Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Актуарная математика**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические методы обработки информации и принятия решений**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу и линейной алгебре в объеме, соответствующем программе первого года обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки» (или отсутствуют).

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1.фундаментальные понятия и законы теории вероятностей, случайных процессов, математической статистики;

2. современные проблемы соответствующих разделов страхового дела;

3.понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла актуарной математики;

4. основные свойства соответствующих математических моделей;

**Уметь:**

1. понять поставленную задачу;

2. использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач актуарной математики;

3. самостоятельно находить алгоритмы решения задач актуарной математики, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;

4. самостоятельно видеть следствия полученных результатов;

5. точно представить математические знания в области актуарной математики в устной и письменной форме.

**Владеть:**

1. навыками освоения большого объема информации и решения задач актуарной математики;

2. навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов актуарной математики;

3.культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов актуарной математики;

4. предметным языком актуарной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

**4.** Формат обучения: лекции и семинарские занятия проводятся с использованием меловой доски, при проведении контрольных работ применяется компьютерная диалоговая система контроля знаний «Наставник».

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 4 з.е., в том числе 72 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы** |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
| 1.Страхование и полезность. Модели краткосрочного страхования. Изучаются нелинейные модели страхования с различными функциями полезности (степенные, квадратичные, экспоненциальные). Франшизы и страхования эксцедента убытка. Теорема Эрроу об оптимальном страховании. | **9** | 6 | 0 | **6** | **3** |
| 2.Модели краткосрочного страхования. Случайные величины, описывающие индивидуальные риски. Распределение суммы случайных величин. Приближения для распределения суммы страховых выплат. Примеры решения задач страхования портфелей рисков. | **9** | 6 | 0 | **6** | **3** |
| 3.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1 | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 4.Таблицы продолжительности жизни (таблицы смертности). Функции дожития. Остаточное время жизни страхователя. Интенсивность смертности. Связь данных из таблиц продолжительности жизни с функцией дожития. Примеры таблиц продолжительности жизни. Интерполяции функций дожития с помощью данных из таблиц продолжительности жизни. Аналитические законы для интенсивности смертности. Таблицы отбора (селекционные) и заключительные таблицы. | **8** | 6 | 0 | **6** | **2** |
| 5.Модели долгосрочного страхования. Основы теории дисконтирования. Разовые нетто – премии. Страховые договоры с выплатами в момент смерти (непрерывные модели). Пожизненное страхование, временн***о***е страхование, страхование на дожитие, смешанное страхование. Страховые договоры с выплатами в конце года смерти (дискретные модели). Связь разовых нетто – премий в непрерывных и дискретных моделях. Дифференциальные уравнения для разовых премий в непрерывных моделях. Коммутационные функции. | **12** | 8 | 0 | **8** | **4** |
| 6.Модели перестрахования. Изучаются типы перестрахования в том числе и крупных рисков. Исследуются связанные с перестрахованием задачи многокритериальной оптимизации | **8** | 6 | 0 | **6** | **2** |
| 7.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2 | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| **Промежуточная аттестация: устный экзамен** | **18** | **0** | **0** | **0** | **18** |
| 8. Аннуитеты и регулярные премии.Аннуитеты как частный случай потоков платежей. Непрерывные аннуитеты. Дискретные аннуитеты пренумерандо и постнумерандо. Аннуитеты с кратными годовыми выплатами. Вычисление аннуитетов с помощью коммутационных функций. Вычисление регулярных нетто – премий с помощью разовых нетто – премий и аннуитетов. Непрерывные и дискретные модели. Регулярные премии, выплачиваемые несколько раз в год. Корректирующие и накопительные платежи. | **12** | 8 | 0 | **8** | **4** |
| 9.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 3 | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 10.Теория страховых резервов. Перспективные и ретроспективные резервы. Резервы в непрерывных, дискретных и полунепрерывных моделях. Резервы в случае регулярных премий, выплачиваемых несколько раз в год. Резервы для страховых договоров общего вида. Рекуррентные формулы для резервов в дискретных моделях. Распределение риска по годам. Теорема Хэттендорфа. Дифференциальные уравнения Тиле для нетто – резервов в непрерывных моделях. Премия, нагруженная на издержки. Резервы нагруженных на издержки премий. | **12** | 8 | 0 | **8** | **4** |
| 11.Страхование с кратными декрементами. Модель. Интенсивность декремента. Округленная продолжительность жизни. Общий тип страхования. Резервы нетто – премий. Непрерывная модель | **12** | 8 | 0 | **8** | **4** |
| 12.Страхование нескольких лиц. Состояние совместной жизни нескольких лиц. Состояние выживание последнего. Общее симметрическое состояние жизни нескольких лиц. Формулы Шуэтта и Несбитта. Асимметричные аннуитеты и страхования. | **12** | 8 | 0 | **8** | **4** |
| 13.Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 4 | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| **Аттестация: устный экзамен** | **16** | **0** | **0** | **0** | **16** |
| **Итого** | **144** | **72** | **0** | **72** | **72** |

