

А.В. Гулин, В.А. Морозова

О СПЕКТРЕ НЕЛОКАЛЬНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

Введение. Изучаются разностные схемы для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями и переменным коэффициентом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

$$u(0, t) = 0, \quad k(1) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = k(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), \quad k(x) \geq c_1 > 0.$$

Обозначим $v_i^n = v(x_i, t_n)$, $x_i = ih$, $t_n = n\tau$, $v_i^{(\sigma)} = \sigma v_i^{n+1} + (1 - \sigma) v_i^n$,

$$v_{t,i}^n = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau}, \quad v_{x,i}^n = \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h}, \quad v_{x,i}^n = \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h}.$$

Здесь $\tau > 0$ – шаг по времени, N – число точек по пространственной переменной, $h = 1/N$.

Введем комплексное N -мерное пространство H , состоящее из функций $z_i = z(x_i)$, заданных на сетке $\omega_h = \{x_i = ih\}_{i=1}^N$. Элементы пространства H можно рассматривать как векторы $z = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_N)^T$, где z_i – координаты z в единичном базисе. Будем рассматривать также функции $z_n = z(t_n) \in H$ дискретного аргумента $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots$, $\tau > 0$ со значениями в H . Таким образом, $z_n = (z_1^n \ z_2^n \ \dots \ z_N^n)^T$. Исходная дифференциальная задача заменяется разностной схемой

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\tau} + \sigma A v_{n+1} + (1 - \sigma) A v_n = 0,$$

где

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00908)

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{N-1} & a_{N-1} + a_N & -a_N \\ -2a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a_N & 2a_N \end{bmatrix}. \quad (1)$$

При надлежащем выборе коэффициентов a_i схема имеет второй порядок аппроксимации относительно шага h . В дальнейшем предполагаем положительность и ограниченность последовательности $\{a_i\}_{i=1}^N$, то есть существование констант c_1 и c_2 таких, что $0 < c_1 \leq a_i \leq c_2$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$ и для всех натуральных N .

Первые исследования корректности разностных схем с нелокальными граничными условиями проведены в работах Н. И. Ионкина [1], [2], где рассматривался случай постоянных коэффициентов, $k(x) \equiv 1$. Показано, что в данном случае все собственные значения матрицы A – вещественные, но система собственных векторов не является полной. Используя разложение искомого решения в биортогональную сумму по собственным и присоединенным функциям разностного оператора и двусторонние неравенства для коэффициентов биортогонального разложения, в [1], [2] получены априорные оценки решения разностной задачи в сеточной L_2 -норме через начальные условия и правую часть. Подробное изложение теории устойчивости нелокальных разностных схем с постоянными коэффициентами можно найти в книгах [3], [4]. Исследование устойчивости нелокальных разностных схем с переменными коэффициентами проведено на основе принципа максимума в работах [5] – [8]. Здесь приведены, в частности, примеры коэффициентов, для которых матрица A имеет комплексные собственные значения. Отметим также работы [9], [10], в которых развит метод энергетических неравенств и получены априорные оценки решения нелокальных разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами.

В настоящей работе основным предметом изучения является спектр матрицы (1). Исследование спектра матрицы A проводится путем сопоставления его со спектром так называемой ассоциированной матрицы L – симметричной трехдиагональной матрицы, мало отличающейся от A .

Матрица A определяет в H оператор, действующий по правилу

$$(Ay)_i = -(ay_{\bar{x}})_{x,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_0 = 0, \quad (Ay)_N = \frac{2}{h}(a_N y_{\bar{x},N} - a_1 y_{x,0}). \quad (2)$$

Оператор (2) будем называть основным разностным оператором. Наряду с A рассмотрим ассоциированный разностный оператор, заданный матрицей

$$L = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 + a_3 & -a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{N-1} & a_{N-1} + a_N & -a_N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2a_N & 2a_N \end{bmatrix}, \quad (3)$$

которая отличается от A только отсутствием элемента $-2a_1$ в левом нижнем углу. Оператор $L: H \rightarrow H$ определяется правилом

$$(Ly)_i = -(ay_{\bar{x}})_{x,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_0 = 0, \quad (Ly)_N = \frac{2}{h} a_N y_{\bar{x},N}.$$

1. Свойства оператора L .

Оператор L является самосопряженным в смысле скалярного произведения

$$(y, z] = \sum_{i=1}^{N-1} h y_i \bar{z}_i + 0,5 h y_N \bar{z}_N.$$

Докажем приведенное утверждение. Используя известные разностные формулы (см. [11, с. 97]), получаем тождество

$$\sum_{i=1}^{N-1} h (Ly)_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^N h a_i y_{\bar{x},i} \bar{z}_{\bar{x},i} - a_N y_{\bar{x},N} \bar{z}_N,$$

которое, учитывая граничное условие $(Ly)_N = 2h^{-1} a_N y_{\bar{x},N}$, можно переписать в виде

$$(Ly, z] = \sum_{i=1}^N h a_i y_{\bar{x},i} \bar{z}_{\bar{x},i}. \quad (4)$$

Точно так же доказывается тождество $(Lz, y] = \sum_{i=1}^N ha_i z_{\bar{x},i} \bar{y}_{\bar{x},i}$. Тем самым,

$$(Lz, y] = \sum_{i=1}^N h z_{\bar{x},i} (a_i \bar{y}_{\bar{x},i}) = (z, Ly],$$

что и означает самосопряженность оператора L .

