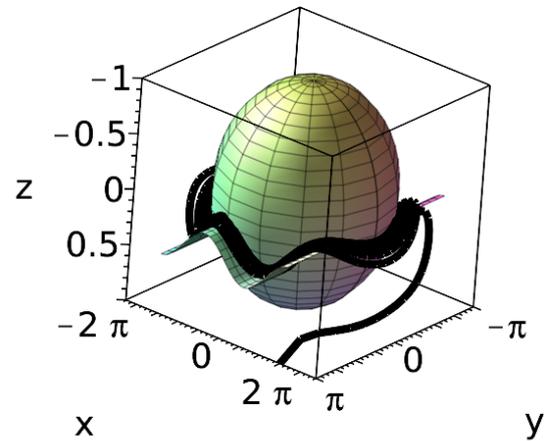


Рис. 2

### Управление движением по линии пересечения эллипсоида и цилиндрической поверхности $R^3$

Пусть желаемая траектория представляет собой пересечение эллипсоида и цилиндрической поверхности в  $R^3$ :  
 $f_1(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_1^2}{25} + \frac{y_2^2}{4} + y_3^2 - 1, f_2(y_1, y_2, y_3) = y_3 - \frac{1}{6} \sin(y_1) - 0.5$ .

Соответствующая динамическая система (4) с аттрактором в виде пересечения поверхностей  $f_1$  и  $f_2$  имеет вид:

$$\begin{cases} y'_{1t} = -w(\frac{4}{25}f_1y_1 - \frac{1}{3}f_2 \cos(y_1))f \pm \frac{v}{2}y_2, \\ y'_{2t} = -w(f_1y_2)f \mp v\frac{2}{25}y_1 \mp v\frac{1}{3} \cos(y_1)y_3, \\ y'_{3t} = -w(4f_1y_3 + 2f_2)f \pm \frac{v}{12} \cos(y_1)y_2. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь:  $y'_{it} = \frac{dy_i}{dt}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Введем инвариантные многообразия таким образом, чтобы уравнения декомпозированной системы совпадали с уравнениями (21):

$$\begin{cases} \psi_1 = y_4 - (-w(\frac{4}{25}f_1y_1 + 2f_2 \cos(y_1))f \pm \frac{v}{2}y_2), \\ \psi_2 = y_5 - (-w(f_1y_2)f \mp v\frac{2}{25}y_1 \pm v\frac{2}{6} \cos(y_1)y_3), \\ \psi_3 = y_6 - (-w(4f_1y_3 + 2f_2)f \mp v\frac{v}{12} \cos(y_1)y_2). \end{cases} \quad (22)$$

Закон управления ищется как решение функциональных уравнений

$$T_i \psi'_{it} + \psi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Подставляя (21) в (22) имеем:

$$\begin{cases} y'_{4t} = (-w(\frac{4}{25}f_1y_1 - \frac{1}{3}f_2 \cos(y_1))f \pm \frac{vy_2}{2})'_t - \frac{1}{T_1} \psi_1; \\ y'_{5t} = (-w(f_1y_2)f \mp v\frac{2}{25}y_1 \mp v\frac{1}{3} \cos(y_1)y_3)'_t - \frac{1}{T_2} \psi_2; \\ y'_{6t} = (-w(4f_1y_3 + 2f_2)f \pm \frac{v}{12} \cos(y_1)y_2)'_t - \frac{1}{T_3} \psi_3. \end{cases} \quad (24)$$

Из (14),(24) получим систему (8), решение которой относительно  $v_i, i = 1, 2, 3$ , имеет вид (9).

На рис.2 приведен фазовый портрет замкнутой системы, демонстрирующий движение вектора  $y(t)$  и соответствующий аттрактор. Параметры:  $g = 9.8$ ;  $T_1 = 0.02$ ;  $T_2 = 0.02$ ;  $T_3 = 0.02$ ;  $w = 10^{-1}$ ;  $v = 20$ ;  $y_1(0) = \frac{3}{2}\pi$ ,  $y_2(0) = \pi$ ,  $y_3(0) = 1$ ,  $y_4(0) = 0$ ,  $y_5(0) = -0.5$ ,  $y_6(0) = -0.5$ .

### Управление движением по линии пересечения сферы и цилиндра в $R^3$

Пусть желаемая траектория представляет собой линию, задаваемую как пересечение цилиндрической и сферической поверхностей, задаваемыми уравнениями в  $R^3$ :  $f_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 4r^2 = 0$ ,  $f_2(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - 2r_1y_2 = 0$ . Здесь  $r, r_1$  - константы. Соответствующая динамическая система (4) с аттрактором в виде пересечения цилиндра  $f_2 = 0$  и сферы  $f_1 = 0$  имеет вид :

$$\begin{cases} y'_{1t} = -w(2f_1y_1 + 2f_2y_1)f \mp v(2y_2 - 2r_1)2y_3, \\ y'_{2t} = -w(2f_1y_2 + 2f_1(2y_2 - 2r_1))f \pm v4y_1y_3, \\ y'_{3t} = -w(2f_1y_3)f \pm v(2y_2 - 2r_1)2y_1 \mp v4y_1y_2. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь:  $y'_{it} = \frac{dy_i}{dt}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Введем инвариантные многообразия таким образом, чтобы уравнения декомпозированной системы совпадали с уравнениями (25):

