А. С. Ильинский[1], *И. С. Полянский*[2], *Д. Е. Степанов*[3],

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЭКРАНАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Введение

Значительная часть исследований в области электродинамики посвящена решению трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах [1–5 и др.]. В настоящее время известен ряд асимптотических [2, 3, 6 и др.] и численных [4, 5, 7 и др.] методов моделирования подобных дифракционных процессов. Достоинство асимптотических методов состоит в невысоких вычислительных и емкостных затратах, недостаток – относительно низкая универсальность в решении задач дифракции на экранах произвольной формы и, в ряде случаев, сравнительно невысокая точность. Численные методы, с учетом стремительного развития средств вычислительной техники, позволяют нивелировать недостатки асимптотических. Как правило, основу современных численных методов составляют проекционные методы – метод Б. Г. Галёркина и его модификации. Основной этап эффективного применения проекционных методов состоит в формировании набора базисных функций, которые должны удовлетворять граничным условиям и образовывать полную систему. Большинство исследований [4, 5, 7, 18, 20 и др.] предполагает составление базисных функций с использованием сеточной аппроксимации искомой на поверхности экрана плотности тока. Недостаток подобного решения состоит в низкой вычислительной эффективности реализуемой численной схемы. Выбор сеточной аппроксимации приводит к системам линейных уравнений высокого порядка. С целью повышения эффективности приближенного метода в работах [8–12] для численного решения различных типов задач электродинамики [8, 10–12] и частной задачи теории упругости [9]

[1]Профессор кафедры математической физики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: celd@cs.msu.ru.

[2]Сотрудник Академии ФСО России, e-mail: van341@mail.ru.

[3]Сотрудник Академии ФСО России, e-mail: stepbystep000@ya.ru.

предложен барицентрический метод (БМ). Его преимущество заключается в формировании глобальной системы базисных функций (без разбиения области анализа на элементарные подобласти). Основное допущение БМ состоит в том, что граница области анализа является кусочно-линейной.

Цель настоящей статьи заключается в расширении применимости БМ и уточнении особенностей его реализации в численном решении задач дифракции электромагнитных волн на экранах произвольной формы.

Постановка задачи

Введем обозначение $\mathscr{M}$ — замкнутая связная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$ класса C^∞. Пусть $\overline{S} \subset \mathscr{M}$ — подмногообразие с краем многообразия $\mathscr{M}$, не обязательно связное, с конечным числом компонент связности, каждая из которых имеет размерность два [1]; ∂S — кусочно-линейная кривая без точек самопересечения. Тогда согласно [1, 5] постановка задачи дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля E^0, H^0 на бесконечно тонком идеально проводящем экране произвольной формы $S = \overline{S} \backslash \partial S$ в среде с постоянными электромагнитными параметрами (ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, σ — удельная проводимость) сводится к определению рассеянного электромагнитного поля

$$E, H \in C^2\left(\mathbb{R}^3 \backslash \overline{S}\right) \bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{\mathscr{M}_+} \backslash \partial S_\delta\right) \bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{\mathscr{M}_-} \backslash \partial S_\delta\right), \tag{1}$$

удовлетворяющего [1]

$$\begin{gathered} \nabla \times H = -i\beta E, \\ \nabla \times E = i\beta H,\ x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{S}; \end{gathered} \tag{2а}$$

$$E_\tau|_S = E_\tau^0|_S; \tag{2б}$$

$$E_\tau^0|_S \in C^\infty\left(\overline{S}\right);\ E, H \in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right); \tag{2в}$$

$$\begin{gathered} E, H = o\left(r^{-1}\right),\ r := |x| \to \infty \text{ при } \mathrm{Im}\beta > 0; \\ H \times e_r - E = o\left(r^{-1}\right),\ E \times e_r + H = o\left(r^{-1}\right), \\ E, H = O\left(r^{-1}\right),\ r \to \infty \text{ при } \mathrm{Im}\beta = 0, \end{gathered} \tag{2г}$$

где $\mathscr{M}_+$ и $\mathscr{M}_-$ — внешность и внутренность поверхности $\mathscr{M}$ соответственно; $e_r = x/|x|$; $\beta^2 = \omega^2\mu\left[\varepsilon + i\sigma\omega^{-1}\right]$, $\mathrm{Im}\beta \geq 0$, $\beta \neq 0$; $S_\delta = \{x : |x-y| < \delta,\ y \in S\}$; $\delta > 0$; индекс τ обозначает тангенциальную составляющую поля на S.

Доказательство существования и единственности решения задачи (1), (2) известно из [1], которая при представлении рассеянных полей E, H векторным потенциалом сводится к интегро-дифференциальному уравнению вида:

$$\mathscr{L}u = f, \tag{3}$$

где $\mathscr{L}u=\nabla\mathscr{A}(\nabla\cdot u)+\beta^2\mathscr{A}u$; $f=i\beta E_\tau^0|_S$; u имеет смысл плотности тока на S; $\mathscr{A}$ — интегральный оператор

$$\mathscr{A}u=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|}u(y)\,dy,\ x\in S. \qquad (4)$$

Решение интегрального уравнения (3) предлагается определять численно в проекционной постановки метода Галёркина при разложении неизвестной функции u по базису [15, с. 279]:

$$u^{\mathscr{M}}(x)=\sum_{j=0}^{\mathscr{M}}c_j\psi_j(x) \qquad (5)$$

с последующим сведением (3) к системе уравнений относительно неопределенных коэффициентов разложения c_j $\left(j=\overline{0,\mathscr{M}}\right)$ при выдвижении требования ортогональности невязки $\mathscr{N}(x)=\mathscr{L}\left[\sum\limits_{j=0}^{\mathscr{M}}c_j\psi_j(x)\right]-f(x)$ к базисным функциям $\psi_i(x)$:

$$\int\limits_S\mathscr{N}(x)\,\psi_j(x)\,dx=0. \qquad (6)$$

Эффективность решения (3) существенным образом зависит от рациональности выбора набора $\psi_j(x)$ для S, которые удовлетворяют граничным условиям u вблизи ∂S [13, с. 54]. Для ее количественной оценки по аналогии с [1] определим пространство Соболева $H^s(\mathscr{M})$ как пополнение $C^\infty(\mathscr{M})$ по норме $\|\cdot\|_s$, положив для любого $s\in\mathbb{R}$:

$$H^s(S):=\left\{u\big|_S : u\in H^s(\mathscr{M})\right\};$$
$$\tilde{H}^s\left(\overline{S}\right):=\left\{u\in H^s(\mathscr{M}) : \operatorname{supp}u\subset\overline{S}\right\},$$

где $\tilde{H}^s(S)$ получается замыканием $C_0^\infty(S)$ по норме $\|\cdot\|_s$.