Если $a_i \geq c_1 > 0$ для $i=1, 2, \dots, N$, то для любого ненулевого элемента $y \in H$ выполняется неравенство $(Ly, y] > 0$.

Действительно, из (4) при $z = y$ получим

$$(Ly, y] = \sum_{i=1}^N ha_i |y_{\bar{x},i}|^2 \geq c_1 \sum_{i=1}^N h |y_{\bar{x},i}|^2 \geq 0.$$

Если $(Ly, y] = 0$ для некоторого $y \in H$, то $y_{\bar{x},i} = 0$ для $i=1, 2, \dots, N$, следовательно $y_i = y_{i-1} = \dots = y_0 = 0$.

Рассмотрим ассоциированную задачу на собственные значения $Ly = ly$ или, подробнее,

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i} + ly_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = 0, \quad \frac{2}{h}(-a_N y_{\bar{x},N}) + ly_N = 0. \quad (5)$$

Поскольку L – самосопряженный положительный оператор, все его собственные значения – вещественные положительные числа. Занумеруем собственные значения в порядке возрастания: $0 < l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_{N-1}$. Приведем оценку сверху для максимального собственного значения l_{N-1} .

Если $0 < a_i \leq c_2 > 0$ для $i=1, 2, \dots, N$, то справедлива оценка $l_{N-1} \leq 4c_2 h^{-2}$.

Для доказательства оценим сверху квадратичную форму $(Ly, y]$. Согласно (4) имеем

$$(Ly, y] = \sum_{i=1}^N ha_i |y_{\bar{x},i}|^2 \leq c_2 \sum_{i=1}^N h |y_{\bar{x},i}|^2 = \frac{c_2}{h^2} \sum_{i=1}^N h |y_i - y_{i-1}|^2.$$

Далее, воспользовавшись неравенством $|y_i - y_{i-1}|^2 \leq 2(|y_i|^2 + |y_{i-1}|^2)$, получим

$$\begin{aligned}
(Ly, y] &\leq \frac{2c_2}{h^2} \left(\sum_{i=1}^N h|y_i|^2 + \sum_{i=1}^{N-1} h|y_i|^2 \right) = \\
&= \frac{2c_2}{h^2} \left(2 \sum_{i=1}^{N-1} h|y_i|^2 + h|y_N|^2 \right) = \frac{4c_2}{h^2} \left(\sum_{i=1}^{N-1} h|y_i|^2 + 0,5h|y_N|^2 \right) = \frac{4c_2}{h^2} (y, y].
\end{aligned}$$

Пусть $Ly = l_{N-1}y$, $y \neq 0$. Тогда $(Ly, y] = l_{N-1}(y, y] \leq 4c_2h^{-2}(y, y]$ и, следовательно, $l_{N-1} \leq 4c_2h^{-2}$.

Для матриц вида (3) хорошо известен алгоритм построения характеристического многочлена, основанный на использовании последовательности Штурма (см. [12] – [14]). Справедливо следующее утверждение.

Пусть $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Рассмотрим рекуррентную последовательность многочленов

$$\begin{aligned}
y_0(\mu) &= 1, \quad a_2 y_1(\mu) = (a_1 + a_2 - \mu)y_0(\mu), \\
a_{k+1} y_k(\mu) &= (a_k + a_{k+1} - \mu)y_{k-1}(\mu) - a_k y_{k-2}(\mu), \\
k &= 2, 3, \dots, N-1, \quad y_N(\mu) = (2a_N - \mu)y_{N-1}(\mu) - 2a_N y_{N-2}(\mu)
\end{aligned} \tag{6}$$

вещественной переменной μ . Промежуточные многочлены $y_k(\mu)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ составляют систему Штурма для характеристического многочлена $y_N(\mu)$. Все собственные значения l_k – различные числа.

Отсюда следует, что все собственные значения l_k – однократные, и справедливы строгие неравенства $0 < l_0 < l_1 < \dots < l_{N-1}$. Будем предполагать, что все l_k известны. При необходимости их нетрудно найти численно с помощью метода бисекции, основанного на свойствах последовательности (6).

2. Свойства оператора A .

Для основного оператора A , определенного согласно (2), рассмотрим задачу на собственные значения $Av = \lambda v$ или, подробнее,

$$\begin{aligned}
(a v_{\bar{x}})_{x,i} + \lambda v_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad v_0 = 0, \\
\frac{2}{h} (a_1 v_{x,0} - a_N v_{\bar{x},N}) + \lambda v_N &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Характерным свойством задачи (7) является наличие нулевого собственного значения.

Если $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, то число $\lambda = 0$ является собственным значением, которому отвечает собственная функция

$$v_0 = 0, \quad v_i = c \sum_{j=1}^i \frac{h}{a_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где $c \neq 0$ – произвольная постоянная.

Действительно, подставляя $\lambda = 0$ в (7), получаем систему уравнений

$$(a v_{\bar{x}})_{x,i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad a_1 v_{x,0} - a_N v_{\bar{x},N} = 0, \quad v_0 = 0.$$

В результате суммирования получим

$$a_i v_{\bar{x},i} = c, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad v_0 = 0,$$

где $c \neq 0$ – произвольная постоянная. Таким образом,

$$v_{\bar{x},i} = c/a_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad v_0 = 0$$

или $v_j - v_{j-1} = hc/a_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, $v_0 = 0$. Отсюда получаем

$$\sum_{j=1}^i (v_j - v_{j-1}) = c \sum_{j=1}^i h/a_j,$$

следовательно $v_j = c \sum_{j=1}^i h/a_j$, что и требовалось.