$$\begin{cases} \psi_1 = y_4 - (-w(2f_1y_1 + 2f_2y_1)f \mp v(2y_2 - 2r_1)2y_3), \\ \psi_2 = y_5 - (-w(2f_1y_2 + 2f_1(2y_2 - 2r_1)f \pm v4y_1y_3), \\ \psi_3 = y_6 - (-w(2f_1y_3)f \pm v(2y_2 - 2r_1)2y_1 \mp v4y_1y_2). \end{cases} \quad (26)$$

Закон управления ищется как решение функциональных уравнений

$$T_i\psi_i + \psi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (27) имеем:

$$\begin{cases} y_4' = \left( -w(2f_1y_1 + 2f_2y_1)f \mp v(2y_2 - 2r_1)2y_3 \right)'_t - \frac{1}{T_1}\psi_1; \\ y_5' = \left( -w(2f_1y_2 + 2f_1(2y_2 - 2r_1)f \pm v4y_1y_3) \right)'_t - \frac{1}{T_2}\psi_2; \\ y_6' = \left( -w(2f_1y_3)f \pm v(2y_2 - 2r_1)2y_1 \mp v4y_1y_2 \right)'_t - \frac{1}{T_3}\psi_3. \end{cases} \quad (28)$$

Из (14),(28) получаем систему (8), решение которой относительно  $v_i, i = 1, 2, 3$ , имеет вид (9).

На рис.3,4 приведен фазовый портрет замкнутой системы, демонстрирующий движение вектора  $y(t)$  и соответствующий аттрактор. Параметры:  $g = 9.8$ ;  $T_1 = 0.02$ ;  $T_2 = 0.02$ ;  $T_3 = 0.02$ ;  $w = 10^{-5}$ ;  $v = 1$ ;  $y_1(0) = 6$ ,  $y_2(0) = 6$ ,  $y_3(0) = 6$ ,  $y_4(0) = -0.3$ ,  $y_5(0) = 0.2$ ,  $y_6(0) = -0.5$ .

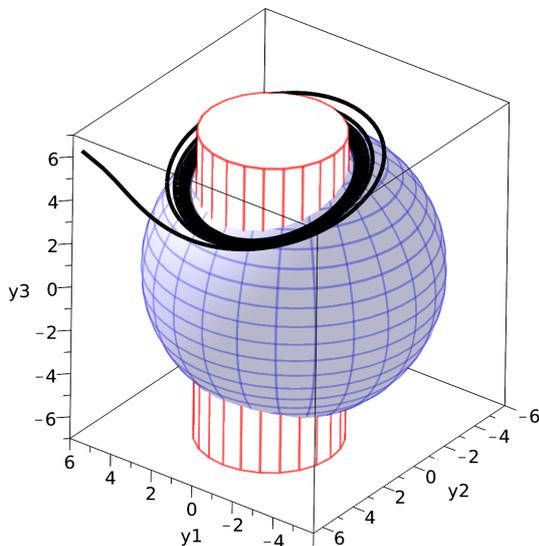


Рис. 3

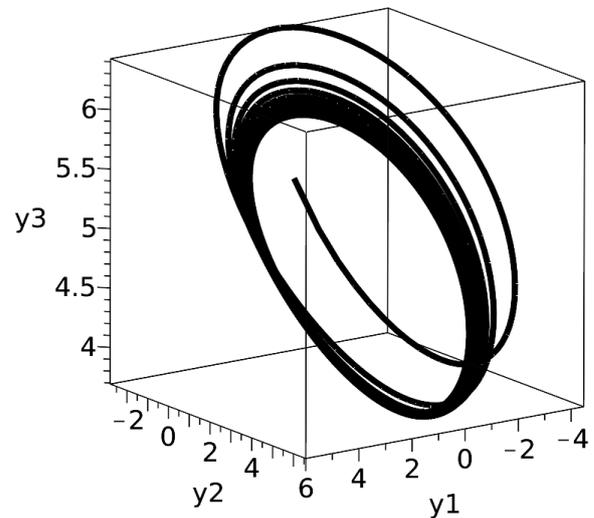


Рис. 4

### Литература

1. *Игнатьев М.Б.* Голономные автоматические системы // М.-Л.,Издательство АН СССР, 1963,с.204.
2. *Колесников А.А.* Новые нелинейные методы управления полетом // М.,Физматлит, 2013,с.196.

3. *Бойчук Л. М.* Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления // М., Энергия, 1971, с.160.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления (том 1) // М., Наука, 1969, с.516-518.
5. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления (том 1) // М., Физматлит, 2010, Вып.7, с.79-94.
6. *Канатников А. Н., Шмагина Е. А.* Задача терминального управления движением летательного аппарата // Нелинейная динамика и управление, М., Физматлит, 2010, Вып.7, с.79-94.