Также в соответствии с [1] определим гильбертово пространство $W=W\left(\overline{S}\right):=\left\{u\in\tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{S}\right) : \nabla\cdot u\in\tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{S}\right)\right\}$ как пополнение $C_0^\infty(S)$ по норме $\|\cdot\|_W$:

$$\|u\|_W^2=\|u\|_{-1/2}^2+\|\nabla\cdot u\|_{-1/2}^2,$$

со скалярным произведением

$$(u,v)_W=(u,v)_{-1/2}+(\nabla\cdot u,\nabla\cdot v)_{-1/2}=$$
$$=\int_{\mathbb{R}_2}\langle\xi\rangle^{-1}\hat{u}(\xi)\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi+\int_{\mathbb{R}_2}\langle\xi\rangle^{-1}(\xi\cdot\hat{u}(\xi))\left(\xi\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\right)d\xi,$$

где $\langle\xi\rangle:=\sqrt{1+|\xi|^2}$; $|\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2$; $\xi\in\mathbb{R}^2$; $\hat{u}$ — преобразование Фурье распределения u [20].

Приняв обозначение $W'=\left(W\left(\overline{S}\right)\right)'$ — аддитивное к W пространство, имеем [1]:

$$W'=\left\{f\big|_S : f\in\tilde{H}^{-1/2}(\mathscr{M}),\nabla_\tau\times f\in\tilde{H}^{-1/2}(\mathscr{M})\right\},$$

где $f=i\beta E_\tau^0|_S$ из (3) ($\mathscr{L}:W\to W'$); ∇_τ — операция «поверхностного ротора» [18].

Порядок выбора набора базисных функций

Рациональность выбора набора базисных функций в методе Галёркина сводится к заданию глобальной [16, с. 98] для S полной системы базисных функций $\psi_j(x) \in C(S)$. При решении задачи дифракции на проводящих тонких экранах барицентрическим методом [11] формирование $\psi_j(x)$ выполняется при определении следующих представлений.

Пусть граница ∂S экрана лежит в плоскости $x_3 = 0$, ∂S — замкнутая несамопересекающаяся ломаная линия, которая ограничивает область Ω, являющейся проекцией экрана S на плоскость $x_3 = 0$. Либо S — плоский экран в плоскости $x_3 = 0$. Выбор базиса происходит на плоскости.

Введем параметризацию $\partial S = \partial\Omega = \bigcup\limits_{n=0}^{N-1} \Gamma_n$, $\Gamma_n = \{e_n t + P_n,\ t \in [0,1]\}$, $e_n = P_{n+1 \mod N} - P_n$, $\{P_0, P_1, ..., P_{N-1}\}$ — множество неповторяющихся вершин Ω $(P_n = (x_1^n, x_2^n))$. Для точки $\{x_1, x_2, 0\} \in \Omega$ кривизна экрана S характеризуется орт-вектором нормали $\nu^0(x)$ в $x \in S$. Для Ω определим барицентрические координаты (БК) ζ_n.

Определение 1. Барицентрическими координатами ζ_n назовем набор $\vec{\zeta} = (\zeta_n)_N$ функций $\zeta_n(x) \in [0,1]$ $(x \in \Omega)$, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \Delta\zeta_n(x) = 0,\ x \in \Omega; \\ \zeta_n(x) = t,\ x \in \Gamma_{n-1};\ \zeta_n(x) = 1 - t,\ x \in \Gamma_n; \\ \zeta_n(x) = 0,\ x \in \partial\Omega \backslash \{\Gamma_{n-1}, \Gamma_n\}. \end{gathered} \tag{7}$$

Решение задачи (7) предложено в [14] и при построении Ω на $\mathbb{C}$ состоит в задании ζ_n приближенно-аналитическим соотношением

$$\tilde{\zeta}_n^K(x) = \frac{-1}{\pi} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K} \sqrt{2k+1} \operatorname{Im}\left[Q_k \left(2\frac{x - P_{n'}}{e_{n'}} - 1 \right) \right] X_{n'k}^n, \tag{8}$$

обладающим полиномиальной скоростью сходимости вблизи угловых точек P_n

$$\begin{gathered} \left\| \zeta_n(x) - \tilde{\zeta}_n^K(x) \right\|_C \le \\ \le \mathrm{const} \max_{n' = \overline{0, N-1}} \left\{ \frac{2\varpi_{n'}^{-1} |e_{n'}|^2 (4\pi - \alpha_{n'})}{\left| \overline{P_{n'}} |e_{n'}|^2 - \overline{e_{n'}} \operatorname{Re}\left(e_{n'} \overline{P_{n'}}\right) \right|} \right\} \left(\frac{1}{K+0{,}5} + \frac{1}{K+1{,}5} \right) \end{gathered} \tag{9}$$

и экспоненциальной во всей области анализа в среднем

$$\left\| \zeta_n(x) - \tilde{\zeta}_n^K(x) \right\|_{L_2} \le \frac{\mathrm{const} K 2^{-K}}{(2K+1)\sqrt{2K+3}}. \tag{10}$$

В выражениях (8)—(10) приняты следующие обозначения: const — независящая от K постоянная; $\varpi_{n'} = \min\left\{ \Theta_{n'}, \pi(\pi + |\pi - \alpha_{n'}|)^{-1} \right\}$; $\Theta_{n'} = \begin{cases} |\sin\alpha_{n'}|, & \alpha_{n'} \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \alpha_{n'} \in [\pi/2, \pi) \cup (\pi, 3\pi/2]. \end{cases}$; $\alpha_{n'}$ — внутренний угол Ω

при вершине $P_{n'}$; $\vec{X}^n = (\mathbf{E}+\mathbf{T})^{-1}\vec{U}^n$ — блочный вектор размера $\tilde{N} = N(K+1)$, составленный из элементов $X^n_{n'k}$; $\mathbf{E}$ — единичная матрица размера $\tilde{N}\times\tilde{N}$; $\vec{U}^n$ — блочный вектор размера $\tilde{N}$, составленный из элементов

$$U^n_{n'k} = \begin{cases} 1,\ (n=n' \vee n=n'-1)\wedge k=0, \\ -1/3,\ n=n' \wedge k=1, \\ 1/3,\ n=n'-1 \wedge k=1, \\ 0,\ \text{otherwise}; \end{cases}$$

$\mathbf{T}$ — блочная матрица размера $\tilde{N}\times\tilde{N}$, состоящая из элементов

$$T^{nn'}_{kk'} = \frac{-1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{Im}\left[Q_{k'}\left(\frac{e_n}{e_{n'}}\tau + \frac{e_n+2(P_n-P_{n'})}{e_{n'}} - 1\right)\right] L_k(\tau)\,d\tau, \qquad (11)$$

где $L_k(\tau)$ и $Q_k(z)$ — многочлены Лежандра первого и второго рода соответственно [17]:

$$L_0(\tau) = 1;\ L_1(\tau) = \tau;\ L_k(\tau) = \frac{2k-1}{k}\tau L_{k-1}(\tau) - \frac{k-1}{k}L_{k-2}(\tau);$$
$$Q_0(z) = \mathrm{arcth}(z);\ Q_1(z) = z\,\mathrm{arcth}(z) - 1;$$
$$Q_k(z) = \frac{2k-1}{k}zQ_{k-1}(z) - \frac{k-1}{k}Q_{k-2}(z),\ \tau\in[-1,1];\ z\in\mathbb{C}.$$

Интеграл (11) может быть вычислен аналитически по правилам, представленным в [12, 14], или численно по квадратурному методу Гаусса–Лежандра.