По аналогии с (6) поставим в соответствие оператору A систему многочленов

$$\begin{aligned} v_0(\mu) &= 1, \quad a_2 v_1(\mu) = (a_1 + a_2 - \mu) v_0(\mu), \\ a_{k+1} v_k(\mu) &= (a_k + a_{k+1} - \mu) v_{k-1}(\mu) - a_k v_{k-2}(\mu), \quad k = 2, 3, \dots, N-1, \\ v_N(\mu) &= (2a_N - \mu) v_{N-1}(\mu) - 2a_N v_{N-2}(\mu) - 2a_1 v_0(\mu). \end{aligned} \quad (8)$$

Корнями многочлена $v_N(\mu)$ являются собственные значения $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}$ матрицы $h^2 A$. Заметим, что в системах (6) и (8) совпадают все многочлены, кроме последних, то есть $y_k(\mu) \equiv v_k(\mu)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Далее, из соотношений

$$\begin{aligned} y_N(\mu) &= (2a_N - \mu) y_{N-1}(\mu) - 2a_N y_{N-2}(\mu), \\ v_N(\mu) &= (2a_N - \mu) v_{N-1}(\mu) - 2a_N v_{N-2}(\mu) - 2a_1 v_0(\mu) = \\ &= (2a_N - \mu) y_{N-1}(\mu) - 2a_N y_{N-2}(\mu) - 2a_1 \end{aligned}$$

следует важное равенство

$$v_N(\mu) = y_N(\mu) - 2a_1, \quad (9)$$

означающее, что *характеристический многочлен матрицы h^2A отличается от характеристического многочлена якобиевой матрицы h^2L только константой*. Поскольку $\lambda = 0$ является собственным значением матрицы h^2A , ее характеристический многочлен $v_N(\mu)$ обращается в нуль при $\mu = 0$. Но тогда равенство (9) можно заменить эквивалентным $y_N(0) = 2a_1$.

3. Взаимное расположение собственных чисел матриц L и A .

3.1. Примеры. Как уже отмечалось, все собственные значения матрицы L простые и положительные. Это свойство не распространяется, вообще говоря, на матрицу A , которая может иметь также двукратные вещественные собственные значения и комплексно сопряженные пары собственных значений. Рассмотрим соответствующие примеры, полагая для простоты изложения, что $h = 1$.

Пример 1. Пусть $N = 3$. Тогда характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид $\lambda(\lambda^2 - p_1\lambda + p_0) = 0$, где

$$p_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad p_0 = a_1a_2 + 3a_1a_3 + 5a_2a_3.$$

Таким образом, возможны три случая:

- 1) $d = p_1^2 - 4p_0 = 0$, тогда матрица A имеет кратное собственное значение,
- 2) $d > 0$ – имеются два различных вещественных собственных значения,
- 3) $d < 0$ – имеются два комплексно сопряженных собственных значения.

Вычисления дают $d = a_1^2 + 4a_2^2 + 9a_3^2 - 6a_1a_3 - 8a_2a_3$. Не ограничивая общности, положим $a_1 = 1$ и обозначим $a_2 = y$, $a_3 = x$. Тогда уравнение $p_1^2 - 4p_0 = 0$ примет вид

$$9x^2 - 8xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0. \tag{10}$$

Кривая (10) представляет собой эллипс на плоскости (x, y) . Этот эллипс изображен на рис. 1 в виде совокупности двух кривых

$$y = f_1(x) = x - \frac{\sqrt{(1-x)(5x-1)}}{2}, \quad y = f_2(x) = x + \frac{\sqrt{(1-x)(5x-1)}}{2}.$$

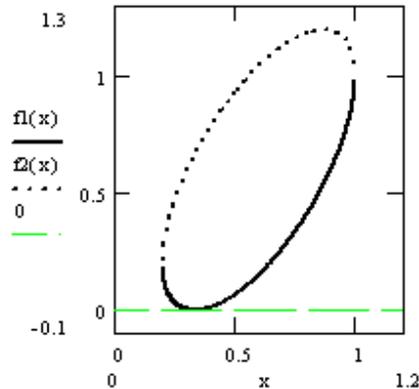


Рис. 1: К примеру 1. Здесь $a_1 = 1$, $a_2 = y$, $a_3 = x$

В каждой точке эллипса матрица A имеет одно двукратное собственное значение. Внутри эллипса выполняется неравенство $d = p_1^2 - 4p_0 < 0$, что соответствует наличию пары комплексно сопряженных собственных значений. Если же точка $(x = a_3, y = a_2)$ расположена во внешней части эллипса, то ей соответствует два различных вещественных собственных значения.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда $N = 7$ и $a_1 = 1$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $a_7 = x > 0$. Полагая $h = 1$, получим

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1+x & -x \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2x & 2x \end{bmatrix}.$$

Параметр $x \approx 0.51$ выбирался таким образом, чтобы матрица A помимо нулевого собственного числа содержала пару вещественных и пару комплексно сопряженных собственных значений, а также двукратное вещественное собственное значение.