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

|  |  |
| --- | --- |
| Контрольная работа № 1 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| Страхователь (25) заключил договор пожизненной ренты, выплачиваемой *непрерывно* с интенсивностью 100. В предположении, что интенсивность смертности постоянна и равна 0.01, и норма процентного дохода 0.04, определить  А) Разовую нетто-премию такого договора;  Б) Дисперсию величины потерь страховой компании по такому договору;  В) Вероятность не отрицательности потерь;  Г) При условии, что 900 человек заключили описанный выше договор, вычислить относительную страховую надбавку, обеспечивающую отрицательность суммарных потерь страховой компании с вероятностью не меньшей 0.975. Воспользоваться центральной предельной теоремой. Для нормального распределения квантиль . | Страхователь (22) заключил договор пожизненной ренты, выплачиваемой *непрерывно* с интенсивностью 10. В предположении, что интенсивность смертности постоянна и равна 0.02, и норма процентного дохода 0.03, определить  А) Разовую нетто-премию такого договора;  Б) Дисперсию величины потерь страховой компании по такому договору;  В) Вероятность не отрицательности потерь;  Г) При условии, что 400 человек заключили описанный выше договор, вычислить относительную страховую надбавку, обеспечивающую отрицательность суммарных потерь страховой компании с вероятностью не меньшей 0.99. Воспользоваться центральной предельной теоремой. Для нормального распределения квантиль . |
| Контрольная работа № 2 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. В предположении, что интенсивность смертности постоянна и равна 0,01, вычислить вероятность того, что человек возраста 20 лет доживет до 70 лет, но не доживет до 75 лет.  2. Пусть функция выживания равна . Вычислить интенсивность смертности в 30-летнем возрасте и среднюю продолжительность жизни человека.  3. Пусть продолжительность жизни описывается формулой де Муавра с предельным возрастом =100 лет, норма процентного дохода =0,15. Вычислить разовую нетто-премию для человека в возрасте 20 лет , если он заключил договор пожизненного страхования, отсроченного на 3 года.  4.Страховая компания заключила 900 договоров, по которым страхователю выплачивается 300000 руб. в случае его смерти в течение года. Вероятность такого события 0,01. Определить абсолютную и относительную страховую надбавку, обеспечивающую вероятность не разорения компании 96%.  (). | 1. В предположении, что интенсивность смертности постоянна и равна 0,01, вычислить вероятность того, что человек возраста 20 лет доживет до 75 лет, но не доживет до 80 лет.  2. Пусть функция выживания равна . Вычислить интенсивность смертности в 40-летнем возрасте и среднюю продолжительность жизни человека.  3. Пусть продолжительность жизни описывается формулой де Муавра с предельным возрастом =100 лет, норма процентного дохода =0,15. Вычислить разовую нетто-премию для человека в возрасте 20 лет , если он заключил договор пожизненного страхования с непрерывно увеличивающейся страховой суммой.  4. Страховая компания заключила 1600 договоров, по которым страхователю выплачивается 400000 руб. в случае его смерти в течение года. Вероятность такого события 0,0625. Определить абсолютную и относительную страховую надбавку, обеспечивающую вероятность не разорения компании 97%. (). |
| Контрольная работа № 3 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1.В предположении, что интенсивность смертности постоянна и равна , а норма процентного дохода равна  вычислить :  а) величину пожизненной ренты для (55), выплачиваемой непрерывно с интенсивностью 1;  б) среднеквадратичное отклонение случайной величины ;  в) вероятность того, что .  2.В предположении о том, что вычислить нетто-премию для пожизненного страхования  и дисперсию потерь страховщика , если учетная ставка d=0,5.  3. Страховая компания приняла на себя обязательство выплачивать ежегодно 150000 рабочему (х) , который получил производственную травму.  Выплаты начинаются немедленно и производятся раз в год, пока рабочий жив. После того, как страховщик выплатит 500000, оставшиеся платежи производит перестраховочная компания. Известно, что    Найдите актуарную приведённую величину обязательств перестраховщика, если . | 1.В предположении, что интенсивность смертности постоянна и равна 0,05, а норма процентного дохода равна 0,05 вычислить :  а) величину пожизненной ренты для (60), выплачиваемой непрерывно с интенсивностью 1;  б) среднеквадратичное отклонение случайной величины ;  в) вероятность того, что .  2. В предположении о том, что вычислить нетто-премию для пожизненного страхования  и дисперсию потерь страховщика , если учетная ставка d=0,2.  3. Страховая компания приняла на себя обязательство выплачивать ежегодно 150000 рабочему (х) , который получил производственную травму. Выплаты начинаются немедленно и производятся раз в год пока рабочий жив. После того, как страховщик выплатит 500000, оставшиеся платежи производит перестраховочная компания. Известно, что    Найдите актуарную приведённую величину обязательств перестраховщика, если . |
| Контрольная работа № 4 | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 1. Группа страхователей (20), (25), (26) заключила со страховой компанией договор следующего содержания:   а) страховщик платит группе непрерывный аннуитет интенсивности 6 до первой смерти в группе;  б) страховщик платит оставшимся членам группы непрерывный аннуитет интенсивности 2 до второй смерти в группе;  в) страховщик платит оставшемуся члену группы непрерывный аннуитет интенсивности 1 до его смерти.  Определить разовую нетто-премию, которую следует заплатить страхователям за такой полис. Считать, что интенсивности смерти членов группы постоянны и равны , а норма процентного дохода  **2.** Группа страхователей (50), (40) заключила со страховой компанией договор следующего содержания:  а) если первым умрет (50), то страховая компания заплатит оставшемуся 1000 в момент смерти компаньона;  б) если первым умрет (40), то страховая компания заплатит оставшемуся 2000 в момент смерти компаньона.;  Определить разовую нетто-премию, которую следует заплатить страхователям за такой полис. Считать, что интенсивности смерти страхователей подчиняются закону Гомпертца. Для первого страхователя  ,  а интенсивность смерти второго страхователя  .  Норма процентного дохода . | **1.**Группа страхователей (20), (25), (27) заключила со страховой компанией договор следующего содержания:  а) страховщик платит группе непрерывный аннуитет интенсивности 9 до первой смерти в группе;  б) страховщик платит оставшимся членам группы непрерывный аннуитет интенсивности 4 до второй смерти в группе;  в) страховщик платит оставшемуся члену группы непрерывный аннуитет интенсивности 1 до его смерти.  Определить разовую нетто-премию, которую следует заплатить страхователям за такой полис. Считать, что интенсивности смерти членов группы постоянны и равны , а норма процентного дохода  **2.** Группа страхователей (60), (50) заключила со страховой компанией договор следующего содержания:  а) если первым умрет (60), то страховая компания заплатит оставшемуся 2000 в момент смерти компаньона;  б) если первым умрет (50), то страховая компания заплатит оставшемуся 1000 в момент смерти компаньона.;  Определить разовую нетто-премию, которую следует заплатить страхователям за такой полис. Считать, что интенсивности смерти страхователей подчиняются закону Гомпертца. Для первого страхователя  ,  интенсивность смерти второго страхователя  ,  а норма процентного дохода . |