Введем множество мультииндексов [8]:

$$\tilde{\mathbb{M}}_p = \left\{\tilde{j} = \left(\tilde{j}_0, \tilde{j}_1, \ldots, \tilde{j}_n, \ldots, \tilde{j}_{N-1}\right) : \tilde{j}_n \in \mathbb{Z}_+, \sum_{n\in[0;N-1]} \tilde{j}_n = p\right\},$$

где $p\in\mathbb{N}$; $\left\|\tilde{\mathbb{M}}_p\right\| = \binom{N+p-1}{N-1} = \binom{N+p-1}{p}$; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$.

По аналогии с [27] определим дискретное множество точек $x^{\tilde{j}} \in \tilde{\mathbb{X}}_p$, $x^{\tilde{j}} = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \varsigma^{\tilde{j}}_n P_n$; $\varsigma^{\tilde{j}}_n = \frac{\tilde{j}_n}{p}$ — $\tilde{j}$-е узловые точки интерполяции. Обозначим подмножество $\overline{\mathbb{X}}_p \subset \tilde{\mathbb{X}}_p$, для любых элементов которого выполняются условия $x^{\overline{j}} \in \overline{\Omega}$ и $x^{\overline{j}} \neq x^{\overline{j}'}$ при $\overline{j} \neq \overline{j}'$, где $\overline{j}, \overline{j}' \in \overline{\mathbb{M}}_p$; $\overline{\mathbb{M}}_p \subset \tilde{\mathbb{M}}_p$. Также введем в рассмотрение подмножество $\mathbb{X}_p \subset \overline{\mathbb{X}}_p$, элементы $x^j \in \mathbb{X}_p$ которого $x^j \notin \partial\Omega$, где $j\in\mathbb{M}_p$; $\mathbb{M}_p \subset \overline{\mathbb{M}}_p$.

Учитывая заданные представления, базис для (5) сформируем из двух типов функций $\psi^h_{\overline{j}}(x)$, $\psi^e_j(x)$ $\left(\overline{j}\in\overline{\mathbb{M}}_p\ j\in\mathbb{M}_p\right)$:

$$\begin{aligned} \psi^h_{\overline{j}}(x) &= -\nu^0(x) \times \sum_{\overline{j}'\in\overline{\mathbb{M}}_p} a^h_{\overline{j}\overline{j}'} \nabla'_2 \varphi_{\overline{j}'}(x); \\ \psi^e_j(x) &= \nu^0(x) \times \sum_{j'\in\mathbb{M}_p} a^e_{jj'} \nabla_2 \varphi_{j'}(x), \end{aligned} \qquad (12)$$

где $\nabla_2' = \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_1},\ 0 \right\}$; $\nabla_2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ 0 \right\}$; $\varphi_{\overline{j}'}(x) = p! \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta_n(x)]^{\overline{j}'_n}}{\overline{j}'_n!}$; $a^h_{\overline{j}\overline{j}'}$ — $\overline{j}'$-е элементы $\overline{j}$-го собственного вектора матрицы $\mathbf{A}^h = \left[\mathbf{B}^h\right]^{-1} \mathbf{C}^h$ при $\mathbf{B}^h = \left(B^h_{\overline{j}\overline{j}'} \right)_{|\overline{\mathbb{M}}_p| \times |\overline{\mathbb{M}}_p|}$, $\mathbf{C}^h = \left(C^h_{\overline{j}\overline{j}'} \right)_{|\overline{\mathbb{M}}_p| \times |\overline{\mathbb{M}}_p|}$ для $B^h_{\overline{j}\overline{j}'} = \int_\Omega \varphi_{\overline{j}}(x)\,\varphi_{\overline{j}'}(x)dx$, $C^h_{\overline{j}\overline{j}'} = -\int_\Omega \nabla\varphi_{\overline{j}}(x)\,\nabla\varphi_{\overline{j}'}(x)dx$; $a^e_{jj'}$ — j'-е элементы j-го собственного вектора матрицы $\mathbf{A}^e = [\mathbf{B}^e]^{-1}\mathbf{C}^e$ при $\mathbf{B}^e = \left(B^e_{jj'} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$, $\mathbf{C}^e = \left(C^e_{jj'} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$ для $B^e_{jj'} = \int_\Omega \varphi_j(x)\,\varphi_{j'}(x)dx$, $C^e_{jj'} = -\int_\Omega \nabla\varphi_j(x)\,\nabla\varphi_{j'}(x)dx$. Здесь и далее предполагается, что нумерация j-х ($\overline{j}$-х) собственных векторов выполняется в порядке возрастания соответствующих им собственных чисел матриц $\mathbf{A}^{(h,e)}$.

Существование и единственность решения и оценка сходимости барицентрического метода

При определении базисных функций по правилам (12) и принимая обозначения $\overline{\mathscr{M}} = \left\| \overline{\mathbb{M}}_p \right\|$; $\mathscr{M} = \left\| \mathbb{M}_p \right\|$; $W_{\mathscr{M}} = \operatorname{span}\left\{ \psi^h_1, \ldots, \psi^h_{\overline{\mathscr{M}}}, \psi^e_1, \ldots, \psi^e_{\mathscr{M}} \right\}$; $f = i\beta E^0_\tau|_S$, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть*

$$u^{\mathscr{M}}(x) = \sum_{\overline{j} \in \overline{\mathbb{M}}_p} c^h_{\overline{j}} \psi^h_{\overline{j}}(x) + \sum_{j \in \mathbb{M}_p} c^e_j \psi^e_j(x), \tag{13}$$

тогда метод Галёркина для уравнения электрического поля (3) *сходится и справедлива оценка*

$$\left\| u^{\mathscr{M}} - u \right\|_W \leq C_2 \left(\frac{C_1 h}{\sqrt{p-1}} + \frac{1}{p} \right), \tag{14}$$

где C_1, C_2 — независящие от p положительные постоянные; $h = \frac{1}{2} \max_{n_1, n_2 \in [0; N-1]} |P_{n_1} - P_{n_2}|$.

Доказательство. С учетом заданных правил построения S и характеристики его кривизны через $\nu^0(x)$ для (12) справедливо перейти к решению задачи дифракции на плоском экране ($\Omega = S$), при этом

$$\psi^h_{\overline{j}}(x) = \sum_{\overline{j}' \in \overline{\mathbb{M}}_p} a^h_{\overline{j}\overline{j}'} \nabla_2 \varphi_{\overline{j}'}(x);\ \psi^e_j(x) = \sum_{j' \in \mathbb{M}_p} a^e_{jj'} \nabla'_2 \varphi_{j'}(x). \tag{15}$$

Известно, что оператор $\mathscr{L}$ является инъективным и эллиптическим на подпространствах для $\mathrm{Im}\beta \geq 0$, $\beta \neq 0$. Последнее в соответствии с [18] устанавливает сходимость метода Галеркина для оператора $\mathscr{L}$ в (3) задачи (1), (2). Тогда для существования и единственности решения (13) достаточно показать для $\forall \delta > 0$, $\exists \mathscr{M}_\delta \in \mathbb{N} : \forall \mathscr{M} \geq \mathscr{M}_\delta$, $\forall x \in \Omega$

выполнение неравенства

$$\left|u^{\mathscr{M}}-u\right|<\delta \tag{16}$$

при соблюдении для $\psi_{\bar{j}}^{h}(x)$, $\psi_{j}^{e}(x)$ условий вблизи $\partial\Omega$ [13, с. 54].