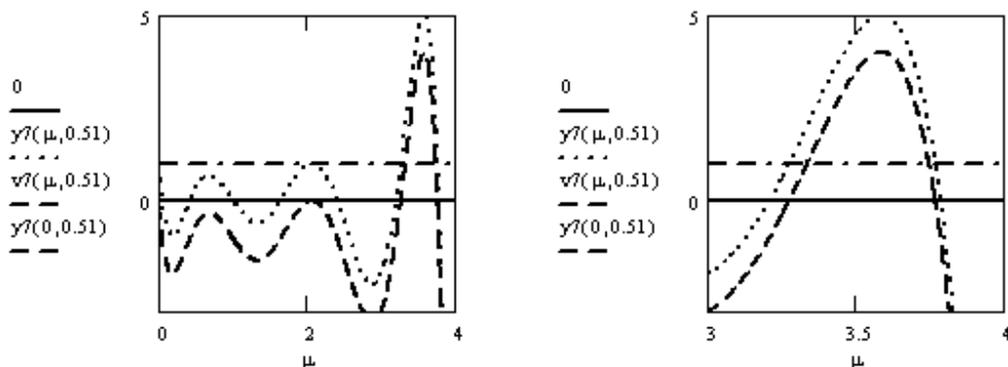


Рис. 2: Характеристические многочлены матриц L (верхний график) и A (нижний график) в случае $N = 7$, $a_i = 1$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $a_7 = x \approx 0.51$

На рис. 2 представлены графики характеристических многочленов $v_7(\mu, x)$ и $y_7(\mu, x)$, $x \approx 0.51$. Здесь $y_7(0, x) = 2x \approx 1$.

Численные выражения собственных значений λ_k матрицы A и собственных значений l_k ассоциированной матрицы L приведены в следующей таблице.

Табл. 1: $N = 7$, $a_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), $a_7 \approx 0.51$

k	l_k	λ_k
0	0.05	0
1	0.421	$0.671 - 0.174i$
2	1.007	$0.671 + 0.174i$
3	1.642	2.071
4	2.414	2.071
5	3.208	3.276
6	3.789	3.77

Расположим корни многочлена $y_7(\mu)$ в порядке возрастания,

$0 < l_0 < l_1 < l_2 < l_3 < l_4 < l_5 < l_6$. Обозначим через μ_k точки локального экстремума функции $y_7(\mu)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и через $Y_k = y_7(\mu_k)$ – значения в точках экстремума.

Из рис. 2 следует, что $0 < l_0 < l_1 < \mu_2 < l_2 < l_3 < \mu_4 < l_4 < l_5 < \mu_6 < l_6$.

Таким образом, имеем следующее взаимное расположение нулей и точек локального максимума многочлена $y_7(\mu)$: $l_{2k-1} < \mu_{2k} < l_{2k}$ $k = 1, 2, 3$.

В данном примере собственные значения ассоциированного и основного операторов чередуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & l_0 &= 0.05 \\ l_1 &= 0.421, & \lambda_1 &= 0.671 - 0.174i, & \lambda_2 &= 0.671 + 0.174i, & l_2 &= 1.007 \\ l_3 &= 1.642, & \lambda_3 &= 2.071, & \lambda_4 &= 2.071, & l_4 &= 2.414 \\ l_5 &= 3.208, & \lambda_5 &= 3.276, & \lambda_6 &= 3.77, & l_6 &= 3.789. \end{aligned}$$

Отсюда и из рис. 2 видно, что при $k = 1, 2, 3$

- если $Y_{2k} < y_7(0)$, то между l_{2k-1} и l_{2k} находится вещественная часть двух комплексно сопряженных собственных значений матрицы A ,
- если $Y_{2k} > y_7(0)$, то между l_{2k-1} и l_{2k} находится два различных вещественных собственных значения матрицы A ,
- если $Y_{2k} = y_7(0)$, то между l_{2k-1} и l_{2k} находится двукратное собственное значение матрицы A .

Пример 3. Рассмотрим аналогичный пример с четным N , когда $N = 6$, $a_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $a_6 = x \approx 0.66$

Ситуация изображена на рис. 3.

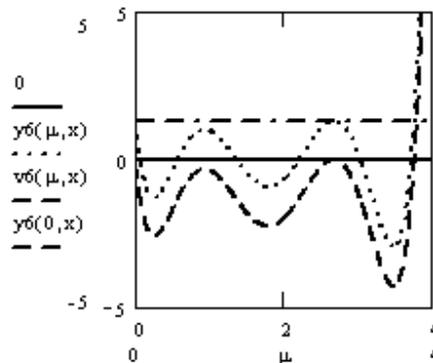


Рис. 3: Характеристические многочлены матриц L (верхний график) и A (нижний график) в случае $N = 6$, $a_i = 1$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $a_6 = x \approx 0.66$

Численные результаты представлены ниже.

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & l_0 &= 0.068 \\ l_1 &= 0.57, & \lambda_1 &= 0.924 - 0.192i, & \lambda_2 &= 0.924 + 0.192i, & l_2 &= 1.366 \\ l_3 &= 2.206, & \lambda_3 &= 2.684, & \lambda_4 &= 2.684, & l_4 &= 3.047 \\ l_5 &= 3.735, & \lambda_5 &= 3.775. \end{aligned}$$

Единственным принципиальным отличием от предыдущего примера является то, что теперь максимальное собственное значение основного оператора A расположено правее максимального собственного значения ассоциированного оператора L .