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

|  |  |
| --- | --- |
| Зачетная работа | |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| Дано: Плотность распределения риска . Найти:  А) ; | Пусть . Покажите, что: а); б). |

**Вопросы к экзамену**.

**Экзаменационные вопросы, 5 семестр**

1. Теория полезности и ее приложение к страхованию.
2. Франшизы и страхования эксцедента убытка.
3. Теорема Эрроу об оптимальном страховании.
4. Случайные величины, описывающие индивидуальные риски.
5. Распределение суммы случайных величин.
6. Приближения для распределения суммы страховых выплат.
7. Функции дожития.
8. Остаточное время жизни страхователя.
9. Интенсивность смертности.
10. Связь данных из таблиц продолжительности жизни с функцией дожития. Примеры таблиц продолжительности жизни .
11. Интерполяции функций дожития с помощью данных из таблиц продолжительности жизни.
12. Аналитические законы для интенсивности смертности.
13. Таблицы отбора (селекционные) и заключительные таблицы.
14. Основы теории дисконтирования.
15. Разовые нетто – премии. Страховые договоры с выплатами в момент смерти (непрерывные модели).
16. Пожизненное страхование.
17. Временн***о***е страхование.
18. Страхование на дожитие и смешанное страхование.
19. Страховые договоры с выплатами в конце года смерти (дискретные модели).
20. Связь разовых нетто – премий в непрерывных и дискретных моделях.
21. Дифференциальные уравнения для разовых премий в непрерывных моделях.
22. Коммутационные функции.
23. Пропорциональное перестрахование.
24. Перестрахование превышения потерь.
25. Задачи рационального перестрахования, как задачи многокритериальной оптимизации.