Справедливость выполнения граничных условий для $\psi_{\bar{j}}^{h}(x)$ и $\psi_{j}^{e}(x)$ с учетом того, что всякое поле (в рассматриваемом случае магнитное) можно представить при помощи двух скалярных функций (магнитной φ^h и электрической φ^e функций Боргиса [28]), следует из правила определения коэффициентов $a_{\bar{j}\bar{j}'}^{h}$ и $a_{jj'}^{e}$. Они формируются при решении соответствующих задач Неймана и Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta\varphi^h+\chi\varphi^h=0; \\ \left.\frac{\partial\varphi^h}{\partial\varsigma}\right|_{\partial\Omega}=0; \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi^e+\chi\varphi^e=0; \\ \left.\varphi^e\right|_{\partial\Omega}=0, \end{cases} \tag{18}$$

где ς обозначает внешнюю единичную нормаль к $\partial\Omega$.

Следуя обозначениям (12) решение (17) и (18) выполняется БМ [8, 27] при определении приближений $\overline{\varphi}_{\bar{j}}^{h}=\sum_{\bar{j}'\in\overline{\mathbb{M}}_p}a_{\bar{j}\bar{j}'}^{h}\varphi_{\bar{j}'}(x)$, $\overline{\varphi}_{j}^{e}=\sum_{j'\in\mathbb{M}_p}a_{jj'}^{e}\varphi_{\bar{j}}(x)$ соответствующих собственных функций $\varphi_{\bar{j}}^{h}$, φ_{j}^{e}. В этом случае с применением первой теоремы Грина (17), (18) в проекционной постановке сводятся к известной задаче на собственные числа и собственные векторы матриц $\mathbf{A}^h$, $\mathbf{A}^e$. Доказательства сходимости БМ в решении задач Неймана и Дирихле для уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^2$ известны из [27].

Определим $\chi_{j}^{(h,e)}$ — собственные значения задач (17), (18). Здесь и далее обозначая собственные значения $\chi_{j}^{(h,e)}$ и функции $\varphi_{j}^{(h,e)}$ будем полагать, что для магнитной составляющей $j\in\overline{\mathbb{M}}_p$, а для электрической $j\in\mathbb{M}_p$. Принимая во внимание результаты теорем 2 и 3 из [27], модифицированную оценку теоремы 1 из [29, с. 412], которая справедлива для самосопряженного оператора, оценку леммы 1 из [30], для j-х собственных функций (17), (18) установим справедливость неравенства

$$\left\|\overline{\varphi}_{j}^{(h,e)}-\varphi_{j}^{(h,e)}\right\|_{C}\le A_1\chi_{j}^{(h,e)}\left(\frac{C_1h}{\sqrt{p-1}}+\frac{1}{p}\right), \tag{19}$$

где A_1 — некоторая констант, независящая от p.

Из [31, с. 86] известно, что $\chi_{j}^{(h,e)}\le\overline{\chi}_{j}^{(h,e)}$, где $\overline{\chi}_{j}^{(h,e)}$ — собственные значения, соответствующие приближенным решениям $\overline{\varphi}_{j}^{(h,e)}$ задач (17), (18). Учитывая последнее, окончательно получим

$$\left\|\overline{\varphi}_{j}^{(h,e)}-\varphi_{j}^{(h,e)}\right\|_{C}\le A_1\overline{\chi}_{j}^{(h,e)}\left(\frac{C_1h}{\sqrt{p-1}}+\frac{1}{p}\right). \tag{20}$$

Основываясь на результатах [19, 27], определим оценку

$$\left\| u - u^{\mathscr{M}} \right\|_C \le \delta_0 \left(1 + \|\mathscr{P}_{\mathscr{M}}\|_C\right) \inf_{f^{\mathscr{M}} \in W_{\mathscr{M}}} \left| f - f^{\mathscr{M}} \right|, \qquad (21)$$

где $\mathscr{P}_{\mathscr{M}}$ — проекционный оператор; $W_{\mathscr{M}} \subset W$; δ_0 — независящая от $\mathscr{M}$ константа; $f^{\mathscr{M}}(x) = \sum\limits_{\overline{j} \in \overline{\mathbb{M}}_p} f^h_{\overline{j}} \overline{\psi}^h_{\overline{j}}(x) + \sum\limits_{j \in \mathbb{M}_p} f^e_j \overline{\psi}^e_j(x)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ коэффициентами $f^{(h,e)}_j = \frac{1}{\overline{\chi}^{(h,e)}_j} \int\limits_{\Omega} \overline{\psi}^{(h,e)}_j(x) f(x)\, dx$.

Поскольку вложение $L_s\left(\overline{S}\right) \subset \tilde{H}^{-1/2}$ непрерывно при $4/3 < s < 2$ [20, 21], то $\|v\|_{-1/2} \le C\|v\|_s$, где $v \in L_s(S)$. Если $v \in C\left(\overline{S}\right)$, то $\|v\|_s \le \mathrm{mes}^{1/s} S \|v\|_C$. Отсюда в соответствии с [18] для u справедливо

$$\|u\|_W \le C_0 \max\left(\|u_1\|_C, \|u_2\|_C, \|\nabla \cdot u\|_C\right),$$

где $C_0 := C\sqrt{3}\mathrm{mes}^{1/s} S$.

Из определения собственных значений и функций для (17), (18) справедливо тождество $\Delta\varphi^{(h,e)}_j = \left(\chi^{(e,h)}_j - 1\right) \varphi^{(h,e)}_j$, из которого с учетом (15) следует

$$\nabla \cdot \psi^h_{\overline{j}}(x) = \sum_{\overline{j}' \in \overline{\mathbb{M}}_p} a^h_{\overline{j}\overline{j}'} \left(\chi^h_{\overline{j}} - 1\right) \varphi_{\overline{j}'}(x);\ \nabla \cdot \psi^e_j(x) = 0. \qquad (22)$$

Опираясь на результаты лемм 1 и 2 из [27], теоремы 2 из [29], теоремы 2 из [28], оценку (20), определение f (см. пп. 2, выражение (2в)) и соотношений (21), (22) получим

$$\left\| f - f^{\mathscr{M}} \right\|_W \le C_0 A_1 \max_{\substack{|m|=l,\, l \in [1;2] \\ k \in [1;2]}} \sup_{x \in \overline{S}} \left| D^l_m f_k \right| \left(\frac{C_1 h}{\sqrt{p-1}} + \frac{1}{p} \right), \qquad (23)$$

где $m = \{m_1, m_2\}$ — мультииндекс; $D^l_m = \frac{\partial^l}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}}$.