Пример 4. Положим $N = 10$, $h = 1/N$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Коэффициенты a_j определим следующим образом. Сначала зададим коэффициенты

$$\begin{aligned} c_i &= 1 - 0.4x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N \\ b_1 &= 1.5, \quad b_3 = 0.5, \quad b_5 = 1.5, \quad b_7 = 0.5, \quad b_9 = 1.5, \\ b_0 &= b_2 = b_4 = b_6 = 1. \end{aligned}$$

Требуемые коэффициенты a_i строятся в виде произведений $a_i = c_i b_i$, $i = 0, 1, \dots, N$. В результате получается функция, изображенная в левой части рис. 4.

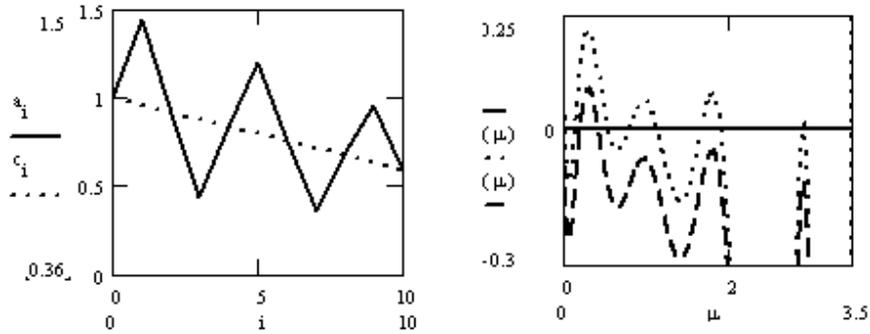


Рис. 4: Коэффициенты a_i и характеристические многочлены в примере 4

По найденным a_i ненулевые элементы матрицы A определяются следующим образом:

$$A_{ii} = a_i + a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad A_{NN} = 2a_N,$$

$$A_{ii+1} = -a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$A_{ii-1} = -a_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad A_{NN-1} = -2a_N, \quad A_{N1} = -2a_1.$$

Матрица L задается так же, как и матрица A , но $L_{N1} = 0$. Взаимное расположение собственных значений оказалось следующим.

$$\lambda_0 = 0, \quad l_0 = 0.019$$

$$l_1 = 0.144, \quad \lambda_1 = 0.203, \quad \lambda_2 = 0.428, \quad l_2 = 0.546$$

$$l_3 = 0.796, \quad \lambda_3 = 0.981 - 0.15i, \quad \lambda_4 = 0.981 + 0.15i, \quad l_4 = 1.139$$

$$l_5 = 1.67, \quad \lambda_5 = 1.816 - 0.089i, \quad \lambda_6 = 1.816 + 0.089i, \quad l_6 = 1.916$$

$$l_7 = 2.901, \quad \lambda_7 = 2.919 - 0.046i, \quad \lambda_8 = 2.919 + 0.046i, \quad l_8 = 2.932$$

$$l_9 = 3.497, \quad \lambda_9 = 3.498.$$

Графики многочленов $y_N(\mu)$ и $v_N(\mu)$ приведены в правой части рис. 4. Заметим, что в данном случае $y_N(0) = 0.126$.

3.2 Выводы. Приведем несколько утверждений, которые следуют из анализа многочисленных примеров, однако теоретически не доказаны. Обозначим через l_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$) собственные значения оператора L , расположенные в порядке возрастания, $0 < l_0 < l_1 < \dots < l_{N-1}$. Пусть λ_k – собственные значения оператора A , расположенные в порядке возрастания их действительных частей, $0 = \lambda_0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_{N-1}$. Предположим, что число $b > 0$ является общей верхней границей собственных значений оператора L и вещественных частей собственных значений оператора A , то есть $l_{N-1} < b$, $\operatorname{Re} \lambda_{N-1} < b$. Можно положить $b = \max\{l_{N-1}, \operatorname{Re} \lambda_{N-1}\}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $y_N(0) > 0$. Тогда правее точки $\mu = b$ характеристические многочлены $y_N(\mu)$ и $v_N(\mu)$ сохраняют знак (именно, отрицательный для нечетного N и положительный для четного N).

Нас будут интересовать интервалы отрезка $0 \leq \mu \leq b$, на которых характеристический многочлен $y_N(\mu)$ принимает положительные значения. Нетрудно видеть (см. например, рис. 2 и рис. 3), что таковыми являются интервалы

- $(0, l_0)$, (l_{2k-1}, l_{2k}) , $k = 1, 2, \dots, (N-1)/2$, если N нечетное,
- $(0, l_0)$, (l_{2k-1}, l_{2k}) , $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$, (l_{N-1}, b) ,
если N четное.

Справедливы следующие утверждения, относящиеся к расположению собственных значений λ_k оператора A .

1. В приграничном сегменте $[0, l_0]$ содержится только одно собственное значение $\lambda_0 = 0$.
2. Если N четно, то имеется только одно собственное значение λ_{N-1} , для которого $l_{N-1} < \operatorname{Re} \lambda_{N-1} < b$.
3. Для каждого $k = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ при нечетном N и $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ при четном N имеется два и только два собственных значения λ_{2k-1} и λ_{2k} таких, что $l_{2k-1} < \operatorname{Re} \lambda_{2k-1} \leq \operatorname{Re} \lambda_{2k} < l_{2k}$.