**Экзаменационные вопросы, 6 семестр**

1. Аннуитеты как частный случай потоков платежей.
2. Непрерывные аннуитеты.
3. Дискретные аннуитеты пренумерандо и постнумерандо.
4. Аннуитеты с кратными годовыми выплатами.
5. Вычисление аннуитетов с помощью коммутационных функций.
6. Вычисление регулярных нетто – премий с помощью разовых нетто – премий и аннуитетов.
7. Непрерывные и дискретные модели.
8. Регулярные премии, выплачиваемые несколько раз в год.
9. Корректирующие и накопительные платежи.
10. Перспективные и ретроспективные резервы.
11. Резервы в непрерывных, дискретных и полунепрерывных моделях.
12. Резервы в случае регулярных премий, выплачиваемых несколько раз в год.
13. Резервы для страховых договоров общего вида.
14. Рекуррентные формулы для резервов в дискретных моделях.
15. Распределение риска по годам.
16. Теорема Хэттендорфа.
17. Дифференциальные уравнения Тиле для нетто – резервов в непрерывных моделях.
18. Премия, нагруженная на издержки.
19. Резервы нагруженных на издержки премий.
20. Интенсивность декремента.
21. Округленная продолжительность жизни.
22. Общий тип страхования.
23. Резервы.
24. Состояние совместной жизни нескольких лиц.
25. Состояние выживание последнего.
26. Общее симметрическое состояние жизни нескольких лиц.
27. Формулы Шуэтта и Несбитта.
28. Асимметричные аннуитеты и страхования

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *Контрольная работа,* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки  (владения, опыт деятельности)**  *Экзамен* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |
|  |  |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**   * фундаментальные понятия и законы теории вероятностей, случайных процессов, математической статистики; * современные проблемы соответствующих разделов страхового дела; * понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла актуарной математики; * основные свойства соответствующих математических моделей;   **Уметь:**   * понять поставленную задачу; * использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач актуарной математики; * самостоятельно находить алгоритмы решения задач актуарной математики, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ; * самостоятельно видеть следствия полученных результатов; * точно представить математические знания в области актуарной математики в устной и письменной форме.   **Владеть:**   * навыками освоения большого объема информации и решения задач актуарной математики; * навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов актуарной математики; * культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов актуарной математики;   предметным языком актуарной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления | ОПК-1.Б  ОПК-2,Б  ПК 2.Б |

**8. Ресурсное обеспечение:**

Основная литература:

1.Bower N.L. et. al. Actuarial mathematics. Published by the Society of Actuaries of USA. 1997/

пер. Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д.Джонс и др. Актуарная математика. – М.: Янус-К, 2001. – 655 с.

2.Денисов Д., Котлобовский И., Актуарные расчеты в страховании жизни. М. Издательство МГУ, 2013 г., 128 стр.

3.Касимов Ю.Ф.Введение в актуарную математику. М. Изд. Финансового университета, 2011, 135 с.

4.Лельчук А.Л. Актуарный риск-менеджмент. — Москва: Анкил, 2014. — 424 с.

5.Кузнецова Н.Л., Сапожникова А.В. Актуарная математика. Изд. Тюменского Гос. Университета.. 2010, 179 с.

6.Четыркин Е.М. Финансовая математика. – М.: Дело, 2005. – 395 с.

7.Фалин Г.И., Фалин А.И. Введение в актуарную математику. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1994. – 85 с.

Дополнительная литература:

1.Гербер Х. Математика страхования жизни. – М.: Мир, 1995. – 154 с.

2.Фалин Г.И. Математические основы страхования жизни и пенсионных схем. – М.: Изд-во мех.-мат.ф-та МГУ, 1996.

3.Фалин Г.И., Фалин А.И. Актуарная математика в задачах.-М. : Физматлит, 2003. -190 с.

4.Жуленев С.В. Финансовая математика. Введение в классическую теорию. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2001. – 464 с.

5.Белолипецкий А.А., Горелик В.А. Экономико-математические методы. – М.: Академия, 2010. – 363 с.

Информационные справочные системы:

Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

9. Язык преподавания: русский.

10. Преподаватели: Профессор факультета ВМК МГУ А.А. Белолипецкий.

11.Авторы программы: Профессор факультета ВМК МГУ А.А. Белолипецкий.