Неравенство (23) для (13) с учетом (21) устанавливает сходимость метода Галёркина для уравнения электрического поля (3).

При определении $C_2 := \tilde{C}_0 C_0 A_1 \max\limits_{\substack{|m|=l,\, l \in [1;2] \\ k \in [1;2]}} \sup\limits_{x \in \overline{S}} \left| D^l_m f_k \right|$, учитывая (21)–(23) и следуя [22, с. 192], получим

$$\left\| u^{\mathscr{M}} - u \right\|_W \le \tilde{C}_0 \inf_{\gamma \in W_{\mathscr{M}}} \|\gamma - u\|_W \le C_2 \left(\frac{C_1 h}{\sqrt{p-1}} + \frac{1}{p} \right), \qquad (24)$$

оценку сходимости, соответствующую (14). Теорема 1 доказана. □

Особенности алгоритмической реализации барицентрического метода и тестовые примеры

Установленное правило задания базисных функций в барицентрическом методе с учетом известных свойств дифференциальных операторов и преобразований из [1, с. 105–107] в проекционной постановке метода Галёркина сводит задачу (3) к формированию системы линейных алгебраических уравнений ($\bar{j} \in \overline{\mathbb{M}}_p$, $j \in \mathbb{M}_p$):

$$\sum_{\bar{j}' \in \overline{\mathbb{M}}_p} c^h_{\bar{j}'} \left({}^1G^{hh}_{\bar{j}\bar{j}'} + {}^2G^{hh}_{\bar{j}\bar{j}'} \right) + \sum_{j' \in \mathbb{M}_p} c^e_{j'} {}^2G^{eh}_{\bar{j}j'} = F^h_{\bar{j}};$$
$$\sum_{\bar{j}' \in \overline{\mathbb{M}}_p} c^h_{\bar{j}'} {}^2G^{he}_{j\bar{j}'} + \sum_{j' \in \mathbb{M}_p} c^e_{j'} {}^2G^{ee}_{jj'} = F^e_{j}, \tag{25}$$

где

$$F^h_{\bar{j}} = 4\pi \int_S f(x)\, \psi^h_{\bar{j}}(x)\, dx; \; F^e_j = 4\pi \int_S f(x)\, \psi^e_j(x)\, dx;$$
$${}^1G^{hh}_{\bar{j}\bar{j}'} = \int_S \nabla \cdot \psi^h_{\bar{j}}(x) \int_S \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} \nabla \cdot \psi^h_{\bar{j}'}(y) dy dx;$$
$${}^2G^{hh}_{\bar{j}\bar{j}'} = -\beta^2 \int_S \psi^h_{\bar{j}}(x) \int_S \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} \psi^h_{\bar{j}'}(y) dy dx; \tag{26}$$
$${}^2G^{he}_{j\bar{j}'} = -\beta^2 \int_S \psi^e_{j}(x) \int_S \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} \psi^h_{\bar{j}'}(y) dy dx;$$
$${}^2G^{ee}_{jj'} = -\beta^2 \int_S \psi^e_{j}(x) \int_S \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} \psi^e_{j'}(y) dy dx.$$

Элементы $F^{(h,e)}_j$, ${}^{(1,2)}G^{hh}_{\bar{j}\bar{j}'}$, ${}^2G^{(eh,he)}_{jj'}$, ${}^2G^{ee}_{jj'}$ уравнений (25) определяются при применении в (26) известных процедур численного интегрирования [23], предполагающих разбиение S на M треугольных элементов $\mathscr{T}^{\langle m \rangle}$ $\left(m = \overline{0, M-1}\right)$ при построении триангуляции Делоне, в основу формирования которой заложен алгоритм продвигаемого фронта [24], и задания в $\mathscr{T}^{\langle m \rangle}$ двух пар узловых точек интегрирования $x^{mk} = \left(x^{mk}_1, x^{mk}_2, x^{mk}_3\right) \in \mathscr{T}^{\langle m \rangle}$ и $\tilde{x}^{mk'} = \left(\tilde{x}^{mk'}_1, \tilde{x}^{mk'}_2, \tilde{x}^{mk'}_3\right) \in \mathscr{T}^{\langle m \rangle}$ ($k = \overline{0, K}$; $k' = \overline{0, K-1}$):

$$F^{(h,e)}_j = 4\pi \sum_{m=0}^{M-1} S^{\Delta}_m \int_{\mathscr{T}^{\langle m \rangle}} f(x)\, \psi^{(h,e)}_j(x)\, D(x)\, dx \approx$$
$$\approx 4\pi \sum_{m=0}^{M-1} S^{\Delta}_m \sum_{k=0}^{K} f\left(x^{mk}\right) \psi^{(h,e)}_j\left(x^{mk}\right) D\left(x^{mk}\right) w_k;$$

$$
{}^{1}G^{hh}_{\bar{j}\bar{j}'} = \sum_{m=0}^{M-1} S^{\Delta}_{m} \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m\rangle}} \nabla\cdot\psi^{h}_{\bar{j}}(x) D(x) \sum_{m'=0}^{M-1} S^{\Delta}_{m'} \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m'\rangle}} \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} \nabla\cdot\psi^{h}_{\bar{j}'}(y) D(y)\, dy dx \approx
$$

$$
\approx \sum_{m=0}^{M-1} S^{\Delta}_{m} \sum_{k=0}^{K} \nabla\cdot\psi^{h}_{\bar{j}}\left(x^{mk}\right) D\left(x^{mk}\right) w_k \cdot
$$

$$
\sum_{m'=0}^{M-1} S^{\Delta}_{m'} \sum_{k'=0}^{K-1} \frac{e^{i\beta\left|x^{mk}-\tilde{x}^{m'k'}\right|}}{\left|x^{mk}-\tilde{x}^{m'k'}\right|} \nabla\cdot\psi^{h}_{\bar{j}'}\left(\tilde{x}^{m'k'}\right) D\left(\tilde{x}^{m'k'}\right) \tilde{w}_{k'};
$$

$$
{}^{2}G^{hh}_{\bar{j}\bar{j}'} = -\beta^2 \sum_{m=0}^{M-1} S^{\Delta}_{m} \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m\rangle}} \psi^{h}_{\bar{j}}(x) D(x) \sum_{m'=0}^{M-1} S^{\Delta}_{m'} \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m'\rangle}} \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} \psi^{h}_{\bar{j}'}(y) D(y)\, dy dx \approx
$$

$$
\approx -\beta^2 \sum_{m=0}^{M-1} S^{\Delta}_{m} \sum_{k=0}^{K} \psi^{h}_{\bar{j}}\left(x^{mk}\right) D\left(x^{mk}\right) w_k \cdot
$$

$$
\sum_{m'=0}^{M-1} S^{\Delta}_{m'} \sum_{k'=0}^{K-1} \frac{e^{i\beta\left|x^{mk}-\tilde{x}^{m'k'}\right|}}{\left|x^{mk}-\tilde{x}^{m'k'}\right|} \psi^{h}_{\bar{j}'}\left(\tilde{x}^{m'k'}\right) D\left(\tilde{x}^{m'k'}\right) \tilde{w}_{k'},
$$

где S^{Δ}_{m} — площадь $\mathscr{T}^{\langle m\rangle}$; $D(x) = \sqrt{1+\left(\frac{\partial Z(x)}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial Z(x)}{\partial x_2}\right)^2}$; $Z(x)$ — функция, характеризующая форму S; $\tilde{x}^{m'k'}$ задаются через нули многочлена Чебышева, а x^{mk} — через нули многочлена Лежандра при определении соответствующих им $\tilde{w}_{k'}$, w_k весовым коэффициентам интегрирования [25].