По поводу Утверждения 2 заметим, что во всех рассмотренных примерах число λ_{N-1} оказалось вещественным и незначительно отличающимся от l_{N-1} . Утверждение 3 нуждается в детализации. А именно, можно указать,

когда два собственных значения λ_{2k-1} и λ_{2k} являются вещественными и различными числами, когда $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k}$ – двукратное вещественное собственное значение и, наконец, когда они составляют комплексно сопряженную пару. Для этого обозначим через $\mu_{2k} \in (l_{2k-1}, l_{2k})$ точку максимума характеристического многочлена $y_N(\mu)$, расположенную между корнями l_{2k-1} и l_{2k} . Здесь, как и ранее, $k = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ при нечетном N и $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ при четном N . Обозначим также $Y_{2k} = y_N(\mu_{2k})$. Тогда

- Если $Y_{2k} > y_N(0)$, то собственные значения λ_{2k-1} и λ_{2k} вещественные и различные.
- Если $Y_{2k} = y_N(0)$, то $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k}$ – двукратное вещественное собственное значение.
- Если $Y_{2k} < y_N(0)$, то λ_{2k-1} и λ_{2k} – комплексно сопряженная пара собственных значений, причем $l_{2k-1} < \text{Re } \lambda_{2k-1} < \text{Re } \lambda_{2k} < l_{2k}$.

4. Приближенное вычисление собственных значений матрицы A .

4.1. Внутренние корни многочлена $v_N(\mu)$. Предполагая известными собственные значения l_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$) оператора L , приведем формулы приближенного вычисления собственных значений оператора A .

Зафиксируем номер k (как и прежде, $k = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ при нечетном N и $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ при четном N) и найдем приближенное выражение для тех собственных значений оператора A , вещественные части которых расположены на интервале $l_{2k-1} < \mu < l_{2k}$. Для этого аппроксимируем на сегменте $[l_{2k-1}, l_{2k}]$ многочлен $v_N(\mu)$ параболой.

Обозначим через $\mu_{2k} = 0.5(l_{2k-1} + l_{2k})$ среднюю точку отрезка $[l_{2k-1}, l_{2k}]$. Пусть $Y_{2k} = y_N(\mu_{2k})$. Построим квадратный трехчлен $V(\mu) = a\mu^2 + b\mu + c$, для которого

$$V(l_{2k-1}) = v_N(l_{2k-1}), \quad V(l_{2k}) = v_N(l_{2k}), \quad V(\mu_{2k}) = v_N(\mu_{2k}). \quad (11)$$

Правые части этих уравнений легко вычисляются. Действительно,

$$v_N(l_{2k-1}) = y_N(l_{2k-1}) - y_N(0) = -y_N(0),$$

$$v_N(l_{2k}) = y_N(l_{2k}) - y_N(0) = -y_N(0).$$

Кроме того, $v_N(\mu_{2k}) = y_N(\mu_{2k}) - y_N(0) = Y_{2k} - y_N(0)$. Значения $y_N(0)$ и $y_N(\mu_{2k})$ находятся с помощью рекуррентных соотношений (6). Обозначая $y_N(0) = Y_0$, запишем требования (11) в виде системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
al_{2k-1}^2 + bl_{2k-1} + c &= -Y_0, & al_{2k}^2 + bl_{2k} + c &= -Y_0, \\
a\mu_{2k}^2 + b\mu_{2k} + c &= Y_{2k} - Y_0
\end{aligned}
\tag{12}$$

относительно искомым коэффициентов a , b и c . Отсюда находим

$$\begin{aligned}
a &= \frac{-Y_{2k}}{(\mu_{2k} - l_{2k-1})(l_{2k} - \mu_{2k})}, & b &= \frac{(l_{2k-1} + l_{2k})Y_{2k}}{(\mu_{2k} - l_{2k-1})(l_{2k} - \mu_{2k})}, \\
c &= \frac{-[(\mu_{2k} - l_{2k-1})(l_{2k} - \mu_{2k})Y_0 + l_{2k-1}l_{2k}Y_{2k}]}{(\mu_{2k} - l_{2k-1})(l_{2k} - \mu_{2k})},
\end{aligned}
\tag{13}$$

следовательно

$$(\mu_{2k} - l_{2k-1})(l_{2k} - \mu_{2k})V(\mu) = -Y_{2k}\mu^2 + (l_{2k-1} + l_{2k})Y_{2k}\mu - [(\mu_{2k} - l_{2k-1})(l_{2k} - \mu_{2k})Y_0 + l_{2k-1}l_{2k}Y_{2k}].
\tag{14}$$

Корни $v_{2k-1}^{(0)}$ и $v_{2k}^{(0)}$ многочлена (14) будем рассматривать как начальные приближения к искомым корням v_{2k-1} и v_{2k} многочлена $v_N(\mu)$, вещественные части которых расположены между l_{2k-1} и l_{2k} . Точность, полученная на этой начальной стадии обычно невысока. Поэтому целесообразно уточнить найденные начальные приближения, например, с помощью итерационного метода Ньютона.

Иллюстрируем предложенный алгоритм следующим примером.