Разделение положения точек интегрирования $\tilde{x}^{m'k'}$ и x^{mk} позволяет исключить появление сингулярности в случае, когда $\mathscr{T}^{\langle m\rangle}$ и $\mathscr{T}^{\langle m'\rangle}$ являются смежными. Если $m = m'$ для исключения ситуации деления на нуль предлагается при вычислении

$$
{}^{1}G^{m}_{jj'} = \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m\rangle}} \nabla\cdot\psi_{j}(x) D(x) \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m\rangle}} \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} \nabla\cdot\psi_{j'}(y) D(y)\, dy dx;
$$

$$
{}^{2}G^{m}_{jj'} = \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m\rangle}} \psi_{j}(x) D(x) \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m\rangle}} \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} \psi_{j'}(y) D(y)\, dy dx,
$$

преобразовывать интеграл по dy в локальную относительно $\mathscr{T}^{\langle m\rangle}$ полярную систему координат с центром в x [26]. В таком представлении получим:

$$^{1}G_{jj'}^{m} = \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m\rangle}} \nabla\cdot\psi_j(x)D(x)\sum_{l=0}^{2}\int\limits_{\varphi_l^m}^{\varphi_{l_1}^m}\int\limits_{0}^{r_l(\varphi)} e^{i\beta\rho}\nabla\cdot\psi_{j'}(y(\varphi,\rho))D(y(\varphi,\rho))\,d\rho d\varphi dx;$$

$$^{2}G_{jj'}^{m} = \int\limits_{\mathscr{T}^{\langle m\rangle}} \psi_j(x)D(x)\sum_{l=0}^{2}\int\limits_{\varphi_l^m}^{\varphi_{l_1}^m}\int\limits_{0}^{r_l(\varphi)} e^{i\beta\rho}\psi_{j'}(y(\varphi,\rho))D(y(\varphi,\rho))\,d\rho d\varphi dx,$$

где $\varphi_l^m = \operatorname{arctg}\left[\left(x_2^{ml}-x_2\right)/\left(x_1^{ml}-x_1\right)\right]$; $y(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi + x_1, \rho\sin\varphi + x_2, Z) \in S$; $r_l(\varphi) = R_l'/\cos(\varphi-\varphi_l)$; $\varphi_l = \operatorname{arctg}\left[\left(x_2'^{ml}-x_2\right)/\left(x_1'^{ml}-x_1\right)\right]$; $x'^{ml} = \left(\frac{b_l^m d_l^m - a_l^m c_l^m}{(a_l^m)^2+(b_l^m)^2}, \frac{-a_l^m d_l^m - b_l^m c_l^m}{(a_l^m)^2+(b_l^m)^2}\right)$; $a_l^m = x_2^{ml_1} - x_2^{ml}$; $b_l^m = x_1^{ml_1} - x_1^{ml}$; $c_l^m = x_1^{ml_1}x_2^{ml} - x_2^{ml_1}x_1^{ml}$; $d_l^m = b_l^m x_1 - a_l^m x_2$; $l_1 = l+1 \mod 3$; $R_l' = \left|x'^{ml} - x\right|$; $x^{ml} = \left(x_1^{ml}, x_2^{ml}\right)$ — l-я вершина m-го треугольника $\mathscr{T}^{\langle m\rangle}$.

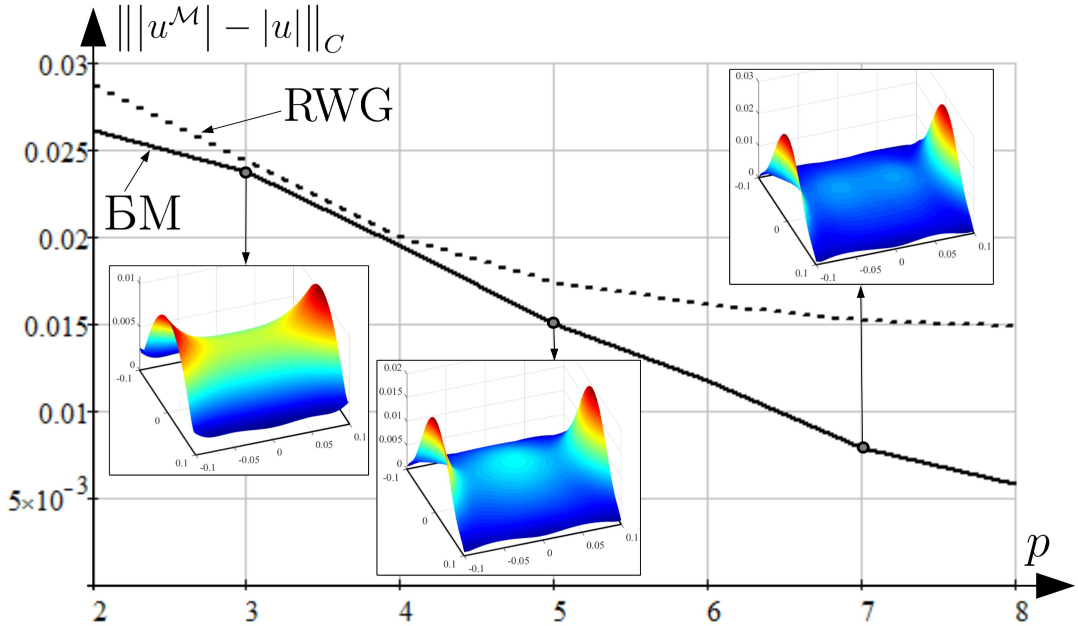

Рис. 1. Зависимость $\left\||u^{\mathscr{M}}| - |u|\right\|_C$ от p при расчете u на прямоугольном экране $\lambda\times\lambda$ БМ и методом RWG

Для наглядной демонстрации предпочтительности применения БМ в численном решении задач дифракции на проводящих тонких экранах произвольной формы в сравнении с известными методами [4, 20, 26], предполагающими аппроксимацию u базисными функциями RWG, в САПР Mathcad проведены расчеты для двух тестовых задач. Первая состоит в определении u на плоском бесконечно тонком и идеально проводящем прямоугольном экране размера $\lambda\times\lambda$ (λ – длина волны). Вторая тестовая задача заключается в определении u на поверхности плоского бесконечно тонкого и идеально проводящего экрана, заданного пятью вершинами: $P_0 = (\lambda,\lambda,0)$, $P_1 = (-\lambda,\lambda,0)$, $P_2 = (-1,5\lambda,-1,25\lambda,0)$,

$P_3 = (0, -0,25\lambda, 0)$, $P_4 = (2\lambda, -\lambda, 0)$. Возбуждение u в тестовых задачах выполняется плоской электромагнитной волной $E^0 = (1,0,0)$. Апостериорная оценка сходимости БМ проведена при изменении p. При этом число базисных функций RWG для фиксированного p и Ω задавалось равным $\left\|\overline{\mathbb{M}}_p\right\|$. На рисунках 1 и 2 приведены результаты ошибки расчета модуля плотности тока $|u| = \left|\sqrt{u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + u_3\bar{u}_3}\right|$ на S для первой тестовой задачи БМ и методом RWG от p по нормам $\left\|\left|u^{\mathscr{M}}\right| - |u|\right\|_C = \max\limits_{x \in S}\left|\left|u^{\mathscr{M}}(x)\right| - |u(x)|\right|$ и $\left\|\left|u^{\mathscr{M}}\right| - |u|\right\|_{L_2} = \left(\int\limits_S \left(\left|u^{\mathscr{M}}(x)\right| - \right.\right.$ $\left.\left. - |u(x)|\right)^2 dx\right)^{1/2}$ соответственно. На рисунках 3 и 4 приведены результаты ошибки расчета $|u|$ на S для второй тестовой задачи БМ и методом RWG от p по аналогичным нормам.

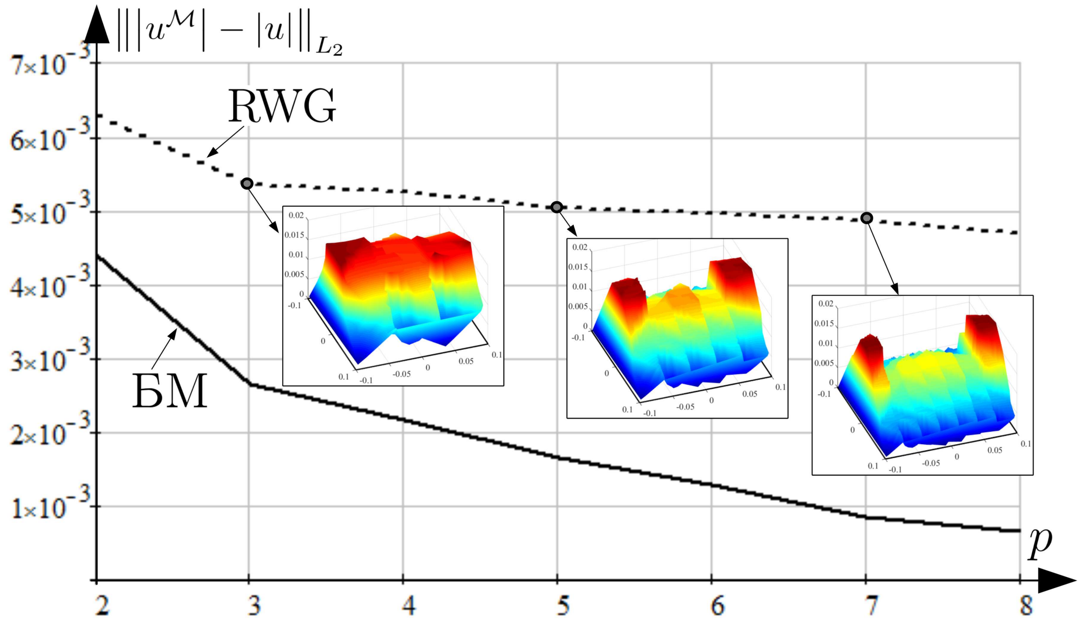

Рис. 2. Зависимость $\left\|\left|u^{\mathscr{M}}\right| - |u|\right\|_{L_2}$ от p при расчете u на прямоугольном экране $\lambda \times \lambda$ БМ и методом RWG

Заключение

В целом, сформированное решение (13) задачи (3) дифракции электромагнитных волн на экранах произвольной формы барицентрическим методом и установленная апостериорная оценка сходимости (14), с учетом представленных результатов тестовых расчетов (рис. 1–4), определяют предпочтительность БМ в сравнении с известными сеточными методами. Указанные особенности алгоритмической реализации составляют правила корректного численного вычисления интегралов вида (26). Для повышения вычислительной устойчивости при определении элементов ${}^1G_{\overline{jj'}}^{hh}$ следует при расчете $\nabla \cdot \psi_{\overline{j}}^h$ использовать

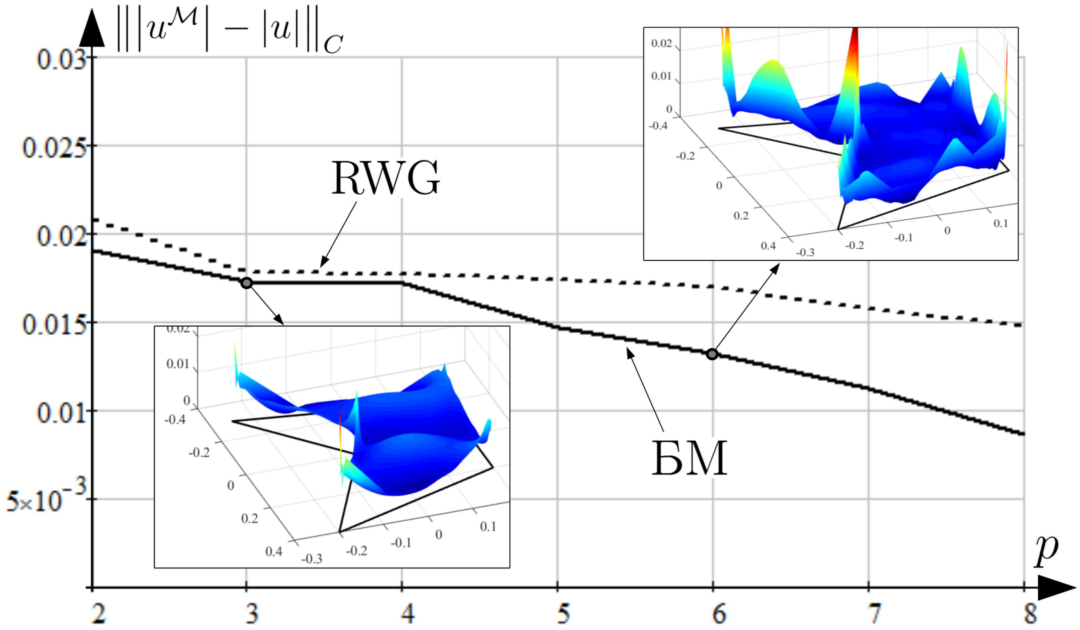

Рис. 3. Зависимость $\left\| |u^{\mathscr{M}}| - |u| \right\|_C$ от p при расчете u на экране сложной формы БМ и методом RWG