Пример 5. Рассмотрим те же матрицы A и L , что и в примере 2. Точные (до трех знаков) собственные значения λ_{2k-1} , λ_{2k} матрицы A указаны в таблице 1. Покажем теперь, как строятся соответствующие приближенные значения v_{2k-1} и v_{2k} . Полагая $k=1$, получим $l_1 = 0.421$, $l_2 = 1.007$, $\mu_2 = 0.714$, $Y_0 = 1.02$, $Y_2 = 0.689$, $(\mu_{2k} - l_1)(l_2 - \mu_2) = 0.086$. Вычисления по формулам (13) дают $a = -8.036$, $b = 11.427$, $c = -4.426$. Корнями многочлена $V(\mu)$ являются числа $v_{1,2}^{(0)} = 0.714 \pm 0.203i$. Итерационное уточнение приводит к значениям $v_{1,2} = 0.671 \pm 0.174i$, которые совпадают (по крайней мере с тремя знаками) с точными значениями λ_1 и λ_2 . В дальнейшем результаты подобных вычислений будем резюмировать в виде таблицы

$$\begin{aligned}
k=1 \quad v_1^{(0)} &= 0.714 - 0.203i, & v_2^{(0)} &= 0.714 + 0.203i \\
v_1 &= 0.671 - 0.174i, & v_2 &= 0.671 + 0.174i \\
\lambda_1 &= 0.671 - 0.174i, & \lambda_2 &= 0.671 + 0.174i.
\end{aligned}$$

Как видим, здесь найдены удачные начальные приближения и в результате достигнута удовлетворительная точность. Ситуация ухудшается в случае $k=2$, когда многочлен $v_7(\mu, x)$ имеет кратный корень. Приведем соответствующую таблицу.

$$\begin{aligned}
k=2 \quad v_3^{(0)} &= 2.028 - 0.047i, & v_4^{(0)} &= 2.028 + 0.047i \\
v_3 &= 2.066 - 5.673 \cdot 10^{-3}i, & v_4 &= 2.066 + 5.673 \cdot 10^{-3}i \\
\lambda_3 &= 2.071, & \lambda_4 &= 2.071.
\end{aligned}$$

Начальное приближение содержит мнимую компоненту, которая в результате итераций уменьшается, но остается значительной. Подобный результат вряд ли можно признать удовлетворительным. В примере 6 предлагается несколько иная процедура вычисления начального приближения, пригодная и в случае кратных корней.

В заключение примера 5 приведем результаты вычисления пары корней, расположенных между точками $l_5 = 3.208$ и $l_6 = 3.789$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned}
k=3 \quad v_5^{(0)} &= 3.243, & v_6^{(0)} &= 3.753 \\
v_5 &= 3.276, & v_6 &= 3.77 \\
\lambda_5 &= 3.276, & \lambda_6 &= 3.77.
\end{aligned}$$

4.2. Кратный корень. При наличии кратных корней можно использовать процедуру, описанную в следующем примере.

Пример 6. Рассматриваем по-прежнему задачу из примера 2. С помощью рекуррентных соотношений (6) построим многочлен $f(\mu, x) = d v_7(\mu, x) / d\mu$ и затем найдем его нули $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_6$. Напомним, что $d v_7(\mu, x) / d\mu \equiv d y_7(\mu, x) / d\mu$. Здесь через μ_j обозначен корень многочлена $f(\mu, x)$, удовлетворяющий условию $l_{j-1} < \mu < l_j$, $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$. При такой нумерации точки μ_{2k-1} являются точками минимума многочленов $y_7(\mu, x)$ и $v_7(\mu, x)$, а точки μ_{2k} — точками максимума, $k=1, 2, 3 = 0.5(N-1)$ (см. рис. 2). Приведем таблицу значений $Y_{2k} = y_7(\mu_{2k}, x)$ многочлена $y_7(\mu, x)$ в точках максимума.

Табл. 2: Значения многочлена $y_7(\mu, x)$ в точках максимума

k	1	2	3
μ_{2k}	0.682	2.07073795452	3.588
Y_{2k}	0.699	1.02029086695	5.036

Заметим, что $Y_0 = y_7(0, x) = 1.02029086695$. Из приведенной таблицы видно, что в точке максимума $\mu = \mu_4$ ($k = 2$) с большой точностью выполнено равенство $Y_{2k} = Y_0$. Тем самым, в точке $\mu = \mu_4$ обращается в нуль как многочлен $v_7(\mu, x)$, так и его производная $d v_7(\mu, x)/d\mu$, то есть $\mu = \mu_4 = 2.071$ является кратным корнем многочлена $v_7(\mu, x)$.

К тому же результату придем в результате применения видоизмененного алгоритма из примера 5. Изменение состоит в том, что в формулах (12) при $k = 2$ в качестве $\mu = \mu_4$ возьмем не середину отрезка $[l_3, l_4]$, а указанную точку максимума и, кроме того, положим $Y_4 = y_7(\mu_4, x)$. При этом корнями многочлена $V(\mu) = a\mu^2 + b\mu + c$ станут действительные числа $v_3^{(0)} = 1.98545391447$, $v_4^{(0)} = 2.07073795449$.