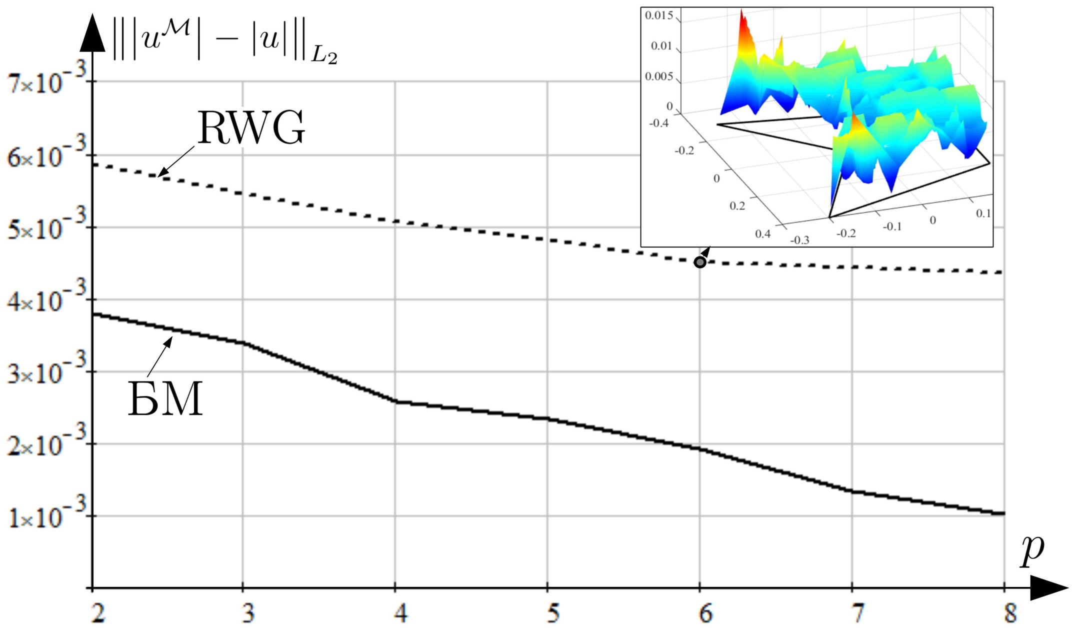

Рис. 4. Зависимость $\left\| |u^{\mathscr{M}}| - |u| \right\|_{L_2}$ от p при расчете u на экране сложной формы БМ и методом RWG

тождество (22). С целью снижения вычислительных затрат алгоритмической реализации при определении матриц $\mathbf{A}^h$ и $\mathbf{A}^e$ необходимо уточнять правила чередования элементов $\overline{j}$ и j множеств мультииндексов $\overline{\mathbb{M}}_p$ и $\mathbb{M}_p$, учитывая тот факт, что все элементы матриц $\mathbf{B}^e$, $\mathbf{C}^e$ входят в состав соответствующих матриц $\mathbf{B}^h$, $\mathbf{C}^h$.

Литература

1. *Ilyinsky A. S., Smirnov Y. G.* Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens, VPS, Utrecht, The Netherlands, 1998.

2. *Ufimtsev P. Ya.* Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction. Second edition., John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2014. – 329 p.

3. *Kouyoumjian R. G., Pathak P. H.* A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface // Proceedings of the IEEE – 1974. — Volume: 62, Issue: 11. – P. 1448–1461.

4. *Gibson W. C.* The method of moments in electromagnetics: second Edition. – N.-Y.: Chapman and Hall/CRC, 2014. – 450 p.

5. *Смирнов Ю. Г., Медведик М. Ю., Максимова М. А.* Решение задачи дифракции электромагнитной волны на экранах сложной формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – №4 (24). – С. 59–72.

6. *Assier R. C., Shanin A. V.* Diffraction by a quarter–plane. Analytical continuation of spectral functions // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 2019. – V. 72. – P. 51–85.

7. *Kyurkchan A. G., Smirnova N. I.* Mathematical modeling in diffraction theory. 1st Edition. – 280 p.

8. *Полянский И. С.* Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. – Орёл : Академия ФСО Росии, 2017. – 148 с.

9. *Полянский И. С.* Барицентрический метод в задаче оптимального управления формой отражающей поверхности зеркальной антенны // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. №11. С. 140–150.

10. *Полянский И. С.* Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике // Труды СПИИРАН. 2017. № 2(51). С. 206–222.

11. *Полянский И. С., Пехов Ю. С.* Барицентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн // Труды СПИИРАН. 2017. № 5(54). С. 244–262.

12. *Полянский И. С.* О применении барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. № 3(21). С. 36–42.

13. *Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. Пер. с англ. под общ. ред. Г.Д. Малюжница. – Москва : Мир, 1964. – 428 с.

14. *Ильинский А. С., Полянский И. С.* Приближенный метод определения гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. №3(59). С. 38–55.

15. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Изд. 3-е. – Москва : Гостехиздат, 1950. – 695 с.

16. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галёркина. Пер. с англ. – Москва : Мир, 1988. – 352 с.

17. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. Изд. 2-е перераб. – Москва : Гостехиздат, 1954. – 327 с.

18. *Смирнов Ю. Г.* О сходимости методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и о решении уравнения электрического поля // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. №1(47). С. 129–139.

19. *Даугавет И. К.* Теория приближенных методов. Линейные уравнения. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб : БХВ-Петербург, 2006. – 288 с.

20. *Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г.* Эллиптичность интегрального уравнения электрического поля для поглащающих сред и сходимость метода Рао–Уилтона–Глиссона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. №1(54). С. 105–113.

21. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – Москва : Мир, 1980. – 664 с.

22. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва : Наука, 1969. – 455 с.

23. *Архипов Н. С., Полянский И. С., Степанов Д. Е.* Представление отражающих поверхностей антенной системы в задачах анализа и синтеза зеркальных антенн методами физической оптики // Телекоммуникации. 2014. №7. С. 15–21.

24. *Василевский Ю. В., Данилов А. А., Липников К. Н., Чугунов В. Н.* Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. – Москва : ФизМатЛит, 2016. – 216 с.

25. *Taylor M. A., Wingate B. A., Bos L. P.* Several new quadrature formulas for polynomial integration in the triangle, Report-no: SAND2005-0034J, http://xyz.lanl.gov/format/math.NA/0501496.

26. *Cai W., Yijun Yu., Yuan X. C.* Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering // International journal for numerical methods in engineering. 2002. vol. 53. P. 31–47.

27. *Ильинский А. С., Полянский И. С., Степанов Д. Е.* О сходимости барицентрического метода в решении внутренних задач Дирихле и Неймана в $\mathbb{R}^2$ для уравнения Гельмгольца // Вестник удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. №1.

28. *Малых М. Д.* О нормальных модах закрытого волновода с разрывным заполнением // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. 2018. Т. 26, № 4. С. 321–330.

29. *Вайникко Г. М.* Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в проблеме собственных значений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. №3(4). С. 405–425.

30. *Самарский А. А., Тихонов А. Н.* О возбуждении радиоволноводов. I // Журнал технической физики. – 1947. – Т. 17, № 11. – С. 1283–1296.

31. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д., Панин А. А.* Двусторонние оценки собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа и их применение в задачах математической теории волноводов // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. – 2009. – Т. 10. – С. 83–93.