Итерационное уточнение начального приближения $v_3^{(0)}$ приводит к значению $v_3 = 2.07073795332$, а начального приближения $v_4^{(0)}$ – к значению $v_4 = 2.06070521969$. Если же применить итерации к многочлену $v_7(\mu, x)/(\mu - v_3)$, то получим $v_4 = 2.07074026891$. Итак, в случае кратного корня получили

$$k = 2 \quad v_3^{(0)} = 1.98545391447, \quad v_4^{(0)} = 2.07073795449$$

$$v_3 = 2.07073795332, \quad v_4 = 2.07074026891$$

$$\lambda_3 = 2.07073938202, \quad \lambda_4 = 2.07073938202.$$

Округляя до трех знаков, приходим к следующей таблице.

$$k = 2 \quad v_3^{(0)} = 1.985, \quad v_4^{(0)} = 2.071$$

$$v_3 = 2.071, \quad v_4 = 2.071$$

$$\lambda_3 = 2.071, \quad \lambda_4 = 2.071.$$

4.3. Граничный корень многочлена $v_N(\mu)$. В случае четного N многочлен $v_N(\mu)$ имеет корень λ_{N-1} , расположенный несколько правее максимального собственного значения l_{N-1} матрицы L (см. рис. 3). В этом случае описанная в примерах 5 и 6 процедура построения начального приближения невозможна. Однако можно воспользоваться тем обстоятельством, что λ_{N-1} мало отличается от l_{N-1} и взять l_{N-1} в качестве начального приближения.

Пример 7. Рассмотрим ту же задачу, что и в примере 3, а именно

$$N = 6, \quad a_i = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad a_6 = x \approx 0.66.$$

Полагая $v_5^{(0)} = l_5 = 3.735$ и проводя итерации по Ньютону, получим $v_5 = 3.775$, что совпадает с собственным значением λ_5 .

Пример 8. Пусть $N = 10$ и коэффициенты a_i заданы как в примере 4 (см. рис. 4). Для приближенного определения собственных значений матрицы A воспользуемся алгоритмом, изложенным в разделе 4.1.

Найденные таким образом корни содержатся в следующих таблицах.

$$\begin{array}{l}
 k = 1 \quad v_1^{(0)} = 0.22 \quad v_2^{(0)} = 0.469 \quad k = 2 \quad v_3^{(0)} = 0.968 - 0.174i \quad v_4^{(0)} = 0.968 + 0.174i \\
 \quad \quad v_1 = 0.203 \quad v_2 = 0.427 \quad \quad \quad v_3 = 0.98 - 0.15i \quad v_4 = 0.98 + 0.15i \\
 \quad \quad \lambda_1 = 0.203 \quad \lambda_2 = 0.428 \quad \quad \quad \lambda_3 = 0.981 - 0.15i \quad \lambda_4 = 0.981 + 0.15i \\
 k = 3 \quad v_5^{(0)} = 1.793 - 0.097i \quad v_6^{(0)} = 1.793 + 0.097i \\
 \quad \quad v_5 = 1.816 - 0.089i \quad v_6 = 1.816 + 0.089i \\
 \quad \quad \lambda_5 = 1.816 - 0.089i \quad \lambda_6 = 1.816 + 0.089i \\
 k = 4 \quad v_7^{(0)} = 2.916 - 0.047i \quad v_8^{(0)} = 2.916 + 0.047i \quad k = 5 \quad v_9^{(0)} = 3.497 \\
 \quad \quad v_7 = 2.919 - 0.046i \quad v_8 = 2.919 + 0.046i \quad \quad \quad v_9 = 3.498 \\
 \quad \quad \lambda_7 = 2.919 - 0.046i \quad \lambda_8 = 2.919 + 0.046i \quad \quad \quad \lambda_9 = 3.498.
 \end{array}$$

Литература

1. *Ионкин Н. И.* Разностные схемы для одной неклассической задачи // Вестн. Моск. унив., сер.15, выч. матем. и киб., 1977, № 2, с. 20–32.
2. *Ионкин Н. И.* Задача для уравнения теплопроводности с неклассическим (нелокальным) краевым условием. – Будапешт: Numerikus Modzerek, 1979, препринт № 14, 70 с.
3. *Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А.* Устойчивость нелокальных разностных схем.– М.: Издательство ЛКИ, 2008, 320 с.
4. *Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А.* Разностные схемы

для нестационарных нелокальных задач. – М.: МАКС Пресс, Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010, 272 с.

5. *Ионкин Н. И., Валикова Е. А.* Принцип максимума для одной нелокальной несамосопряженной краевой задачи // Дифференц. уравнения, 1995, т. 31, № 7, с. 1232 – 1239.
6. *Ионкин Н. И., Валикова Е. А.* О собственных значениях и собственных функциях одной неклассической краевой задачи // Математическое моделирование, 1996, т.8, № 1, с. 53–63.
7. *Ионкин Н. И., Зидов Н.* Устойчивость в C разностных схем для одной неклассической задачи // Вестн. Моск. ун-та., сер.15, выч. матем. и киб., 1982, № 1, с. 8–16.
8. *Ионкин Н. И., Макаров В. Л., Фурлетов Д.Г.* Устойчивость и сходимость в C -норме разностных схем для параболического уравнения с нелокальным краевым условием //Математическое моделирование, 1992, т.4, № 4, с. 63–73.
9. *Алиханов А. А.* Нелокальные краевые задачи в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц. уравнения, 2008, т 44, № 7, с. 924 – 931.
10. *Алиханов А. А.* Об устойчивости и сходимости нелокальных разностных схем // Дифференц. уравнения, 2010, т 46, № 7, с. 942 – 954.
11. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. Изд. 3, – М.: Наука, 1989, 616 с.
12. *Годунов С. К.* Решение систем линейных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1980.
13. *Ильин В. П., Кузнецов Ю. И.* Трехдиагональные матрицы и их приложения. – М.: Наука, Физматгиз, 1985, 208 с.
14. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970, 564 с.